Devoir surveillé n°3

Solution

Exercice 1

J'ai déjà posé cet exercice (que j'avais emprunté à mon collègue Sofiane Akkouche de Bayonne) où la loi $\mathcal{BN}(n,q)$ était nommée loi binomiale négative de paramètre p et on se limitait à $n=1$. J'ai ajouté ici les questions relatives à $n=2$ et un peu de Python. *Je renvoie donc à sa solution (en cliquant ici pour les questions reprises et on ne fait figurer que les nouvelles questions.*

Partie 1 : Une loi de probabilité à deux paramètres

Toutes les variables aléatoires intervenant dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soient p, q deux réels de $]0;1[$ tels que $p+q=1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
On dispose d'une urne contenant des boules rouges en proportion p et des boules vertes en proportion q.
On effectue dans cette urne une suite de tirages d'une boule avec remise jusqu'à ce que l'on ait pioché n boules rouges.
On suppose que les résultats des différents tirages sont indépendants.

Pour tout i de $\mathbb{N}^*$, on note R_i (resp. V_i) l'événement : " le i-ième tirage amène une boule rouge (resp. verte) ". Ainsi, on a : $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(R_i)=p$ et $P(V_i)=q$.
On note Z la variable aléatoire qui prend la valeur du nombre de boules vertes obtenues avant l'apparition de la $n-$ième boule rouge. On admet qu'on définit bien une variable aléatoire.

(1) On peut n'avoir obtenu aucune boule verte (c'est à dire les n boules rouges consécutivement) comme on peut en avoir un nombre arbitrairement grand avant d'avoir eu toutes nos boules rouges donc $Z(\Omega)=\mathbb{N}$.

(3) Dans cette question, et dans cette question seulement, on suppose que $n=2$.
On introduit alors les variables aléatoires X_1 et X_2 prenant pour valeurs respectives les rangs d'apparition de la première et de la deuxième boule rouge.

(a) On reconnait pour X_1 le temps d'attente du premier succès (obtenir la boule rouge) lors de répétitions identiques et indépendantes du même schéma de Bernoulli. Ainsi, X_1 suit donc une loi géométrique de paramètre p.

(b) Observons que si $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$, alors $X_2(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$. Soit donc $(k, j) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)$. Premièrement, si $j \leq k$, alors $P([X_1 = k] \cap [X_2 = j]) = 0$ car la seconde boule rouge arrive nécessairement après la première. Si $j > k$, alors

$$\begin{aligned} P([X_1 = k] \cap [X_2 = j]) &= P\left(V_1 \cap ... \cap V_{k-1} \cap R_k \cap V_{k+1} \cap ... \cap V_{j-1} \cap R_j\right) \\ &= \prod_{i=1}^{k-1} P(V_i) \times P(R_k) \times \prod_{i=k+1}^{j-1} P(V_i) \times P(R_j) \qquad \text{par indépendance des tirages} \\ &= p^2 q^{j-2} \end{aligned}$$

Au final

$$P([X_1 = k] \cap [X_2 = j]) = \begin{cases} 0, & \text{si } j \leq k \\ p^2 q^{j-2}, & \text{si } j > k \end{cases}$$

(c) Soit $j \geq 2$. Par la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{[X_1 = k] : \ k \in \mathbb{N}^*\}$, on a

$$\begin{aligned} P(X_2 = j) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([X_1 = k] \cap [X_2 = j]) \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} P([X_1 = k] \cap [X_2 = j]) = \sum_{k=1}^{j-1} p^2 q^{j-2} \\ &= (j-1) p^2 q^{j-2} \end{aligned}$$

(d) On sait que X_2 admet une espérance si et seulement si la série $\sum jP(X_2 = j)$ converge. Or,

$$jP(X_2 = j) = j(j-1)p^2 q^{j-2}$$

et on reconnait le multiple du terme général d'une série géométrique dérivée d'ordre 2, de raison q (avec $0 < q < 1$) donc convergente. Ainsi, X_2 admet une espérance et

$$E(X_2) = p^2 \sum_{j=2}^{+\infty} j(j-1) q^{j-2} = p^2 \times \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2}{p}.$$

(e) Comme Z représente ici le nombre de boules vertes tirées avant d'obtenir deux rouges, on a $Z = X_2 - 2$. Par linéarité de l'espérance, Z admet une espérance et

$$E(Z) = E(X_2) - 2 = \frac{2}{p} - 2 = \frac{2 - 2p}{p} = \frac{2(1-p)}{p} = \frac{2q}{p}.$$

