Devoir surveillé n°2

Solution

Exercice 1

Cet exercice provient du sujet **EML 2002**.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction polynomiale

$$P_n(x) = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^{2n}}{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-x)^k}{k}.$$

(1) Étant polynomiale, P_n est dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée d'une somme (finie) étant égale à la somme des dérivées, on a

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k k x^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k x^{k-1} \\ &= \sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^{j+1} x^j = -\sum_{j=0}^{2n-1} (-x)^j \qquad \text{(on a réindexé par } j = k-1\text{)} \\ &= -\frac{(-x)^{2n} - 1}{-x-1} = \frac{x^{2n}-1}{x+1} \quad (\text{car } -x \neq 1.) \end{aligned}$$

(2) P_n' est du signe de $x^{2n} - 1 = (x^n+1)(x^n-1)$ et comme $n > 0$ la fonction $x \to x^n - 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et s'annule en 1, on en déduit son signe et par suite celui de la dérivée. Le tableau de variations est le suivant.

x	0		1		$+\infty$
$P_n'(x)$		$-$	0	$+$	
P_n	0	$\searrow$	$P_n(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

En $+\infty$, c'est le terme de plus haut degré qui fournit un équivalent et la limite

$$P_n(x) \sim x^{2n} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Comme $P_n(0) = 0$ et que P_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$ alors $P_n(1) < P_n(0) = 0$.

(3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^k x^k}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} + \frac{(-1)^{2n+1} x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2} x^{2n+2}}{2n+2} \\ &= P_n(x) + x^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2}\right). \end{aligned}$$

(4) On a donc en particulier pour $x = 2$

$$P_{n+1}(2) = P_n(2) + 2^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+2}\right).$$

Et comme

$$-\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+2} = \frac{n}{(2n+1)(n+1)} \geq 0,$$

la suite $(P_n(2))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alors croissante. De plus, $P_1(2) = -\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} = 1 \geq 0$ alors, pour tout entier $n \geq 1$, $P_n(2) \geq P_1(2) \geq 0$.

(5) Sur $]0; 1[$, P_n est strictement décroissante à valeur dans $]P_n(0); 0[$ et ne s'annule pas. Sur $[1; +\infty[$, P_n est strictement croissante (et continue) et réalise une bijection (d'après le théorème du même nom) de $[1; +\infty[$ sur $[P_n(1); +\infty[$. Comme $P_n(1) < 0$, $0 \in [P_n(1); +\infty[$ et admet donc un unique antécédent par P_n, noté x_n.
L'équation $P_n(x) = 0$ admet donc une unique solution strictement positive et celle-ci est bien x_n.
De plus, comme $P_n(1) < 0 = P_n(x_n) \leq P_n(2)$ d'après les questions précédentes et que P_n est bijective et strictement croissante sur $[1; +\infty[$ (sa bijection réciproque aussi et) on a bien

$$1 < x_n \leq 2.$$

(6) (a) La fonction P_n est définie par une somme, on utilise donc une boucle `np.sum()` qu'on applique à une **liste** (qu'on remplit par *compréhension de liste*).

```
def P(n,x) :
    L=[(-x)**k/k for k in range(1, 2*n+1)]
    return np.sum(L)
```

(b) On fait donc une recherche de la solution de $P_n(x) = 0$, par dichotomie, en partant de l'intervalle $[1; 2]$ qu'on réduit de moitié à chaque étape jusqu'à ce que la taille de l'intervalle de recherche soit plus petite que la précision voulue.

```
def va_x(n):
    a=1
    b=2
    c=(a+b)/2
    while (b-a) > 10**(-4) :
        if P(n,c) >0 :
            b=c
        else :
            a=c
        c=(a+b)/2
    return c
```

(7) P_n est une primitive de P_n' mais $P_n(0)=0$ donc P_n est **la** primitive de P_n' qui s'annule en 0, ou encore, pour tout $x \geq 0$,

$$P_n(x)=\int_0^x P_n'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t.$$

(8) Par la relation de Chasles, on a, comme $x_n>1$,

$$0=P_n(x_n)=\int_0^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t=\int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t+\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t,$$

ou encore

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t=-\int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t=\int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\mathrm{d}t.$$

(9) Si $t=1$ les deux quantités sont nulles et donc égales et l'inégalité large est vérifiée. Si $t>1$, alors $t^2>1$ (et $t^2-1>0$) et on a

$$\frac{t^{2n}-1}{t^2-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(t^2\right)^k \geq \sum_{k=0}^{n-1} 1=n,$$

ce qui donne bien l'inégalité voulue.

