Math ECG 2. 2023-2024

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir surveillé n°3 - sujet B

Solution

Dans tout le sujet, on suppose déjà importées sous leur alias habituels les bibliothèques Python usuelles.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
```

Exercice 1

On considère deux réels a et b ainsi que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

(1) (a) La matrice A est triangulaire; ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux. Si $a = b$, on a alors une seule valeur propre $\mathrm{Sp}(A) = \{a\}$.

(b) Si A était diagonalisable, il existerait une matrice D diagonale et une matrice P inversibles telles que $A = PDP^{-1}$. D ayant le même spectre que A, elle serait donc diagonale avec une seule valeur sur la diagonale donc $D = aI$. Mais on aurait alors

$$A = PaIP^{-1} = aI,$$

ce qui n'est pas le cas. Donc A n'est pas diagonalisable.

(2) On suppose dans cette question que $a \neq b$.

(a) Comme énoncé précédemment, A admet pour valeurs propres ses deux éléments diagonaux a et b qui comme supposés distincts donnent donc deux valeurs propres distinctes pour A qui est une matrice de taille 2 : d'après un résultat du cours, A est donc diagonalisable.

(b) La matrice D cherchée est sans difficulté la matrice $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

Pour trouver P il faut trouver la matrice de passage vers une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ formée d'un vecteur de propre de A associé à a et d'un vecteur propre de A associé à b.
Il faut donc résoudre les équations correspondantes.

On peut quand même voir que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à a sans calcul directement sur la matrice. On résout juste l'autre équation

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - bI) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} (a-b)x + y & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff y = (b-a)x$$
$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ (b-a)x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$$

On a donc $E_b(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}\right)$ et $E_a(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Les deux vecteurs qu'on vient de trouver pour former une base de chaque sous-espace propre forment, par principe de concaténation, une base de $M_{2,1}(\mathbb{R})$. En posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{pmatrix}$$

la matrice de passage de la base canonique vers cette nouvelle base de vecteurs propres, la formule de changement de base donne bien $A = PDP^{-1}$ ou encore $AP = PD$.

(3) Soit $q \in]0;1[$. On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes (définies sur un même espace probabilisé qu'on ne précise pas ici) de même loi géométrique $\mathcal{G}(q)$.

(a) D'après la formule des probabilités totales appliquées au s.c.e $\{[X = k] : k \in \mathbb{N}^*\}$, on a

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([X = Y] \cap [X = k]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([Y = k] \cap [X = k]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y = k) \qquad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} p(1-p)^{k-1} \\ &= p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left((1-p)^2\right)^{k-1} \\ &= p^2 \times \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p^2}{p(2-p)} \\ &= \frac{p}{2-p}. \end{aligned}$$

(b) On considère la matrice aléatoire $A(X,Y) = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$.

(i) D'après ce qu'on a vu ci-avant, $A(X,Y)$ est diagonalisable si seulement si $X \neq Y$ donc

$$\begin{aligned} P\left(A(X,Y) \text{ non diagonalisable }\right) &= P(X = Y) \\ &= \frac{p}{2-p} \end{aligned}$$

(ii) D'après tout ce qui précède, comme $\mathrm{Sp}(A(X,Y)) = \{X, Y\}$, il suit que

$$M = \max(X,Y).$$

On a déjà vu comment obtenir la loi du max de deux variables aléatoires indépendantes, de même loi géométrique. Naturellement, $M(\Omega) = \mathbb{N}^*$ car X et Y prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On procède comme suit. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
P(M \leq k) &= P([X \leq k] \cap [Y \leq k]) \\
&= P(X \leq k)P(Y \leq k) \qquad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\
&= P(X \leq k)^2 \qquad \text{car les deux v.a suivent la même loi} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{k} P(X=j)\right)^2 \\
