# Math ECG 2. 2023-2024

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.


## Devoir surveillé n°1

*Samedi 16 Septembre*
*Durée : 4 heures*

*Les questions précédées de (∗) sont réservées aux khubes.*

Dans tout le sujet, on suppose déjà importées sous leur alias habituels les bibliothèques Python usuelles.

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
```

# Exercice 1

### Partie 1 - Un problème de Cauchy

On considère le problème de Cauchy $(\mathcal{P})$ suivant :

$$(\mathcal{P}) : \qquad \begin{cases} y'' - y &= 0 \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1 \end{cases}$$

(1) Justifier que $(\mathcal{P})$ admet une unique solution (de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$), que l'on notera sh, sur $\mathbb{R}$. Expliciter, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}(x)$.

(2) On note, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) = \mathrm{sh}'(x)$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) > 0$.

(3) Calculer $\mathrm{sh}(0)$ puis dresser le tableau de variations de sh (en y faisant figurer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ que l'on justifiera séparément).

(4) Déterminer, pour tout réel $x$, le signe de $\mathrm{sh}(x)$.

(5) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

(6) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $2\mathrm{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \mathrm{ch}(x)$.

(7) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{ch}(x) - 1 = 2\,\mathrm{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

(8) (∗) Préciser la valeur de $\mathrm{sh}'(0)$ puis montrer que

$$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \qquad \mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

(9) (a) Montrer que, pour tout $a > 1$, il existe un unique $\alpha$ tel que $\mathrm{ch}(\alpha) = a$.
(b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$. En déduire que $\alpha \in ]0, 2a[$.
(c) Recopier et compléter les fonctions Python ci-dessous de sorte que `ch(x)` renvoie $\mathrm{ch}(x)$ et la fonction `val_app_alpha` prenne en argument un nombre $a > 1$ et renvoie une valeur approchée à 0.001 de $\alpha$. Comment s'appelle ce type de programme ?

```
def ch(x) :
    return ...................

def val_app_alpha(a):
     x=0
     y=2*a
     z=(x+y)/2
     while y-x > 0.001 :
         if .............................. :
             y=z
         else :
             x=z
         z=.........
     return ............
```

**Partie 2 - Une suite récurrente**

Soit $a > 1$ un réel fixé et la suite $(u_n)$ définie par son premeir terme $u_0 = a$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + u_n}{2}}.$$

(10) Étudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$.
(*On précisera son domaine de définition, ses limites aux bords du domaine et on dressera son tableau de variations.*)

(11) Résoudre $f(x) - x > 0$.

(12) (a) Justifier que $(u_n)$ est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
(b) Écrire une fonction Python d'en-tête `def suite_u(n, a)` qui prend en argument un réel $a > 1$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ et renvoie la valeur de $u_n$.
(c) Montrer que $(u_n)$ est monotone.
(d) Montrer que $(u_n)$ converge vers une limite $\ell$ à préciser.
(e) Écrire un programme Python qui calcule et affiche le plus petit entier $n$ tel que $|\ell - u_n| < 0.01$.

(13) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathrm{ch}\left(\dfrac{\alpha}{2^n}\right)$.

(14) (a) $(*)$ À l'aide de la Question (7), déterminer un équivalent, lorsque $n \to +\infty$, de $\ell - u_n$.
(b) $(*)$ Quelle est la nature de la série $\sum (\ell - u_n)$ ?

# Exercice 2

**Partie 1 - Coefficients binomiaux et loi hypergéométrique**

(1) On rappelle que la commande Python `np.prod(liste)` renvoie le produit des composantes de la `liste` prise en argument. Écrire une fonction Python d'en-tête `def c_bin(n,k):` qui prend en argument deux entiers naturels $n$ et $k$ et renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

(2) Soient $m, n$ deux entiers naturels non nuls et $p$ un autre entier naturel tel que $p \leq m$ et $p \leq n$. Justifier, à l'aide d'un argument de dénombrement, que

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{m+n}{p} \qquad (*)$$

(3) On considère un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on définit $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ par la formule, pour $k \in [\![0;p]\!]$,

$$P(Z=k) = \frac{\binom{p}{k}\binom{n-p}{p-k}}{\binom{n}{p}}.$$

À l'aide de la formule $(*)$, vérifier que $Z$ définit bien une variable aléatoire. Une telle variable est dite *hypergéométrique* et on notera

$$Z \hookrightarrow \mathcal{H}\left(p, \frac{p}{n}, n\right).$$

(4) (a) Montrer que, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on a :

$$k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}.$$

(b) En déduire, toujours à l'aide de $(*)$, que

$$E(Z) = \frac{p}{\binom{n}{p}} \sum_{k=1}^{p} \binom{p-1}{k-1}\binom{n-p}{p-1-(k-1)} = \frac{p^2}{n}.$$

**Partie 2 - Une tombola**

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ deux entiers. Dans une tombola, il y a $n$ tickets (numérotés de 1 à $n$) dans une urne dont $p$ sont gagnants et connus à l'avance par l'organisateur du jeu (et les autres perdants). Naturellement $1 \leq p \leq n-1$.

Un joueur achète successivement $p$ tickets, choisis au hasard.

Pour $1 \leq i \leq p$, on note $X_i$ la variable aléatoire qui vaut 1 si le $i-$ème numéro acheté est gagnant et 0 sinon.

Enfin, on note $A_{n,p}$ le nombre de numéros gagnants parmi les tickets achetés.

(5) Reconnaître la loi de $X_1$ (en précisant le ou les paramètres). Que vaut son espérance ?

(6) **Simulations et conjectures.**

(a) Rappeler la commande Python qui permet de simuler une loi uniforme $\mathcal{U}([\![a,b]\!])$.

(b) Dans cette question, on veut simuler le choix des $p$ premiers tickets achetés. On dispose donc d'une liste `L=[1, 2, ..., n]` de tickets disponibles parmi lesquels on va successivement choisir, en actualisant la liste des tickets disponibles, $p$ numéros. Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous de sorte qu'elle renvoie la liste `T` des $p$ numéros achetés.