(10) L'inégalité précédente, après avoir remarqué que $t^2-1=(t-1)(t+1)$, se traduit par le fait que, pour $t \geq 1$, on a

$$\frac{t^{2n}-1}{t+1} \geq n(t-1),$$

et par croissance de l'intégrale,

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t \geq \int_1^{x_n} n(t-1)\mathrm{d}t=n\left[\frac{(t-1)^2}{2}\right]_1^{x_n}=n\frac{(x_n-1)^2}{2}.$$

Avec ce qui précède, on a donc

$$\begin{aligned}
n\frac{(x_n-1)^2}{2} &\leq \int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\mathrm{d}t=\int_0^1 \frac{1}{t+1}\mathrm{d}t-\int_0^1 \frac{t^{2n}}{t+1}\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 \frac{1}{t+1}\mathrm{d}t \qquad \left(\text{car } \int_0^1 \frac{t^{2n}}{t+1}\mathrm{d}t \geq 0\right) \\
&= \ln(2),
\end{aligned}$$

ce qui se résumé en

$$n\frac{(x_n-1)^2}{2} \leq \ln(2) \Longleftrightarrow (x_n-1)^2 \leq \frac{2\ln(2)}{n}.$$

Mais, $x_n>1$ donc ceci est équivalent à

$$0<x_n-1 \leq \sqrt{\frac{2\ln(2)}{n}},$$

ce qui était demandé.

(11) On applique le théorème des gendarmes à l'encadrement précédent donc les extrémités tendent toutes deux clairement vers 0. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n-1=0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n=1.$$

Exercice 2

Cet exercice provient du sujet **ECRICOME 2018**.

Partie I : Réductions simultanées

Dans tout l'exercice, on notera $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(1) Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Le calcul donne

$$A^2 - 7A = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = -12I_3$$

(b) La relation matricielle ci-dessus se réécrit comme

$$\begin{aligned} A^2 - 7A = 12I_3 &\iff A(A - 7I_3) = 12I_3 \\ &\iff A\left(\frac{1}{12}A - \frac{7}{12}I_3\right) = I_3 \end{aligned}$$

Ainsi, A est bien inversible et on peut même affirmer que

$$A^{-1} = \frac{1}{12}A - \frac{7}{12}I_3.$$

De plus, le polynôme $X^2 - 7X + 12$ est donc un polynôme annulateur de A. Ses racines sont 4 et 3. On sait que le spectre de A est alors inclus dans l'ensemble des racines du polynôme, ou encore que les valeurs propres de A sont à chercher parmi les racines du polynômes donc 3 et 4 sont les seules valeurs propres **possibles** de A.

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{3, 4\}.$$

(c) L'endomorphisme f est représenté (dans la base canonique) par une matrice inversible. Il est donc bijectif : c'est un automorphisme.

(d) On note $u_1 = (1, 1, 0)$. On applique la matrice A au vecteur colonne portant les coordonnées de u_1 dans la base canonique :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $f(u_1) = 3u_1$ ce qui s'écrit aussi $f(u_1) - 3u_1 = 0$ ou encore $(f - 3\mathrm{Id})(u_1) = 0$. On a bien $u_1 \in \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id})$.

(e) On résout l'équation de noyau !

$$u=(x,y,z)\in\mathrm{Ker}(f-3\mathrm{Id}) \iff \begin{cases} 2x+y-2z &= 3x\\ 3y &= 3y\\ x-y+5z &= 3z\end{cases}$$
$$\iff x-y+2z = 0$$
$$\iff x=y-2z$$
$$\iff u=(y-2z,y,z)=y(1,1,0)+z(-2,0,1)=yu_1+zu_2$$

où on a posé $u_2=(-2,0,1)$. On a donc $\mathrm{Ker}(f-3\mathrm{Id})=\mathrm{Vect}(u_1,u_2)$. Les vecteurs u_1 et u_2 sont clairement non colinéaires et forment bien une base de $\mathrm{Ker}(f-3\mathrm{Id})$.