&= \left(\sum_{j=1}^{k} p(1-p)^{j-1}\right)^2 \\
&= p^2 \times \left(\frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)}\right)^2 \\
&= \left(1-(1-p)^k\right)^2
\end{aligned}$$

Et, comme $P(M=k) = P(M \leq k) - P(M \leq k-1)$, on obtient

$$\begin{aligned}
P(M=k) &= \left(1-(1-p)^k\right)^2 - \left(1-(1-p)^{k-1}\right)^2 \\
&= p(1-p)^{k-1}\left(2-(2-p)(1-p)^{k-1}\right) \\
&= 2p(1-p)^{k-1} - p(2-p)\left((1-p)^2\right)^{k-1}
\end{aligned}$$

On sait que M admet une espérance si et seulement si la série $\sum kP(M=k)$ converge (absolument). Or,

$$\begin{aligned}
kP(M=k) &= k\left(2p(1-p)^{k-1} - p(2-p)\left((1-p)^2\right)^{k-1}\right) \\
&= 2p \times k(1-p)^{k-1} - p(2-p) \times k\left((1-p)^2\right)^{k-1}
\end{aligned}$$

et on reconnait une combinaison linéaire de termes généraux de séries géométriques (décalées) dérivées d'ordre 1 (de raison $1-p$ et $(1-p)^2$) convergentes. Ainsi, M admet une espérance et

$$\begin{aligned}
E(M) &= 2p \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} - p(2-p) \times \frac{1}{(1-(1-p)^2)^2} \\
&= \frac{2}{p} - \frac{1}{p(2-p)} \\
&= \frac{3-2p}{p(2-p)}
\end{aligned}$$

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(1) Le rang de la matrice est la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses colonnes. On voit que la première et la troisième sont colinéaires et que la seconde est nulle.
Il est donc clair que $\text{rg}(A) = 1$.

(2) On commence par pré-remplir une matrice avec des 1. Puis, on remplace des 1 par des 0 un terme sur deux selon une certaine parité ($(-1)^{i+j} = -1$ lorsque $i+j$ est impair - attention, ne pas oublier de tenir compte du décalage d'indices en Python). Enfin, si la somme d'une ligne

n'est égale à 2, le coefficient de la ligne qui se trouve sur la diagonale de la matrice est augmenté de 1. Au final, la matrice B obtenue est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A + 2I.$$

Le résultat de l'affichage est alors le produit de B par $B - 2I$ ce qui est donc égal au produit de $A + 2I$ par A et donne la matrice nulle.
Cela nous permet d'exhiber un polynôme annulateur pour A. En effet, $(X + 2)X = X^2 + 2X$ annule donc A.
Ainsi, les valeurs propres de A sont à chercher parmi les racines de ce polynôme, à savoir 0 et -2. On sait déjà que 0 est valeur propre car A n'est pas inversible (son rang est 1) et on connait même la dimension du sous-espace propre associé (qui n'est rien d'autre que le noyau de A) et vaut, par le théorème du rang, 2.
Comme A est symétrique, on sait que A est diagonalisable. Or, n'étant pas elle même déjà diagonale, elle ne peut pas avoir une seule valeur propre (on pourrait refaire le raisonnement par l'absurde de l'exercice précédent). Donc A admet au moins deux valeurs propres, c'est à dire en fait exactement deux et on peut affirmer que

$$\mathrm{Sp}(A) = \{0, -2\}.$$

(3) Oui, on l'a déjà dit d'ailleurs. A est symétrique donc diagonalisable. Le piège aurait été de répondre que non car elle n'a que 2 valeurs propres distinctes (alors qu'elle est de taille 3). Mais personne n'est tombé dedans bien sûr.

(4) On est tentés d'écrire $A = PDP^{-1}$ avec P inversible (à déterminer) et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Puis de dire, par récurrence *immédiate* que $A^n = PD^nP^{-1}$. On pourrait. Mais on peut aller plus vite. Le polynôme annulateur qu'on a exhibé plus haut donne $A^2 = -2A$. Une récurrence immédiate elle aussi donne alors, pour $n \geq 1$,

$$A^n = (-2)^{n-1}A = \begin{pmatrix} -(-2)^{n-1} & 0 & (-2)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ (-2)^{n-1} & 0 & -(-2)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

(5) Là par contre, on utilise une matrice diagonale pour résoudre car c'est plus simple. Sans expliciter P, on a

$$\begin{aligned} (A - xI)^2 = I &\iff \left(PDP^{-1} - PxIP^{-1}\right)^2 = I \\ &\iff \left(P\left(D - xI\right)P^{-1}\right)^2 = I \iff P\left(D - xI\right)^2 P^{-1} = I \\ &\iff (D - xI)^2 = I \end{aligned}$$

Or,

$$(D - xI)^2 = \begin{pmatrix} -x & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & (-2 - x) \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & (-2 - x)^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (D - xI)^2 = I &\iff \begin{cases} x^2 &= 1 \\ (2 + x)^2 &= 1 \end{cases} \\ &\iff x = -1 \end{aligned}$$

Ainsi, $x = -1$ est l'unique valeur pour laquelle $(A - xI)^2 = I$.