(4) La variable `nR` compte le nombre de boules rouges obtenues. On pioche donc jusqu'à en avoir n, en augmentant à chaque fois le nombre `t` de tirages de 1. On récupère alors le nombre de vertes en soustrayant n au nombre de tirages.

```python
def simul_BN(n, p):
    nR = 0
    t=1
    while nR < n  :
        if rd.random() > 1-p :
            nR=nR+1
        t=t+1
    return t-n
```

Partie 2 : Un calcul statistique

Soit $N \in \mathbb{N}$. On rappelle que, si $(x_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ et $(y_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ sont deux séries statistiques,

- on désigne par $\overline{x}$ (resp. $\overline{y}$) la moyenne empirique associée à (x_i) (resp. à (y_i));
- σ_x et σ_y désignent les écarts-types empiriques des séries (x_i) et (y_i).
- $\text{cov}(x,y)$ la covariance empirique de la série statistique double (x_i, y_i);
- $\rho(x,y)$ le coefficient de corrélation linéaire empirique de cette même série statistique double.

(5) D'après le cours,

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

et

$$\text{cov}(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}).$$

Par König-Huyguens,

$$\text{cov}(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{xy},$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2 = \text{cov}(x,x).$$

(6) On applique simplement la formule ci-dessous avec la commande `np.mean()` qui renvoie la moyenne des éléments d'une liste en argument.

```
def covariance(x,y) :
    prod = x*y
    return np.mean(prod)-np.mean(x)*np.mean(y)
```

Soient X_1, X_2 et X_3 trois variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{BN}(1,q)$.
On pose : $T = X_1 + X_2$ et $W = X_2 + X_3$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. On souhaite construire deux séries statistiques (t_i) et (w_i) associées aux variables T et W (définies plus haut) et calculer leur coefficient de corrélation linéaire empirique.

(7) (a) La fonction `simul_BN()` permet de simuler chacune des variables X_i.

```
def sample_TW(p,N) :
    X_1 = np.zeros(N)
    X_2 = np.zeros(N)
    X_3 = np.zeros(N)
    for i in range(N) :
        X_1[i] = simul_BN(1, p)
        X_2[i] = simul_BN(1, p)
        X_3[i] = simul_BN(1, p)
    T= [X_1[i]+X_2[i] for i in range(N)]
    W=[X_2[i]+X_3[i] for i in range(N) ]
    return T, W
```

(b) La formule pour r calcule le coefficient de corrélation linéaire des séries statistiques (t_i) et (w_i) obtenues par simulation (pour un échantillon de taille 1000) avec cinq valeurs différentes de q entre 0.1 et 0.9. On voit que le résultat affiché semble toujours proche de 1/2 et ne dépendrait donc pas de la valeur de q.

Exercice 2

Le début de cet exercice reprend un exercice du sujet ***EDHEC 2012****. La suite de l'exercice, avec les suites récurrentes, est un ajout de votre serviteur.*

On considère l'endomorphisme g de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

(1) (a) Ces calculs sont faciles, il suffit juste de les faire

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^4 = A^2 \cdot A^2 = I.$$

(b) Il est alors clair que $X^4 - 1$ est polynôme annulateur de A. Ainsi, les valeurs propres de A sont à chercher **parmi** les racines de $X^4 - 1$ qui sont 1 et -1:

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{-1; 1\}.$$

Comme 0 ne peut pas être valeur propre, A est inversible.

(c) On cherche une base en résolvant le système correspondant:

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - I) &\iff \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y + z & = & 0 \\ 2x - 6y + 4z & = & 0 \\ 3x - 8y + 5z & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff x = y = z \\ &\iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on a donc

$$\mathrm{Ker}(A - I) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

En particulier, 1 est bien valeur propre de A et, en prenant $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a le vecteur cherché (et $\dim(E_1) = 1$).

(d) La seule autre valeur propre possible est -1. Vérifions ce qu'il se passe.

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A + I) &\iff \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y - z & = & 0 \\ 2x - 4y + 4z & = & 0 \\ 3x - 8y + 7z & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff x = y = z = 0 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\mathrm{Ker}(A+I) = \{0\}.$$

On voit en particulier que -1 n'est pas valeur propre de A et A a pour unique valeur propre 1.

(e) Montrons que A n'est pas diagonalisable par l'absurde. Si A était diagonalisable, il existerait une matrice D diagonale et une matrice P inversibles telles que $A = PDP^{-1}$. D ayant le même spectre que A, elle serait donc diagonale avec une seule valeur sur la diagonale - égale à 1 - donc $D = I$. Mais on aurait alors

$$A = PIP^{-1} = I,$$

ce qui n'est pas le cas. Donc A n'est pas diagonalisable.

