Math ECG 2. 2023-2024

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir surveillé n°3

Samedi 16 Décembre
Durée : 4 heures

Dans tout le sujet, on suppose déjà importées sous leur alias habituels les bibliothèques Python usuelles.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
```

Exercice 1

Partie 1 : Une loi de probabilité à deux paramètres

Toutes les variables aléatoires intervenant dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soient p, q deux réels de $]0;1[$ tels que $p+q=1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
On dispose d'une urne contenant des boules rouges en proportion p et des boules vertes en proportion q.
On effectue dans cette urne une suite de tirages d'une boule avec remise jusqu'à ce que l'on ait pioché n boules rouges.
On suppose que les résultats des différents tirages sont indépendants.

Pour tout i de $\mathbb{N}^*$, on note R_i (resp. V_i) l'événement : " le i-ième tirage amène une boule rouge (resp. verte) ". Ainsi, on a : $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \ P(R_i) = p$ et $P(V_i) = q$.
On note Z la variable aléatoire qui prend la valeur du nombre de boules vertes obtenues avant l'apparition de la $n-$ième boule rouge. On admet qu'on définit bien une variable aléatoire.

(1) Quel est, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z(\Omega)$?

(2) Dans cette question, et dans cette question seulement on suppose que $n = 1$.

(a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $\quad P([Z = k]) = pq^k$.

(b) (i) Montrer que la variable aléatoire $Z+1$ suit une loi géométrique de paramètre p.
(ii) En déduire que Z admet une espérance et que $E(Z) = \dfrac{q}{p}$.

(iii) En déduire que Z admet une variance et préciser sa valeur.

(3) Dans cette question, et dans cette question seulement, on suppose que $n = 2$.
On introduit alors les variables aléatoires X_1 et X_2 prenant pour valeurs respectives les rangs d'apparition de la première et de la deuxième boule rouge.

(a) Reconnaître la loi de X_1.
(b) Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, X_2).
(c) En déduire la loi marginale de X_2.
Montrer alors que X_2 admet une espérance que l'on explicitera.
(d) Exprimer Z en fonction de X_2.
En déduire que Z admet une espérance et qu'on a $E(Z) = \dfrac{2q}{p}$.

On dira qu'une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{BN}(n, p)$ si elle suit la même loi que Z. En particulier, on retiendra le résultat noté $(\star)$ suivant, utile pour la suite :
Si $X \hookrightarrow \mathcal{BN}(1, p)$, alors

$$(\star) \qquad X(\Omega) = \mathbb{N}; \quad \forall n \in \mathbb{N},\ P([X = n]) = pq^n \qquad \text{et} \qquad E(X) = \frac{q}{p}.$$

(4) Recopier et compléter la fonction Python suivante de sorte qu'elle renvoie une simulation d'une variable aléatoire $Z \hookrightarrow \mathcal{BN}(n, p)$.

```
def simul_BN(n, p):
    nR = 0
    t=1
    while ...........  :
        if rd.random() > 1-p :
            nR=nR+1
        t=........
    return ...........
```

Partie 2 : Un calcul statistique

Soit $N \in \mathbb{N}$. On rappelle que, si $(x_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ et $(y_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ sont deux séries statistiques,

- on désigne par $\overline{x}$ (resp. $\overline{y}$) la moyenne empirique associée à (x_i) (resp. à (y_i));
- σ_x et σ_y désignent les écarts-types empiriques des séries (x_i) et (y_i).
- $\mathrm{cov}(x, y)$ la covariance empirique de la série statistique double (x_i, y_i);
- $\rho(x, y)$ le coefficient de corrélation linéaire empirique de cette même série statistique double.

(5) Rappeler les formules mathématiques définissant $\overline{x}$, σ_x^2 et $\mathrm{cov}(x, y)$ en fonction des x_i, des y_i et de n.
Rappeler les formules de König-Huyguens qui permettent de reformuler σ_x^2 et $\mathrm{cov}(x, y)$.
(6) Recopier et compléter la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie la covariance empirique d'un couple de série statistique (x, y) en argument

```
def covariance(x,y) :
    prod = x*y
    return ....................
```

Soient X_1, X_2 et X_3 trois variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{BN}(1, p)$.
On pose : $T = X_1 + X_2$ et $W = X_2 + X_3$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. On souhaite construire deux séries statistiques (t_i) et (w_i) associées aux variables T et W (définies plus haut) et calculer leur coefficient de corrélation linéaire empirique.

(7) (a) Recopier et compléter la fonction Python suivante de sorte qu'elle renvoie un $N-$échantillon du couple (T, W) (c'est à dire un tableau à deux lignes qui sont respectivement des réalisations indépendantes des variables de T et W).