(f) On procède de manière analogue en résolvant l'équation de noyau.

$$u=(x,y,z)\in\mathrm{Ker}(f-4\mathrm{Id}) \iff \begin{cases} 2x+y-2z &= 4x\\ 3y &= 4y\\ x-y+5z &= 4z\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -2x-y+2z &= 0\\ y &= 0\end{cases} \iff \begin{cases} z &= -x\\ y &= 0\end{cases}$$
$$\iff u=(x,0,-x)=x(1,0,-1)=xu_3$$

où on a posé $u_3=(1,0,-1)$. Ce vecteur est non nul et engendre $\mathrm{Ker}(f-4\mathrm{Id})$: il en forme donc une base.
Il est immédiat que

$$u_3\in\mathrm{Ker}(f-4\mathrm{Id})\iff (f-4\mathrm{Id})(u_3)=0\iff f(u_3)=4u_3=(4,0,-4).$$

(2) Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par son action sur la base canonique

$$g(e_1)=e_1-3e_2-e_3,\qquad g(e_2)=-g(e_1),\qquad g(e_3)=-e_1-3e_2+e_3.$$

(a) Par définition de la matrice de g dans la base canonique et la donnée des images ci-dessus on a immédiatement

$$B=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-3&3&-3\\-1&1&1\end{pmatrix}.$$

(b) Par définition $\mathrm{rg}(g)=\dim(\mathrm{Im}(g))=\dim(\mathrm{Vect}(g(e_1),g(e_2),g(e_3)))$. Comme $g(e_1)=-g(e_2)$, on a alors

$$\mathrm{Im}(g)=\mathrm{Vect}(g(e_1),g(e_3)).$$

Comme ces deux derniers vecteurs sont non colinéaires, ils forment une base de l'image de g. Ainsi, $\mathrm{rg}(g)=2$.

(c) On applique la matrice B au vecteur colonne des coordonnées de u_1 dans la base canonique. On a

$$B\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=0$$

Donc $g(u_1)=0$ et $u_1\in\mathrm{Ker}(g)$. Comme, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(g))=3-2=1$ et que u_1 en est un élément non nul, il en forme une base.

(d) On note $v=e_1-e_2-e_3=(1,-1,-1)$. On calcule $g(v)$ comme ci-dessus.

$$B\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\-3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

donc $g(v) = 3v$.

(3) Plusieurs manières de répondre à cette question. On en propose deux ici.

- *Méthode 1.* On observe que
$$v = -u_1 - u_2$$
donc
$$\operatorname{Ker}(f - 3\mathrm{Id}) = \operatorname{Vect}(u_1, u_2) = \operatorname{Vect}(u_1, -u_1 - u_2) = \operatorname{Vect}(u_1, v).$$

- *Méthode 2.* On remarque que
$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$
donc $f(v) = 3v$ ou encore $v \in \operatorname{Ker}(f - 3\mathrm{Id})$. Comme v et u_1 sont deux éléments non colinéaires de $\operatorname{Ker}(f - 3\mathrm{Id})$ qu'on sait être de dimension 2, ils en forment une base et donc $\operatorname{Ker}(f - 3\mathrm{Id}) = \operatorname{Vect}(u_1, v)$.

(4) La famille $\mathcal{C} = (v, u_1, u_3)$ est constituée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est un espace vectoriel de dimension 3. Il suffit de montrer qu'elle est libre pour qu'elle en forme une base. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a
$$\begin{aligned} av + bu_1 + cu_3 = 0 &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a+b+c &=& 0 \\ -a+b &=& 0 \\ -a-c &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a+b+c &=& 0 \\ 2b+c &=& 0 \\ b &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff a = b = c = 0 \end{aligned}$$
Ainsi, la famille $\mathcal{C}$ est bien libre et forme une base de $\mathbb{R}^3$.

(5) Tout suggère de regarder les matrices de f et g dans la base $\mathcal{C}$ que l'on va donc nommer respectivement D_1 et D_2. Commençons par les expliciter. Pour ce faire, il faut calculer les images des vecteurs de $\mathcal{C}$ par f et g et les exprimer en fonction de v, u_1 et u_3. Mais il se trouve qu'on a déjà (presque) toutes ces informations (il manque $g(u_3)$) :
$$\begin{array}{rcl} f(v) &=& 3v \\ f(u_1) &=& 3u_1 \\ f(u_3) &=& 4u_3 \end{array}$$
Donc on peut écrire $D_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et
$$\begin{array}{rcl} g(v) &=& 3v \\ g(u_1) &=& 0 \\ g(u_3) &=& (2, 0, -2) = 2(u_3) \end{array}$$
Donc on peut écrire $D_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

En introduisant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$ (qui est donc inversible en tant que matrice de passage - ses colonnes forment une base), la formule de changement de base donne bien

$$A = PD_1P^{-1}, \quad \text{et} \quad B = PD_2P^{-1}.$$

Partie II : une suite matricielle récurrente linéaire d'ordre 2

On pose $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel n :

$$X_{n+2} = \frac{1}{6}AX_{n+1} + \frac{1}{6}BX_n.$$

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite matricielle définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = P^{-1}X_n.$$