```
def tickets(n,p):
    L=[k for k in range(1, n+1)]
    T=[ ]
    for i in range(p):
        x=....................
        T.append(L[x])
        del ..........
   return ..........
```

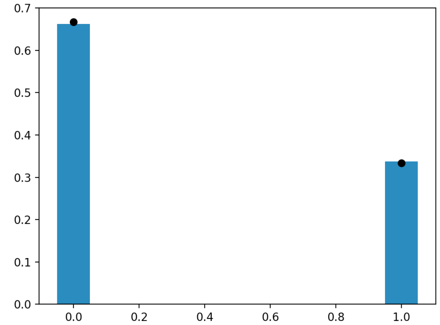
(c) On suppose que la liste `G` des $p$ tickets gagnants est connue. Recopier et compléter la fonction Python suivante de sorte qu'elle simule la variable aléatoire $A_{n,p}$.

```
def simul_A(n,p):
    t= .................
    compteur=0
    for i in range(p):
        if t[i] in G :
            ...........................
    return compteur
```

(d) On écrit les lignes de codes ci-dessous dont l'exécution pour différentes valeurs de $n$, $p$ et $G$ produit les figures reproduites ci-contre. Émettre une conjecture quant à la loi suivie par $A_{n,p}$. Selon cette conjecture, combien a-t-on acheté de tickets gagnants en moyenne ?

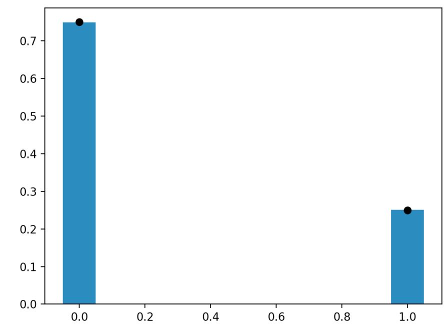
```
n=3 # puis, n=4, n=7, n=20
p=1  # puis p=2, p=3, p=4
G=[2] # puis d'autres numéros gagnants
sample=[simul_A(n,p) for k in range(10000)]
eff=np.zeros(p+1)
for k in range(10000):
    eff[sample[k]]+=1
freq=[eff[k]/10000 for k in range(p+1)]
Z=np.zeros(p+1)
for k in range(p+1):
    Z[k]=c_bin(p, k)*c_bin(n-p, p-k)/c_bin(n,p)