```
def sample_TW(p,N) :
    X_1 = np.zeros(N)
    X_2 = np.zeros(N)
    X_3 = np.zeros(N)
    for i in range(N) :
        X_1[i] = .............
        X_2[i] = .............
        X_3[i] = .............
    return [ ....... , ....... ]
```

(b) On ajoute les commandes suivantes sont l'exécution produit l'affichage ci-après. Détailler ce qu'elles font. Que peut-on conjecturer ? (On rappelle que la commande `np.arange(a,b,s)` crée une liste de valeurs entre a et b avec un pas de s.)

```
N=1000
for q in np.arange(0.1, 1, 0.2)
   [T, W] = sample_TW(p, N)
   r = covariance(T,W)/np.sqrt(covariance(T,T)*covariance(W,W))
   print(r)
```

Affichage Python

```
> > >
0.5082364877696511
0.4924050605018343
0.49424137980025185
0.5048354509961391
0.5350220088999194
```

(8) (a) Montrer que $\text{cov}(T, W) = V(X_2)$. Les variables aléatoires T et W sont-elles indépendantes?
(b) Montrer que $V(T) = V(W) = 2V(X_2)$ puis calculer le coefficient de corrélation linéaire $\rho(T, W)$ des variables aléatoires T et W.
Votre conjecture de la Question 7b est-elle vérifiée ?

Partie 3 : Loi du maximum

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{BN}(1, p)$.
On pose : $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

(9) Montrer que la loi du couple (U, V) est donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P([U = i] \cap [V = j]) = \begin{cases} 2p^2q^{i+j}, & \text{si } i > j \\ 0, & \text{si } i < j \\ p^2q^{2i}, & \text{si } i = j \end{cases}$$

(10) (a) Montrer que : $\forall j \in \mathbb{N},\ P([V = j]) = \displaystyle\sum_{i=j}^{+\infty} P([U = i] \cap [V = j])$.
(b) En déduire que : $\forall j \in \mathbb{N},\ P([V = j]) = p\,(1 + q)\,q^{2j}$.
(c) En déduire que V suit la loi $\mathcal{BN}\left(1, (1 - q^2)\right)$.

(d) En déduire que V admet une espérance et que $E(V) = \dfrac{q^2}{1-q^2}$.

(11) (a) Justifier que $U + V = X + Y$.
(b) En déduire que U admet une espérance et expliquer (sans faire les calculs) comment on pourrait obtenir sa valeur.

Partie 4 : Partie entière d'une variable à densité

Soient S_1 et S_2 deux variables aléatoires indépendantes, et suivant toutes les deux la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $T_1 = \lfloor S_1 \rfloor$ la partie entière de S_1 et $T_2 = \lfloor S_2 \rfloor$ la partie entière de S_2. On a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ (T_1 = k) = (k \leq S_1 < k+1) \quad \text{et} \quad (T_2 = k) = (k \leq S_2 < k+1).$$

(12) (a) Rappeler l'expression de la fonction de répartition de S_1.
(b) Calculer $P(T_1 = k)$, pour $k \in \mathbb{N}$, et en déduire que T_1 suit la loi $\mathcal{BN}\left(1, p_\lambda\right)$ où $p_\lambda = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$.
On remarquera que T_2 suit la même loi que T_1.

(13) (a) Justifier que T_1 et T_2 sont indépendantes.
(b) On note $q_\lambda = 1 - p_\lambda$. Montrer que : $P(T_1 = T_2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_\lambda^2 q_\lambda^{2k}$.
(c) Calculer alors $P(T_1 = T_2)$ en fonction de p_λ et q_λ puis vérifier que $P(T_1 = T_2) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{1+\mathrm{e}^{-\lambda}}$.

Exercice 2

On considère l'endomorphisme g de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

(1) (a) Expliciter A^2 puis établir que $A^4 = I$.
(b) En déduire les valeurs propres possibles de A. La matrice A est-elle inversible?
(c) Donner une base (u) de $\mathrm{Ker}\,(g - \mathrm{Id})$. En déduire une (première) valeur propre de A.
(d) Montrer que A n'admet pas d'autre valeur propre.
(e) La matrice A est-elle diagonalisable ?

(2) (a) Quelle est la matrice de g^2 dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?
(b) Résoudre l'équation $A^2X = -X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}$ et en déduire une base $(v; w)$ de $\mathrm{Ker}\,(g^2 + \mathrm{Id})$.
(c) Montrer que la famille $(u; v; w)$ forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
(d) Écrire la matrice de g^2 dans la base $(u; v; w)$.
(e) La matrice A^2 est-elle diagonalisable ?

(3) On considère maintenant une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que si M est diagonalisable, alors M^2 l'est aussi. Que dire, au vu de ce qui précède, de la réciproque de cette implication ?

(4) On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par leur premiers termes $u_0 = a, v_0 = b, w_0 = c$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3u_{n+1} & = & u_n - 2v_n + 2w_n \\ 3v_{n+1} & = & 2u_n - 3v_n + 2w_n \\ 3w_{n+1} & = & 2u_n - 2v_n + w_n \end{array} \right.$$

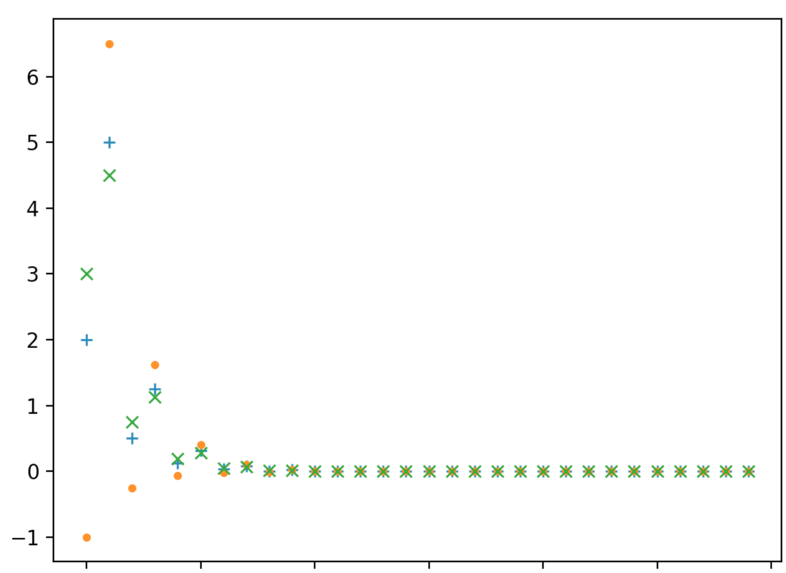
(a) (i) Recopier et compléter la fonction Python suivante qui renvoie les valeurs de u_n, v_n et w_n pour un entier n en argument.