(6) On injecte la définition de Y_n mais on commence par observer que

$$P^{-1}A = D_2P^{-1}, \qquad \text{et} \qquad P^{-1}B = D_1P^{-1}.$$

$$\begin{aligned} Y_{n+2} &= P^{-1}X_{n+2} \\ &= P^{-1}\left(\frac{1}{6}AX_{n+1} + \frac{1}{6}BX_n\right) \\ &= \frac{1}{6}P^{-1}AX_{n+1} + \frac{1}{6}P^{-1}BX_n \\ &= \frac{1}{6}D_1P^{-1}X_{n+1} + \frac{1}{6}D_2P^{-1}X_n \\ &= \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(7) Comme

$$D_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad D_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

la relation précédente donne immédiatement

$$\begin{aligned} Y_{n+2} = \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n \quad &\iff \left\{ \begin{array}{lcl} a_{n+2} &=& \frac{1}{6}\times 3a_{n+1} + \frac{1}{6}\times 3a_n \\ b_{n+2} &=& \frac{1}{6}\times 3b_{n+1} + 0 \\ c_{n+2} &=& \frac{1}{6}\times 4c_{n+1} + \frac{1}{6}\times 2c_n \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{lcl} a_{n+2} &=& \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n \\ b_{n+2} &=& \frac{1}{2}b_{n+1} \\ c_{n+2} &=& \frac{2}{3}c_{n+1} + \frac{1}{3}c_n \end{array} \right. , \end{aligned}$$

ce qu'on nous demandait.

(8) Inversons P par in pivot de Gauss simultané :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

et donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ensuite, on obtient

$$Y_0 = P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad Y_1 = P^{-1}X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(9) On reconnait deux suites à récurrence linéaire d'ordre 2 ((a_n) et (c_n)) et pour b_n une suite géométrique de raison $1/2$. On commence par celle-ci car c'est la plus immédiate à exprimer

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Pour les deux autres, on suit le protocole du cours, en commençant par introduire l'équation caractéristique. Pour (a_n), celle ci est

$$q^2 - \frac{1}{2}q - \frac{1}{2} = 0 \iff q = 1 \quad \text{ou} \quad q = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$a_n = \lambda \times 1^n + \mu \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

où λ et μ sont à déterminer avec les conditions initiales. En injectant les valeurs pour $n = 0$ et $n = 1$, on trouve

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda + \mu & = & 2 \\ 2\lambda - \mu & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & 4/3 \\ \mu & = & 2/3 \end{array}\right.$$

et on a alors

$$a_n = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Enfin, pour (c_n), l'équation caractéristique est

$$q^2 - \frac{2}{3}q - \frac{1}{3} = 0 \iff q = 1 \quad \text{ou} \quad q = -\frac{1}{3}.$$

Ainsi,

$$c_n = \lambda + \mu\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

et on applique la même méthode pour trouver λ et μ, pour obtenir

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda+\mu & = & -1 \\ 3\lambda-\mu & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & 1/2 \\ \mu & = & -3/2 \end{array}\right.$$

et donc

$$c_n = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

(10) Par définition

$$Y_n = P^{-1}X_n \iff X_n = PY_n.$$

Ou encore

$$X_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ \frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

On veut seulement β_n, résultat de la deuxième ligne de P appliquée à Y_n, et on trouve

$$\beta_n = -a_n + b_n = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

et on retrouve avec une certaine fierté l'égalité demandée.

(11) (a) e programme demandé reprend la structure classique d'un programme permettant le calcul des termes d'une suite à récurrence linéaire d'ordre 2.

```
def X(n) :
    Xold=np.array([[3],[0],[-1]])
    Xnew=np.array([[3],[0],[-2]])
    A=np.array([[2, 1, -2], [0, 3, 0], [1, -1, 5]])
    B=np.array([[1,-1,-1], [-3, 3, -3], [-1, 1, 1]])
    for i in range(2, n+1) :
        Aux= 1/6*A*Xnew+1/6*B*Xold
        Xold=Xnew
        Xnew=Aux
    return Xnew
```

(b) Pour chaque suite, le dernier terme représenté correspond à $n = 100$. Pour cette valeur de n, les termes de chaque suite sont proches de leurs limites. On voit que

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{11}{6} \simeq 1.8, \quad \lim_{n\to+\infty} \beta_n = -\frac{4}{3} \simeq -1.3$$

Ainsi, la suite avec des croix + bleues correspond à (α_n), celle avec des points oranges à (β_n) et celle avec des losanges verts à (γ_n).

