Math ECG 2. 2023-2024

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir surveillé n°2

Samedi 14 Octobre
Durée : 4 heures

Dans tout le sujet, on suppose déjà importées sous leur alias habituels les bibliothèques Python usuelles.

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
```

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction polynomiale

$$P_n(x) = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^{2n}}{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-x)^k}{k}.$$

(1) Justifier que P_n est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout x différent de -1, on a

$$P_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}.$$

(2) En déduire les variations de P_n sur $[0;+\infty[$ et que $P_n(1) < 0$.

(3) Montrer que

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1}\left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

(4) En déduire, par récurrence, que $P_n(2) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(5) Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive x_n et qu'on a

$$1 < x_n \leq 2.$$

(6) (a) Écrire une fonction Python d'en-tête `def P(n,x):` qui calcule et renvoie la valeur de $P_n(x)$.
(b) Écrire ensuite, une fonction d'en-tête `def va_x(n):` qui renvoie une valeur approchée de x_n à 10^{-4} près obtenue par la méthode de dichotomie.

(7) Montrer que, pour tout $x \geq 0$,

$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t.$$

(8) En déduire que

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\mathrm{d}t.$$

(9) Montrer que, pour tout $t \geq 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$.

(10) Déduire des deux questions précédentes que

$$0 < x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2\ln(2)}}{\sqrt{n}}.$$

(11) Conclure quant à la limite de (x_n).

Exercice 2

Partie I : Réductions simultanées

Dans tout l'exercice, on notera $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(1) Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

  (a) Calculer $A^2 - 7A$.
  (b) La matrice A est-elle inversible ? Quelles sont les valeurs propres possibles de A?
  (c) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique. Justifier que f est un automorphisme.
  (d) On note $u_1 = (1, 1, 0)$. Calculer $f(u_1)$. En déduire que $u_1 \in \operatorname{Ker}(f - 3\mathrm{Id})$.
  (e) Déterminer un vecteur u_2 de $\mathbb{R}^3$ de sorte que (u_1, u_2) forme une base de $\operatorname{Ker}(f - 3\mathrm{Id})$.