```
def suites(n) :
    u=a
    v=b
    w=c
    for k in range(n) :
        x=.........
        y=..........
        z=..........
        u, v, w = 1/3*x, 1/3*y, 1/3*z
   return u,v,w
```

(ii) On complète par les instructions suivantes dont l'exécution produit la figure ci-contre. Que peut-on conjecturer ?

```
U=np.zeros(30)
V=np.zeros(30)
W=np.zeros(30)
for k in range(30):
    U[k],V[k],W[k]=suites(k)
N=[k for k in range(30)]
plt.plot(N, U, '+')
plt.plot(N, V, '.')
plt.plot(N, W, 'x')
plt.show()
```

Affichage Python



(b) Notant, pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, déterminer une matrice B telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $U_{n+1} = BU_n$.

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n = B^n U_0$.

(d) Montrer que les trois suites convergent vers une même limite ℓ que l'on précisera.

Exercice 3

Partie 1 : Étude d'une (suite de) fonction(s)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}.$$

(1) (a) Étudier les variations de la fonction g_0.
On précisera la limite de g_0 en $+\infty$, ainsi que l'équation de la tangente en 0.

(b) Donner l'allure de la courbe représentative de g_0.

(2) (a) Pour $n \geqslant 1$, justifier que g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et montrer que, pour tout $x \geq 0$,

$$g_n'(x) \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad n \geqslant 2\ln(1+x).$$

En déduire les variations de la fonction g_n lorsque $n \geqslant 1$.

(b) Calculer soigneusement $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x)$.

(c) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, g_n admet un maximum sur $[0, +\infty[$ qui vaut

$$M_n = \left(\frac{n}{2e}\right)^n$$

et déterminer la limite de M_n lorsque n tend vers $+\infty$.

(d) Déterminer $\alpha > 1$ tel que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$g_n(x) = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \quad x \to +\infty.$$

Partie 2 : Étude d'une suite d'intégrales

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t.$$

(3) Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.

(4) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale I_n est convergente.

(5) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} = (n+1)I_n.$$

(6) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = n!.$$

Partie 3 : Une suite de variables aléatoires à densité

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{g_n(x)}{n!}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(7) Montrer que f_n peut être considérée comme une densité de probabilité.
On note X_n une v.a de densité f_n et F_n sa fonction de répartition.

(8) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x < 0$, $F_n(x)$.

(9) Déterminer, pour $x \geq 0$, $F_0(x)$.

(10) Soit $x \geqslant 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}.$$

(11) En déduire une expression de $F_n(x)$ pour $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ faisant intervenir une somme qu'on ne cherchera pas à calculer.

(12) Pour $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(13) (KHÛBES) La suite de variables aléatoires (X_n) converge-t-elle en loi?

(14) On introduit alors la variable $Y_n = \ln(1 + X_n)$.

(a) Justifier que Y_n est bien définie, puis que $Y_n(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$.

(b) Justifier que Y_n admet une espérance et la calculer.

(c) Justifier que Y_n admet une variance et la calculer.

(d) On note H_n la fonction de répartition de Y_n. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$H_n(x) = F_n(e^x - 1).$$

(e) En déduire que Y_n est une variable à densité et préciser une densité de Y_n.

(f) Reconnaître la loi de Y_0. Déduire de la **Partie 2**. que Y_0 admet, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, un moment d'ordre k et préciser sa valeur.