Exercice 3

Ce problème est proposé en sujet zéro par **ECRICOME** pour l'évolution du concours et de la série ECG à partir de 2023. Il a été remanié notamment concernant les question Python mais aussi sur l'interprétation du résultat de convergence avec le lemme de Borel-Cantelli (pour en faire un encore plus joli problème). La démonstration du lemme de Borel-Cantelli en fin de problème apparait sous cette forme dans le sujet **ESSEC II 2021**.
La formule de Taylor à l'ordre n avec reste intégral (Question (2a)) apparaissait déjà dans plusieurs sujets, notamment **EDHEC 1998**.

Partie I : Un développement en série

Soit f la fonction définie sur $[0;1[$ par

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

(1) La fonction $u\mapsto\sqrt{u}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x\in[0;1[$, $1-x>0$. Par composition, f est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0;1[$.

(2) (a) Soit $x\in]0;1[$. C'est parti.

- initialisation. Pour $n=0$. On a bien

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{0}f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}+\int_0^x f^{(1)}(t)\mathrm{d}t &= f(0)+\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t\\ &= f(0)+[f(t)]_0^x=f(0)+f(x)-f(0)\\ &= f(x)\end{aligned}$$

et la relation est vérifiée pour $n=0$.

- hérédité. Supposons que, pour un certain $n\in\mathbb{N}$, on ait

$$\sum_{k=0}^{n}f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}+\int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t=f(x).$$

On commence par traiter l'intégrale du membre de gauche au rang $n+1$. Comme suggéré, on va faire une petite intégration par parties. On pose

$$\left\{\begin{array}{rcl}u'(t)&=&\frac{(x-t)^n}{n!}\\ v(t)&=&f^{(n+1)}(t)\end{array}\right.\rightsquigarrow\left\{\begin{array}{rcl}u(t)&=&-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\\ v'(t)&=&f^{(n+2)}(t)\end{array}\right.$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0;1[$, les fonctions u et v sont notamment de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;x]$ rendant cette intégration par parties licite. Ceci donne

$$\begin{aligned}\int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t &= \left[-f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^x+\int_0^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t\\ &= f^{(n+1)}(0)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\int_0^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Mais alors

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{k=0}^{n}f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}+\int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t \qquad (\text{ par HR})\\ &= \sum_{k=0}^{n}f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}+f^{(n+1)}(0)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\int_0^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{n+1}f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}+\int_0^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

ce qui est bien la formule au rang $n+1$ et termine la récurrence.

(b) Il s'agit de dériver des fonctions racines...

- initialisation. Pour $n=0$,

$$f^{(0)}(x)=f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}=(1-x)^{-\frac{1}{2}}=\frac{(2\times 0)!}{2^{2\times 0}0!}(1-x)^{-0-\frac{1}{2}},$$

et la formule est vraie pour $n=0$.

- <u>hérédité.</u> Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait
$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}.$$
Alors,
$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left((1-x)^{-n-\frac{1}{2}}\right)' \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left(-\left(-n-\frac{1}{2}\right)\right)\left((1-x)^{-n-\frac{1}{2}-1}\right) \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left(\frac{2n+1}{2}\right)\left((1-x)^{-(n+1)-\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left(\frac{(2n+2)(2n+1)}{2\times 2(n+1)}\right)\left((1-x)^{-(n+1)-\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}(n+1)!}\left((1-x)^{-(n+1)-\frac{1}{2}}\right), \end{aligned}$$
ce qu'on voulait pour terminer cette récurrence.

(c) Dans le but d'utiliser la Question (2a), on commence par écrire que
$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(2k)!}{2^{2k}k!k!} = \binom{2k}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$
et
$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!} &= \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}(n+1)!n!}\left((1-t)^{-\frac{3}{2}}\right)\frac{(x-t)^n}{(1-t)^n} \\ &= \frac{(n+1)(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)!(n+1)!}\left((1-t)^{-\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{(x-t)}{(1-t)}\right)^n \\ &= \frac{(n+1)}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\left((1-t)^{-\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{(x-t)}{(1-t)}\right)^n \end{aligned}$$
et la formule obtenue à la Question (2a) donne immédiatement
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k + \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t.$$

(3) Soit $x \in]0;1[$ fixé.

