Math ECG 2. 2023-2024

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir surveillé n°3 - sujet B

Samedi 16 Décembre
Durée : 4 heures

Dans tout le sujet, on suppose déjà importées sous leur alias habituels les bibliothèques Python usuelles.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
```

Exercice 1

On considère deux réels a et b ainsi que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

(1) (a) Montrer que $a = b$ alors la matrice A ne possède qu'une seule valeur propre.
    (b) En déduire, par l'absurde, que, si $a = b$, A n'est pas diagonalisable.

(2) On suppose dans cette question que $a \neq b$.

   (a) Quelles sont les valeurs propres de A? En déduire que A est diagonalisable.
   (b) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telle que $AP = PD$. *On rédigera scrupuleusement cette réponse en expliquant comment sont construites les deux matrices.*

(3) Soit $q \in]0;1[$. On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes (définies sur un même espace probabilisé qu'on ne précise pas ici) de même loi géométrique $\mathcal{G}(q)$.

   (a) Calculer $P(X = Y)$.
   (b) On considère la matrice aléatoire $A(X,Y) = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$.

      (i) Déterminer la probabilité p que $A(X,Y)$ ne soit pas diagonalisable.
      (ii) On note M la variable aléatoire qui prend la valeur de la plus grande valeur propre de $A(X,Y)$. Déterminer la loi de M. Justifier alors que M admet une espérance et déterminer sa valeur.

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(1) Déterminer le rang de A.

(2) On dispose du programme suivant donc le résultat d'exécution est affichée ci-après. En justifiant soigneusement le raisonnement, déterminer le spectre de A (*On commencera par expliciter la matrice B.*)

```
B=np.array([[1]*3]*3)
for i in range(3):
    for j in range(3):
        if (-1)**(i+j)==-1:
            B[i,j]=B[i,j]-1
for i in range(3):
    if np.sum(B[i])!=2 :
        B[i,i]=B[i,i]+1