  (f) Déterminer un vecteur u_3 de $\mathbb{R}^3$ de sorte que (u_3) forme une base de $\operatorname{Ker}(f - 4\mathrm{Id})$. Que vaut, sans calcul supplémentaire $f(u_3)$?

(2) Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par son action sur la base canonique

$$g(e_1) = e_1 - 3e_2 - e_3, \qquad g(e_2) = -g(e_1), \qquad g(e_3) = -e_1 - 3e_2 + e_3.$$

  (a) Expliciter la matrice B de g dans la base canonique $\mathcal{B}$.
  (b) Quel est le rang de g?
  (c) Calculer $g(u_1)$. En déduire sans calcul supplémentaire une base du noyau de g.
  (d) On note $v = e_1 - e_2 - e_3$. Calculer $g(v)$ en fonction de v.

(3) Vérifier que $\operatorname{Ker}(f - 3\mathrm{Id}) = \operatorname{Vect}(u_1, v)$.

(4) Montrer que $\mathcal{C} = (v, u_1, u_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

(5) Déterminer deux matrices diagonales D_1 et D_2 et une matrice P inversible telles que $A = PD_1P^{-1}$ et $B = PD_2P^{-1}$.

Partie II : une suite matricielle récurrente linéaire d'ordre 2

On pose $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel n :

$$X_{n+2} = \frac{1}{6}AX_{n+1} + \frac{1}{6}BX_n.$$

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite matricielle définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = P^{-1}X_n.$$

(6) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad Y_{n+2} = \frac{1}{6} D_1 Y_{n+1} + \frac{1}{6} D_2 Y_n.$$

(7) Pour tout entier naturel n, on note $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Déduire de la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} a_{n+2} & = \dfrac{1}{2}\, a_{n+1} + \dfrac{1}{2}\, a_n \\[2ex] b_{n+2} & = \dfrac{1}{2}\, b_{n+1} \\[2ex] c_{n+2} & = \dfrac{2}{3}\, c_{n+1} + \dfrac{1}{3}\, c_n \end{cases}$$

(8) Expliciter, à l'aide d'un pivot de Gauss, la matrice P^{-1}.
Calculer ensuite les matrices Y_0 et Y_1.

(9) Pour tout entier naturel n, calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

(10) En déduire l'expression de X_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
On notera $X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$, et on vérifiera que :

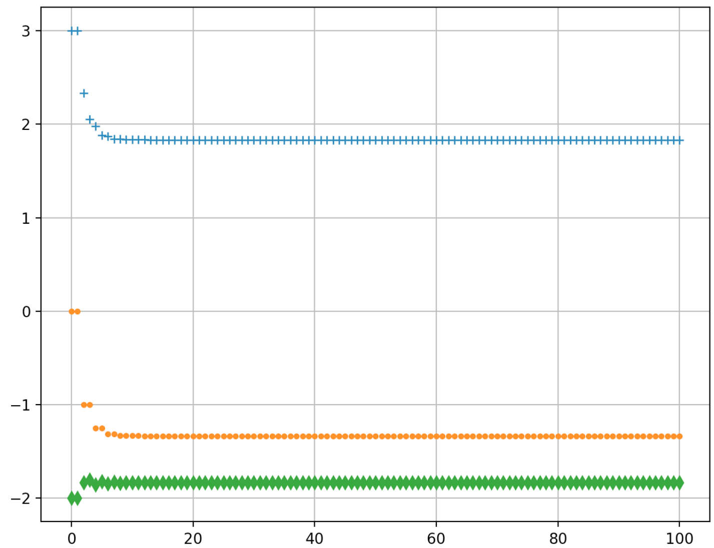
$$\beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} - \frac{4}{3}$$

(11) (a) Compléter la fonction ci-dessous qui prend en argument un entier n supérieur ou égal à 2 et qui renvoie la matrice X_n :