(a) La fonction φ_x est dérivable sur $[0;x]$ comme quotient de polynomes dont le dénominateur ne s'annule pas. On a
$$\varphi_x'(t) = \frac{-(1-t)+x-t}{(1-t)^2} = \frac{x-1}{(1-t)^2} < 0$$
car $x<1$ et φ_x est bien décroissante sur l'intervalle.

(b) Observant que la quantité sous l'intégrale est positive sur $[0;x]$, la positivité de l'intégrale garantit bien l'inégalité de gauche de l'encadrement demandé.
La fonction φ_x étant décroissante sur $[0;x]$, et la fonction $u \mapsto u^n$ étant elle croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a, pour tout $t \in [0;x]$,
$$\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n = \varphi_x(t)^n \leq \varphi(0)^n = x^n.$$
Il suit, par positivité de l'intégrale, que
$$\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t \leq x^n\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}t = x^n\left[2(1-t)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^x$$

Tout ceci donne bien

$$0 \leq \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t \leq 2x^n \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right).$$

(c) On **admet** que

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}, \qquad n \to +\infty.$$

(**Remarque**. Cette équivalence très utile s'appelle la **formule de Stirling** et fera sûrement l'objet d'un chouette Devoir Maison un peu plus tard.)

Par définition des coefficients binomiaux

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \sim \frac{\sqrt{2\pi(2n+2)}(2n+2)^{(2n+2)}e^{-2n-2}}{\left(\sqrt{2\pi(n+1)}(n+1)^{(n+1)}e^{-n-1}\right)^2} = \frac{2^{2n+2}\sqrt{n+1}}{\sqrt{\pi}(n+1)}.$$

Mais alors,

$$\frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1} \sim \frac{(n+1)}{2^{2n+2}} \frac{2^{2n+2}\sqrt{n+1}}{\sqrt{\pi}(n+1)} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{\pi}} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}, \qquad n \to +\infty.$$

(d) En combinant les deux derniers résultats,

$$0 \leq \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1} \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t \leq 2x^n \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right) \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}.$$

Mais, alors

$$2x^n \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right) \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1} \sim \kappa x^n \sqrt{n},\ n \to +\infty$$

où $\kappa = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right)$ est une constante. Par croissance comparée (car $|x| < 1$) puis par théorème des gendarmes,, il suit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1} \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t = 0.$$

(4) Soit x un réel de $]0;1[$. D'après la Question ($2c$) et la question précédente,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k &= f(x) - \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1} \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x).\end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum_{k\geq 0} \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k$ converge et sa somme vérifie

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k.$$

Partie II : Une marche aléatoire

Soit p un réel fixé de $]0;1[$.
On considère une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi, vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P(Y_n = 1) = p, \qquad P(Y_n = -1) = 1-p.$$

On dit qu'une telle variable suit la loi de *Rademacher* de paramètre p.

(5) Sans la moindre difficulté

$$E(Y_n) = (-1)(1-p)+p = 2p-1, \quad E(Y_n^2) = (-1)^2(1-p)+p = 1, \quad V(Y_n) = 1-(2p-1)^2 = 4p(1-p).$$

On introduit ensuite une suite (X_n) de variables aléatoires définie comme suit

$$\begin{cases} X_0 &= 0 \\ X_{n+1} &= X_n + Y_n \end{cases}$$

(6) Simulation sous Python

(a) On s'inspire de la façon de simuler une *Bernoulli* à partir d'une loi uniforme.

```
def Rademacher(p):
    if rd.random() <p :
        return 1
    return -1
```

(b) Tout ceci s'écrit sans difficulté en suivant la définition avec une petite boucle `for` en utilisant la fonction `Rademacher` ci-dessus.

```
def simul_traj_X(n,p):
    X=[0]
    for k in range(1, n+1):
        X.append(X[k-1]+Rademacher(p))
    return X
```

(7) On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = \dfrac{Y_n + 1}{2}$.

(a) Si $Y_n = 1$ alors $Z_n = 1$, si $Y_n = -1$ alors $Z_n = 0$. On reconnait une loi de Bernoulli de paramètre p.