(2) (a) Comme A est la matrice représentant g dans la base canonique, A^2 (qu'on a calculée ci-avant) représente g^2 dans la base canonique

$$\mathrm{Mat}(g, \mathcal{B}) = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) On résout $A^2 X = -X$:

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A^2+I) &\iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff 2x - 2y + 2z = 0 \\ &\iff X = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les deux vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

engendrent donc $\mathrm{Ker}(A^2+I)$. Étant de plus non colinéaires, ils en forment donc une base. On les note respectivement v et w.

(c) Comme le cardinal de la famille correspond à la dimension de l'espace, il suffit de vérifier que la famille est libre pour qu'elle forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta v + \gamma w = 0 &\iff \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + \beta - \gamma & = & 0 \\ \alpha + \beta & = & 0 \\ \alpha + \gamma & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \alpha = \beta = \gamma = 0 \end{aligned}$$

et la famille est bien libre et forme donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(d) Par définitions des vecteurs u, v, w on a $g^2(u) = g(g(u)) = g(u) = u$, $g^2(v) = -v$ et $g^2(w) = -w$. Il suit que la matrice de g^2 dans cette nouvelle base est donnée par

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et c'est une matrice diagonale.

(e) D et A^2 représentent le même endomorphisme (g^2) dans deux bases différentes et sont donc semblables. A^2 étant semblable à une matrice diagonale, elle est diagonalisable.

(3) Si M est diagonalisable alors il existe une matrice P inversible et une matrice Δ diagonale telles que $M = P\Delta P^{-1}$. Mais alors $M^2 = P\Delta^2 P^{-1}$ et comme Δ est diagonale, Δ^2 l'est aussi. Ainsi, M^2 est semblable à une matrice diagonale et donc diagonalisable.
La première partie vise à montrer que la réciproque est fausse; en effet bien que A^2 soit diagonalisable, A ne l'est pas.

(4) On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par leur premiers termes $u_0 = a, v_0 = b, w_0 = c$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} 3u_{n+1} &= u_n - 2v_n + 2w_n \\ 3v_{n+1} &= 2u_n - 3v_n + 2w_n \\ 3w_{n+1} &= 2u_n - 2v_n + w_n \end{cases}$$

(a) (i) Les variables auxiliaires x, y et z sont là pour calculer le terme temporaire sans *écraser* l'information et perdre la valeur dont on a besoin pour les termes des autres suites.

```
def suites(n) :
    u=a
    v=b
    w=c
    for k in range(n) :
        x=u-2*v+2*w
        y=2*u-3*v+2*w
        z=2*u-2*v+w
        u, v, w = 1/3*x, 1/3*y, 1/3*z
   return u,v,w
```

(ii) On a représenté graphiquement les 30 premiers termes des trois suites qui semblent toutes trois converger vers 0.

(b) Il est clair que la matrice cherchée est $B = \dfrac{1}{3}A^2$.

(c) C'est une récurrence qu'on pourrait qualifier d'immédiate mais qu'on rédige.

- initialisation. Pour $n = 0$, on a bien $U_0 = B^0 U_0$.
- hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $U_n = B^n U_0$. Alors,

$$U_{n+1} = BU_n \underset{\text{HR}}{=} BB^n U_0 = B^{n+1} U_0$$

et c'est tout bon.

(d) Au vu de ce qu'on a trouvé pour B, et du caractère diagonalisable de la matrice A^2, il existe une matrice Q inversible (matrice de passage de la base canonique vers la base (u, v, w))

telle que

$$B^n = \left(\frac{1}{3}A^2\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^n Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{-1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{-1}{3}\right)^n \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Comme $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $\left(\frac{-1}{3}\right)^n$ sont des quantités qui tendent vers 0, toute combinaison linéaire de ces deux quantités va aussi tendre vers 0. Et comme on a vu que $U_n = B^n U_0$, les composantes de U_n sont bien des combinaisons linéaires de $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et de $\left(\frac{-1}{3}\right)^n$ et tendent toutes trois vers 0, ce qui est aussi la conjecture émise après interprétation de l'exécution du programme Python.

Exercice 3

*Cet exercice provient du sujet **ECRICOME 2016**.*
Une solution, proposée par Martin Canu et Laurent Carrot est disponible en cliquant sur ce lien.