Exercice 3

On considère, dans cet exercice, deux variables aléatoires X et Y (définies sur le même espace probabilisé qu'on ne précise pas ici) à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose, pour tout l'exercice, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) > 0$ et que la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est la loi uniforme $\mathcal{U}([\![0, n]\!])$.

(1) Par définition de la loi conditionnelle de l'énoncé, on peut écrire, pour tout couple d'entiers $(n, k) \in \mathbb{N}^2$,

$$P_{[X=n]}(Y = k) = \begin{cases} 0, & \text{si } k > n \\ \dfrac{1}{n+1}, & \text{si } 0 \leq k \leq n \end{cases}$$

Par la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{[X = n] : \ n \in \mathbb{N}\}$, on a

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P_{[X=n]}(Y = k)P(X = n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} P_{[X=n]}(Y = k)P(X = n), \end{aligned}$$

car $P_{[X=n]}(Y = k) = 0$ si $n < k$.

(2) Soit $k \in \mathbb{N}$. Toujours avec la formule des probabilités totales avec le même s.c.e, on peut écrire

$$P(X - Y = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{[X=n]}(X - Y = k)P(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{[X=n]}(Y = n - k)P(X = n)$$

Or

$$0 \leq n - k \leq n \iff n \geq k.$$

Comme alors $P_{[X=n]}(Y = n - k) = 0$ pour $n < k$, on a

$$P(X - Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P_{[X=n]}(Y = n - k)P(X = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} P_{[X=n]}(Y = k)P(X = n) = P(Y = k)$$

car sachant $[X = n]$, Y est uniforme et donc

$$P_{[X=n]}(Y = k) = P_{[X=n]}(Y = n - k) = \frac{1}{n+1}.$$

On a bien montré que $X - Y$ et Y suivaient la même loi.

(3) D'après ce qui précède et sans effort supplémentaire, on peut écrire

$$P(Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(X = n).$$

(4) On suppose, dans cette question que $Z = Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$.

(a) Il suffit d'utiliser la formule bien connue de la loi géométrique. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} P(Y=k)-P(Y=k+1) &= P(Z=k+1)-P(Z=k+2) \\ &= (1-p)^k p-(1-p)^{k+1}p \\ &= p(1-p)^k(1-(1-p)) \\ &= p^2(1-p)^k. \end{aligned}$$

(b) En réutilisant une question précédente,

$$\begin{aligned} p^2(1-p)^k &= P(Y=k)-P(Y=k+1) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n+1}P(X=n)-\sum_{n=k+1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}P(X=n) \\ &= \frac{P(X=k)}{k+1} \end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X=k)=(k+1)p^2(1-p)^k.$$

(c) D'après le cours

$$X \text{ admet une espérance} \iff \sum kP(X=k) \text{ converge (absolument)}$$

Or,

$$kP(X=k)=p^2k(k+1)(1-p)^k=p^2(1-p)k(k+1)(1-p)^{k-1}$$

et on reconnait le multiple du terme général d'une série géométrique (décalée) dérivée d'ordre 2 de raison p (avec $0<p<1$) donc convergente. Il suit que X admet une espérance et que

$$E(X)=p^2(1-p)\sum_{k=0}^{+\infty}k(k+1)(1-p)^{k-1}=p^2(1-p)\times\frac{2}{(1-p)^3}=\frac{2p^2}{(1-p)^2}.$$

(d) Soient $(n,k)\in\mathbb{N}^2$, on a, d'une part,

$$\begin{aligned} P([X-Y=n]\cap[Y=k]) &= P([X=n+k]\cap[Y=k])=P_{[X=n+k]}(Y=k)P(X=n+k) \\ &= \frac{1}{n+k+1}\times(n+k+1)p^2(1-p)^{n+k} \\ &= p^2(1-p)^{n+k} \end{aligned}$$

D'autre part, comme Y et $X-Y$ suivent la même loi,

$$P(Y=k)P(X-Y=n)=P(Y=k)P(Y=n)=P(Z=k+1)P(Z=n+1)=p(1-p)^kp(1-p)^n=p^2(1-p)^{n+k}.$$

Les quantités sont bien égales, les variables aléatoires $X-Y$ et Y sont indépendantes.