(b) Les variables Y_k sont mutuellement indépendantes. Par le lemme des coalitions il en est de même pour les variables Z_k. Et le cours nous dit que la somme de Bernoulli indépendantes est une binomiale. On peut donc affirmer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} Z_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).$$

(c) Observant que

$$X_{k+1} - X_n = Y_k = 2Z_k - 1,$$

un télescopage donne

$$X_n = X_n - X_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(X_{k+1} - X_k) = \sum_{k=0}^{n-1}(2Z_k - 1) = 2\sum_{k=0}^{n-1} Z_k - n.$$

(8) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(X_n = 0)$.
Ainsi, p_n est donc la probabilité d'être de retour, à l'instant n, au point de départ 0.
On a alors

$$p_{2n+1} = P(X_{2n+1} = 0) = P\left(2\sum_{k=0}^{2n+1} Z_k = 2n+1\right) = 0$$

car les variables Z_k prennent leur valeurs dans $\{0; 1\}$ et donc nécessairement $2\sum_{k=0}^{2n+1} Z_k$ prend une valeur paire.
En revanche,

$$p_{2n} = P(X_{2n=0}) = P\left(2\sum_{k=0}^{2n-1} Z_k = 2n\right) = P\left(\sum_{k=0}^{2n-1} Z_k = n\right) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

car on sait que $\sum_{k=0}^{2n-1} Z_k \hookrightarrow \mathcal{B}(2n,p)$.

(9) Dans cette question, et dans cette question uniquement, on considère le cas particulier où $p \neq \frac{1}{2}$.

(a) C'est une question classique. On étudie la fonction $\psi : x \mapsto x(1-x)$ sur $]0;1[$. Cette fonction est polynomiale donc dérivable. Sa dérivée vaut $\psi'(x) = 1-2x$ et ψ est donc maximale en $x = 1/2$ et le maximum vaut $\psi(1/2) = 1/4$ et il n'est atteint que pour $p = 1/2$. Ainsi, on a bien, pour tout $p \in]0;1[$ que

$$p(1-p) < \frac{1}{4}.$$

(b) En particulier, la question précédente permet d'affirmer que $4p(1-p) < 1$. On peut donc utiliser la formule de la Question (4) avec $x = 4p(1-p)$ pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} (p(1-p))^n = f(4p(1-p)).$$

On a donc bien montré que la série $\sum_{n\geq 0} p_{2n}$ était convergente et que sa somme valait

$$f(4p(1-p)) = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}}.$$

(10) Dans cette question, et dans cette question uniquement, on considère le cas particulier où $p = \frac{1}{2}$.

(a) En reprenant la Question (3c), avec $2n$ au lieu de $2(n+1)$, on a

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}n} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.$$

Ceci donne tout de suite

$$p_{2n} = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

(b) On sait que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (par critère de Riemann). Ainsi, par critère d'équivalence (pour les séries à termes positifs - qu'on peut appliquer car p_{2n} est une quantité positive : c'est une probabilité), on peut conclure que la série $\sum_{n\geq 0} p_{2n}$ diverge.

(11) On **admet** le théorème suivant:

Lemme de Borel-Cantelli

Soit (A_n) une suite d'évènements.
Si la série $\sum P(A_n)$ converge, alors la probabilité qu'une infinité d'entre eux se réalisent simultanément est nulle.

(a) On applique ce lemme à la suite d'évènement $A_n = [X_n = 0]$, dans le cas de $p \neq 1/2$. On sait que $p_{2n+1} = 0$ et que la série $\sum p_{2n}$ converge (on a noté $p_n = P(A_n)$ donc la série $\sum P(A_n)$ converge et la probabilité qu'une infinité des A_n se réalisent simultanément est nulle, c'est à dire que la probabilité de revenir à l'état initial 0 pour X_n une infinité de fois est nulle.

(b) Sans difficulté, on renvoie la valeur du dernier indice pour lequel $[X_k = 0]$.

```python
def simul_W(n,p):
    X=simul_traj_X(n,p)
    w=0
    for k in range(n+1):
        if X[k]==0 :
            w=k
    return w
```

(c) Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé.

(i) Soit $\omega \in \Omega$. Commençons par observer que

$$\{k \leq n : \ [X_k = 0]\} \subset \{k \leq n+1 : \ [X_k = 0]\}.$$

Lorsque deux ensembles sont inclus l'un dans l'autre, le maximum du premier ensemble est nécessairement inférieur ou égal à celui de l'autre: on a plus de valeurs à disposition et potentiellement des valeurs supérieures. Ainsi,

$$W_n(\omega) \leq W_{n+1}(\omega).$$

Il suit que si $\omega \in [W_{n+1} \leq t]$ alors, par transitivité $\omega \in [W_n \leq t]$ et la suite d'évènements $([W_n \leq t])$ est bien décroissante au sens de l'inclusion.