plt.plot([k for k in range(p+1)], Z, 'ko')
plt.bar([k for k in range(p+1)], freq, width=0.1)
plt.show()
```

**Affichage Python**



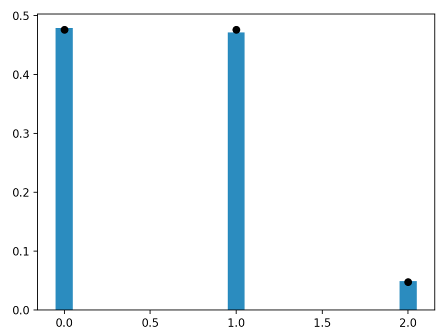
$n = 3,\ p = 1,\ G = [2]$

**Affichage Python**



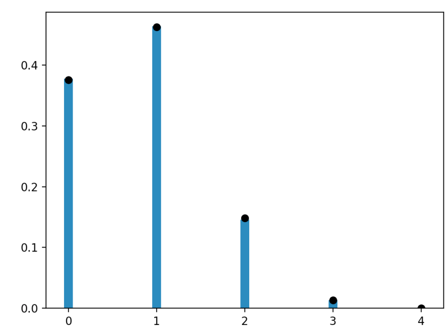
$n = 4,\ p = 1,\ G = [4]$

**Affichage Python**



$n = 7,\ p = 2,\ G = [1, 3]$

**Affichage Python**



$n = 20,\ p = 4,\ G = [11, 14, 17, 20]$

(7) (a) $(*)$ Déterminer la loi conjointe de $(X_1, X_2)$.
(b) $(*)$ En déduire la loi marginale de $X_2$.

Dans toute la suite, on **admet** que toutes les variables $X_i$ suivent la même loi $\mathcal{B}\left(\frac{p}{n}\right)$ (pour $1 \leq i \leq p$).

(8) Exprimer $A_{n,p}$ en fonction de $X_1, ..., X_p$. En déduire l'espérance de $A_{n,p}$. Que dire de la conjecture émise précédemment ?

(9) Afin de déterminer la loi de $A_{n,p}$, on modélise l'expérience par un tirage *simultané* des $p$ tickets dans l'urne qui en contient toujours $n$. Un tirage est donc un ensemble de $p$ numéros de tickets, tous éléments (distincts) de $[\![1, n]\!]$.

(a) Quel est dans ce cas le nombre total de tirages possibles?
(b) Combien de ces tirages contiennent $k$ tickets gagnants?
(c) Démontrer la conjecture sur la loi de $A_{n,p}$ émise ci-avant.

# Exercice 3

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par $I$ la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

(1) (a) Calculer $(A - 3I)^2$.
  (b) En déduire que $A$ est inversible et déterminer $A^{-1}$.

(2) On note $F = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = 3u\}$.
  (a) En résolvant l'équation $AX = 3X$ d'inconnue $X$, montrer qu'il existe $u_1$ et $u_2$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ que l'on déterminera tels que $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.
  (b) La famille $(u_1, u_2)$ est-elle une base de $F$?

(3) On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
  (a) Démontrer que $P$ est inversible et déterminer son inverse.
  (b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où $T$ est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
  (c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, P^{-1}A^nP = T^n$.

(4) (a) Exhiber une matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $T = 3I + N$.
  (b) Calculer $N^2$ et en déduire $N^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.
  (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer $T^n$ comme combinaison linéaire de $I$ et de $N$.
  (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer enfin $T^n$ comme combinaison linéaire de $I$ et de $T$.

(5) (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = n3^{n-1}A - (n-1)3^nI$.
  (b) Vérifier que la formule trouvé à la question précédente reste valable pour $n = -1$.