(e) On peut alors utiliser cette indépendance pour écrire

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X,Y) &= \operatorname{cov}(X-Y+Y,Y)=\operatorname{cov}(X-Y,Y)+\operatorname{cov}(Y,Y) \\ &= V(Y) \end{aligned}$$

car $\operatorname{cov}(X-Y,Y)=0$ par indépendance. Or $V(Y)=V(Y+1)=V(Z)=\frac{1-p}{p^2}$, donc

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{1-p}{p^2}.$$

Problème

Partie 1 - Un problème de Cauchy et deux fonctions périodiques

On considère le problème de Cauchy

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} y'' + y &= 0 \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1 \end{cases}$$

(1) Pour résoudre un problème de Cauchy, on commence par résoudre l'équation différentielle (homogène), ici d'ordre 2. Pour ce faire, on considère l'équation caractéristique $x^2 + 1 = 0$. Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ (discriminant strictement négatif). On ne peut alors rien dire.

On **admet** l'existence et l'unicité d'une fonction $\mathrm{s} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ solution de $(\mathcal{P})$. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{c}(t) = \mathrm{s}'(t)$.

(2) **Première propriétés des fonctions** s **et** c**.**

(a) Comme on a admis que s était de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que $\mathrm{c} = \mathrm{s}'$, il suit naturellement que c est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus, $\mathrm{c}' = (\mathrm{s}')' = \mathrm{s}''$. Comme comme s est solution de $(\mathcal{P})$, on a que $\mathrm{s}" + \mathrm{s} = 0$ ou encore $\mathrm{s}" = -\mathrm{s}$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a bien $\mathrm{c}'(t) = -\mathrm{s}(t)$.

(b) On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h(t) = \mathrm{c}^2(t) + \mathrm{s}^2(t)$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ (elle est même $\mathcal{C}^\infty$) et on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$h'(t) = 2\mathrm{c}'(t)\mathrm{c}(t) + 2\mathrm{s}'(t)\mathrm{s}(t) = 2\mathrm{c}'(t)\mathrm{c}(t) + 2\mathrm{c}(t)\mathrm{s}(t) = 2\mathrm{c}(t)(\mathrm{c}'(t) + \mathrm{s}(t)) = 0$$

d'après la question précédente. La fonction h a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$: elle est donc constante sur $\mathbb{R}$.

(c) On connait (par définition des solutions du problème de Cauchy) les valeurs de $\mathrm{s}(0) = 0$ et $\mathrm{c}(0) = \mathrm{s}'(0) = 1$. Il suit que $h(0) = 1^2 + 0^2 = 1$. Mais, comme la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{c}^2(t) + \mathrm{s}^2(t) = 1.$$

(d) On utilise la question précédente. On sait déjà que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a ($\mathrm{c}^2(t) \geq 0$ et) $\mathrm{c}^2(t) = 1 - \mathrm{s}^2(t) \leq 1$, ce qui donne $0 \leq \mathrm{c}^2(t) \leq 1$ puis, $-1 \leq \mathrm{c}(t) \leq 1$. Ainsi, c est bien bornée sur $\mathbb{R}$. C'est exactement la même chose pour s.

(3) Le but de cette question est de montrer qu'il existe $\theta > 0$ tel que $\mathrm{s}(\theta) = 0$.
On raisonne par l'absurde en supposant donc que, pour tout $\theta > 0$, on a $\mathrm{s}(\theta) \neq 0$.