(ii) Montrons cette égalité d'ensembles par double inclusion.

- Supposons que $\omega \in [W_\infty \leq t]$. Soit $j \in \mathbb{N}$. Par le même argument que ci-avant, $W_j(\omega) \leq W_\infty(\omega) \leq t$. Donc $\omega \in [W_j \leq t]$. Ceci étant vrai pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a bien l'inclusion

$$[W_\infty \leq t] \subset \bigcap_{j=0}^{+\infty} [W_j \leq t].$$

- Réciproquement, supposons que $\omega \in \bigcap_{j=0}^{+\infty} [W_j \leq t]$. Si $\omega \notin [W_\infty \leq t]$, cela veut dire (par définition du max) qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $k_0 = \max\{j \in \mathbb{N} : [X_j(\omega) = 0]\} > t$ et donc $\omega \notin [W_{k_0} \leq t]$, ce qui est contradictoire. On a bien l'inclusion dans l'autre sens. Au final, on peut conclure que

$$[W_\infty \leq t] = \bigcap_{j=0}^{+\infty} [W_j \leq t]$$

(iii) D'après ce qui précède, et par théorème de limite monotone pour une suite décroissante d'évènements

$$\lim_{n \to +\infty} P(W_n \leq t) = P\left(\bigcap_{j=0}^{+\infty} [W_j \leq t]\right) = P(W_\infty \leq t),$$

ce qui est la définition du fait que (W_n) converge en loi vers W_∞.

(d) Une *estimation* (ou valeur approchée - ces notions seront clarifiées plus tard avec le Chapitre *Estimation* de la fin d'année) de l'espérance est donnée par la moyenne empirique d'un échantillon (de grande taille. Ici on prend 1000).

```python
def est_E_W(n,p):
    sample=[simul_W(n,p) for k in range(1000)]
    return np.mean(sample)
```

(12) Le but de cette question est de démontrer le lemme de Borel-Cantelli admis-ci dessus. On considère donc une suite d'évènements (A_n) d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que la série $\sum P(A_n)$ converge. On pose ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$.

(a) On observe que

$$B_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = A_n \cup \left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k \right) = A_n \cup B_{n+1}$$

donc on a bien $B_{n+1} \subset B_n$, c'est à dire que la suite d'évènements (B_n) est décroissante au sens de l'inclusion. On pose $B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$.

(b) Soit $\omega \in \Omega$. On montre l'équivalence souhaitée par double implication:

- $\Longrightarrow$. Si $\omega \in B$, alors, pour tout $n \geq 1$, on a $\omega \in B_n$ (c'est la définition de l'intersection). Et par définition de B_n et de la réunion, il existe donc $k \geq n$ tel que $\omega \in A_k$. Donc, on peut trouver un k arbitrairement grand tel que $\omega \in A_k$, c'est à dire que ω est bien dans une infinité de A_k.

- $\Longleftarrow$. Supposons que ω soit dans une infinité de A_k. Si $\omega \notin B$, alors alors il existe un $n \geq 1$, tel que $\omega \notin B_n$. Mais alors, pour tout $k \geq n$, on a $\omega \notin A_k$. Ce qui veut dire que ω peut au mieux appartenir à A_1, ..., A_{n-1}, c'est à dire à un nombre fini d'évènements A_k, ce qui est une contraction.

(c) On sait que si C et D sont deux évènements, alors $P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) \leq P(C) + P(D)$. Une récurrence immédiate permet de voir que la probabilité d'une somme d'évènements reste inférieure ou égale à la somme des probabilités de ces évènements et on a

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k \right) \leq \sum_{k=n}^{N} P(A_k)$$

mais la suite d'évènements $\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k \right)_N$ est croissante au sens de l'inclusion et, par limite monotone

$$\lim_{N \to \infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k \right) = P\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \right) = P(B_n).$$

On a donc bien, en passant à la limite $(N \to +\infty)$ que $P(B_n) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$.

(d) Comme la série de terme général $P(A_n)$ est supposée convergente, son reste tend vers 0, ou encore

$$\sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k) - \sum_{k=1}^{n-1} P(A_k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, par limite monotone qu'on peut appliquer car la suite (B_n) est décroissante au sens de l'inclusion,

$$P(B) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k \right) = \lim_{n \to +\infty} P(B_n) = 0$$

par théorème des gendarmes. Comme on a montré qu'appartenir à B était équivalent à être dans une infinité de A_k, on a bien montré que la probabilité d'être dans une infinité de A_k était nulle

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \right) = 0.$$