print(np.dot(B,B-2*np.eye(3)))
```

Affichage Python

```
>>>
[[0.  0.  0.]
 [0.  0.  0.]
 [0.  0.  0.]]
```

(3) La matrice A est elle diagonalisable ?

(4) Expliciter A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(5) Déterminer l'ensemble des réels x tels que $(A - xI)^2 = I$.

Exercice 3

On considère, dans cet exercice, deux variables aléatoires X et Y (définies sur le même espace probabilisé qu'on ne précise pas ici) à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose, pour tout l'exercice, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) > 0$ et que la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$.

(1) Établir que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P_{[X=n]}(Y = k)P(X = n)$.

(2) Montrer, sans déterminer explicitement leurs lois, que $X - Y$ et Y suivent la même loi.

(3) À l'aide de la Question (1), montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P(Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(X = n)$.

(4) On suppose, dans cette question que $Z = Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$.

(a) Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k) - P(Y = k + 1)$.
(b) En déduire la loi de X.
(c) Vérifier que X admet bien une espérance et la calculer.
(d) Montrer que $X - Y$ et Y sont indépendantes.
(e) En déduire la valeur de $\mathrm{cov}(X, Y)$.

Problème

Partie 1 - Un problème de Cauchy et deux fonctions périodiques

Les résultats de cette partie sur les fonctions s *et* c *pourront être admis et utilisés dans la suite car ils ne sont pas toujours faciles à obtenir.*

On considère le problème de Cauchy

$$(\mathcal{P}) \qquad \left\{\begin{array}{rcl} y''+y & = & 0 \\ y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 1 \end{array}\right.$$

(1) Que dit le cours quant à la résolution de ce problème ?

On **admet** l'existence et l'unicité d'une fonction $\mathrm{s}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ solution de $(\mathcal{P})$. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{c}(t) = \mathrm{s}'(t)$.

(2) **Première propriétés des fonctions** s **et** c**.**

(a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{c}'(t) = -\mathrm{s}(t)$.

(b) On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h(t) = \mathrm{c}^2(t) + \mathrm{s}^2(t)$. Montrer que h est une fonction constante.

(c) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{c}^2(t) + \mathrm{s}^2(t) = 1$.

(d) Montrer que c et s sont bornées sur $\mathbb{R}$.

(3) Le but de cette question est de montrer qu'il existe $\theta > 0$ tel que $\mathrm{s}(\theta) = 0$.
On raisonne par l'absurde en supposant donc que, pour tout $\theta > 0$, on a $\mathrm{s}(\theta) \neq 0$.

(a) Montrer que, pour tout $\theta > 0$, on a $\mathrm{s}(\theta) > 0$ et $\mathrm{s}''(\theta) < 0$.

(b) (i) Montrer que $\mathrm{c}(t)$ admet une limite finie ℓ lorsque t tend vers $+\infty$.
(ii) Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{s}(t) = \displaystyle\int_0^t \mathrm{c}(x)\mathrm{d}x$.
(iii) Montrer par l'absurde (et par disjonction de cas) que $\ell = 0$.

(c) Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $\mathrm{c}(t) \geq 0$.

(d) Montrer que $\mathrm{s}(t)$ admet une limite finie γ lorsque t tend vers $+\infty$.

(e) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{c}(t) = 1 - \displaystyle\int_0^t \mathrm{s}(x)\mathrm{d}x$.

(f) Conclure.

On a donc montré que s s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$. On **admettra** que la plus petite valeur de $\theta > 0$ telle que $\mathrm{s}(\theta) = 0$ est π, ainsi

$$\mathrm{s}(\pi) = 0, \quad \text{et} \quad \forall t \in]0, \pi[, \ \mathrm{s}(t) \neq 0.$$

En travaillant avec les conditions de $(\mathcal{P})$ vérifiées par s, on montre facilement et on **admettra** que s est une fonction impaire et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{s}(\pi - t) = \mathrm{s}(t)$.

(4) (a) Montrer que c est une fonction paire.

(b) Montrer que la fonction $\varphi: \ t \mapsto \mathrm{s}(t + 2\pi)$ est solution de $(\mathcal{P})$. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{s}(t + 2\pi) = \mathrm{s}(t)$.
Ainsi, s est *périodique*, de période 2π.

(c) Montrer que c est périodique de période 2π.

(d) (i) Montrer qu'il existe un unique $\theta \in]0, \pi[$ tel que $\mathrm{c}(\theta) = 0$.
(ii) Montrer que s admet en θ son maximum sur $[0, \pi]$.
(iii) Montrer que $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. (*On pourra montrer que* s *est maximale en* $\pi - \theta$.)
(iv) On pose, pour $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) = \mathrm{c}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$. Montrer que ψ est solution de $(\mathcal{P})$. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{c}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \mathrm{s}(t).$$

(5) Montrer que s réalise une bijection de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$ et que c réalise une bijection de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$.

Partie 2 - Une suite d'intégrales

On considère la suite d'intégrales (W_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{c}^n(t)\mathrm{d}t,$$

où c est la fonction étudiée dans la partie précédente. Celle-ci étant continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, la suite (W_n) est bien définie.

(6) Calculer W_0 et W_1.

(7) À l'aide d'un changement de variable affine et de la Question (4(d)iv) de la Partie 1, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{s}^n(t)\mathrm{d}t$, où s est la fonction étudiée dans la Partie 1.

(8) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \geq 0$ et que (W_n) est décroissante.

(9) À l'aide d'une intégration par parties et de la Question (2c) de la Partie 1, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}.$$

En déduire que

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n.$$

(10) On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, $J_n = (n+1)W_nW_{n+1}$.
En calculant $J_{n+1} - J_n$, montrer que la suite (J_n) est constante et préciser sa valeur.

(11) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'encadrement

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

(12) Montrer que $W_{n+1} \sim W_n$, lorsque $n \to +\infty$. Obtenir finalement que

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}},\ n \to +\infty.$$

Partie 3 - L'intégrale de Gauss

Le but de cette partie est d'évaluer (sans faire appel au résultat admis du cours) l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}t$.

(13) Justifier rigoureusement la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x$.

(14) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1[$, $\ln(1-x) \leq -x$.

(15) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Déduire de la question précédent que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} \mathrm{d}x.$$

(16) Montrer de même qu'on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} \mathrm{d}x \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x$$

(17) À l'aide du changement de variable $x = \sqrt{n}\mathrm{c}(u)$, montrer que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x = \sqrt{n} W_{2n+1}.$$

On **admet** que le changement de variable $x = \sqrt{n}\frac{\mathrm{s}(u)}{\mathrm{c}(u)}$ (est licite et) permet d'obtenir

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x = \sqrt{n} W_{2n-2}.$$

On a donc l'encadrement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt{n} W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} \mathrm{d}x \leq \sqrt{n} W_{2n-2}.$$

(18) À l'aide de la Question (12) de la Partie 2, conclure quant à la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x$.

(19) Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. À l'aide de la question précédente et d'un changement de variable affine, **montrer** que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}t = \sigma\sqrt{2\pi}.$$

(20) Soit a un réel strictement positif et b et c deux réels quelconques. Trouver trois réels α, m et σ, en fonction de a, b et c tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{(t-m)^2}{2\sigma^2} + \alpha = at^2 + bt + c.$$

(21) En déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(at^2 + bt + c)) \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).$$