```
def X(n) :
    Xold=np.array([[3],[0],[-1]])
    Xnew=np.array([[3],[0],[-2]])
    A=np.array([[2, 1, -2], [0, 3, 0], [1, -1, 5]])
    B=np.array([[1,-1,-1], [-3, 3, -3], [-1, 1, 1]])
    for i in range(2, n+1) :
        Aux= ...............
        Xold=................
        Xnew=..............
    return .................
```

(b) La fonction précédente a été utilisée dans un script permettant d'obtenir graphiquement (voir ci-dessous) les valeurs de α_n, β_n et γ_n en fonction de n.
Associer chacune des trois représentations graphiques à chacune des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en justifiant votre réponse.

Affichage Python



Exercice 3

Partie I : Un développement en série

Soit f la fonction définie sur $[0;1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

(1) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0;1[$.

(2) (a) Soit $x \in]0;1[$. Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t,$$

où $f^{(0)} = f$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}$ désigne la dérivée $k-$ième de f.
(*On pourra s'aider d'une intégration par parties.*)

(b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in [0;1[, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}.$$

(c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0,1[$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k + \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t.$$

(3) Soit $x \in]0;1[$ fixé.

(a) Montrer que la fonction $\varphi_x \ : \ t \mapsto \dfrac{x-t}{1-t}$ est décroissante sur l'intervalle $[0;x]$.

(b) Montrer que tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t \leq 2x^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right).$$

(c) On **admet** que

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}, \qquad n \to +\infty.$$

Montrer que

$$\frac{n+1}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}, \qquad n \to +\infty.$$

(d) En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t = 0.$$

(4) Soit x un réel de $]0;1[$.
Montrer que la série $\sum_{k\geq 0} \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{4}\right)^k$ converge et que

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{4}\right)^k.$$

Partie II : Une marche aléatoire

Soit p un réel fixé de $]0;1[$.
On considère une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi, vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P(Y_n = 1) = p, \qquad P(Y_n = -1) = 1-p.$$

On dit qu'une telle variable suit la loi de *Rademacher* de paramètre p.

(5) Déterminer, en fonction de p, l'espérance et la variance de Y_n.

On introduit ensuite une suite (X_n) de variables aléatoires définie comme suit : $\left\{\begin{array}{rl} X_0 & = 0 \\ X_{n+1} & = X_n + Y_n \end{array}\right.$

(6) Simulation sous Python.

(a) Écrire une fonction d'en-tête `def Rademacher(p):` qui renvoie une simulation de la loi de Rademacher de paramètre p.
(b) Écrire alors une fonction d'en-tête `def simul_traj_X(n,p):` qui renvoie la liste de toutes les valeurs (aléatoires) successives $[X_0, X_1, ...X_n]$.

(7) On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = \dfrac{Y_n + 1}{2}$.

(a) Reconnaître la loi de Z_n. On précisera son (ou ses) paramètre(s).

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de $\sum_{k=0}^{n-1} Z_k$?

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\qquad X_n = 2\sum_{k=0}^{n-1} Z_k - n.$

(8) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(X_n = 0)$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_{2n+1} = 0, \qquad p_{2n} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

(9) Dans cette question, et dans cette question uniquement, on considère le cas particulier où $p \neq \dfrac{1}{2}$.

(a) Montrer que $0 < p(1-p) < \frac{1}{4}$.

(b) À l'aide de la Partie I, montrer que la série $\sum_{n\geq 0} p_{2n}$ converge et préciser sa somme.

(10) Dans cette question, et dans cette question uniquement, on considère le cas particulier où $p = \dfrac{1}{2}$.

(a) Montrer que $p_{2n} \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$, $n \to +\infty$.

(b) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} p_{2n}$ diverge.

La fin du problème s'adresse aux étudiant.e.s qui préparent les épreuves les plus ambitieuses.

(11) On **admet** le théorème suivant:

Lemme de Borel-Cantelli

Soit (A_n) une suite d'évènements.
Si la série $\sum P(A_n)$ converge, alors la probabilité qu'une infinité d'entre eux se réalisent simultanément est nulle.

(a) Que permet alors de conclure le résultat montré à la Question (9b)?

(b) Soit $p \neq \dfrac{1}{2}$. On introduit, pour $n \in \mathbb{N}$, les variables aléatoires W_n et W_∞ définies par

$$W_n = \max\{k \leq n : \; X_k = 0\}, \qquad W_\infty = \max\{k \in \mathbb{N} : \; X_k = 0\}.$$

(i) Écrire une fonction Python d'en-tête `def simul_W(n,p):` qui renvoie une simulation de W_n.

(ii) En déduire ensuite l'écriture d'une fonction `def est_E_W(n,p):` qui calcule et renvoie une *estimation* de $E(W_n)$.

(iii) Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que la suite $([W_n \leq t])_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante au sens de l'inclusion.

(iv) Montrer que $[W_\infty \leq t] = \displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} [W_n \leq t]$.

(v) (`khûbes`) Déduire des deux questions précédentes que (W_n) converge en loi vers W_∞.

(12) Le but de cette question est de démontrer le lemme de Borel-Cantelli admis-ci dessus.
On considère donc une suite d'évènements (A_n) d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que la série $\sum P(A_n)$ converge.

On pose ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = \displaystyle\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$.

(a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $B_{n+1} \subset B_n$. On pose $B = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$.

(b) Soit $\omega \in \Omega$. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes:

$$(*) \quad \omega \in B \iff (**) \quad \omega \in A_k \text{ pour une infinité de valeurs de } k$$

(c) Montrer que $P(B_n) \leq \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$.

(d) Justifier que $P(B) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(B_n)$. Conclure que $P(B) = 0$.