(a) Par hypothèse, s ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ et y est donc de signe constant. Si s était négative, alors $\mathrm{c}' = -\mathrm{s}$ serait strictement positive et c serait strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et même sur $\mathbb{R}+$ car elle y est continue, ce qui implique notamment que, pour tout $t > 0$, $\mathrm{c}(t) > \mathrm{c}(0) = 1$. Mais on a vu à la question précédente que c était bornée par 1, ce qui est donc une contradiction. Il suit que s est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\mathrm{s}'' = -\mathrm{s}$ sur $\mathbb{R}$, s'' est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) (i) Comme $\mathrm{c}' = -\mathrm{s}$ est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$, c y est strictement décroissante. Étant bornée (ici c'est le caractère *minorée* qui compte), le théorème de convergence monotone permet d'affirmer que c admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

(ii) La fonction c est continue sur $\mathbb{R}$. Par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $t \mapsto \int_0^t \mathrm{c}(x)\mathrm{d}x$ est l'unique primitive de c qui s'annule en 0. Mais cette fonction est s (car $\mathrm{s}' = c$ et $\mathrm{s}(0) = 0$). On peut donc écrire, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{s}(t) = \int_0^t \mathrm{c}(x)\mathrm{d}x.$$

(iii) Supposons que $\ell \neq 0$. Distinguons alors deux cas :

- Si $\ell > 0$. Par définition de la limite, il existe $t_0 > 0$ tel que, pour tout $x \geq t_0$, on a $\mathrm{c}(x) \geq \ell/2$. Mais alors, pour $t \geq t_0$, on aurait

$$\mathrm{s}(t) = \int_0^{t_0} \mathrm{c}(x)\mathrm{d}x + \int_{t_0}^t \mathrm{c}(x)\mathrm{d}x \geq \int_0^{t_0} \mathrm{c}(x)\mathrm{d}x + \frac{\ell}{2}\int_{t_0}^t \mathrm{d}x = \int_0^{t_0} \mathrm{c}(x)\mathrm{d}x + (t - t_0)\,\frac{\ell}{2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

  ce qui n'est pas possible vu que s est majorée (par 1).
- De la même manière, si $\ell < 0$, on peut trouver $t_1 > 0$ tel que, pour tout $x \geq t_1$, on a $\mathrm{c}(x) \leq \ell/2$. Mais alors, pour $t \geq t_1$, on aurait

$$\mathrm{s}(t) = \int_0^{t_1} \mathrm{c}(x)\mathrm{d}x + \int_{t_1}^t \mathrm{c}(x)\mathrm{d}x \leq \int_0^{t_1} \mathrm{c}(x)\mathrm{d}x + \frac{\ell}{2}\int_{t_1}^t \mathrm{d}x = \int_0^{t_1} \mathrm{c}(x)\mathrm{d}x + (t - t_1)\,\frac{\ell}{2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty,$$

  ce qui n'est pas non plus possible car s est minorée (par -1).

On peut donc conclure que $\ell = 0$.

(c) On sait que, pour $t > 0$, $\mathrm{c}'(t) = -\mathrm{s}(t) < 0$ donc c est strictement décroissante. Elle est aussi continue sur $\mathbb{R}_+$ donc réalise (par le théorème de bijection) une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]0;1]$ car $\mathrm{c}(0) = 1$ et $\mathrm{c}(t) \longrightarrow 0$, $t \to +\infty$. On a bien que, pour tout $t \geq 0$, $\mathrm{c}(t) \geq 0$.

(d) Comme précédemment, s est croissante (car $\mathrm{s}' = \mathrm{c} \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$) et majorée. Par convergence monotone, elle admet une limite finie γ en $+\infty$.

(e) On sait que $\mathrm{c}' = -\mathrm{s}$ ou encore $\mathrm{s} = -\mathrm{c}'$ donc, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^t \mathrm{s}(x)\mathrm{d}x = -\int_0^t \mathrm{c}'(x)\mathrm{d}x = -[\mathrm{c}(x)]_0^t = -\mathrm{c}(t) + \mathrm{c}(0) = 1 - \mathrm{c}(t),$$

ou encore

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{c}(t) = 1 - \int_0^t \mathrm{s}(x)\mathrm{d}x.$$

(f) En reproduisant le même raisonnement que pour ℓ, l'écriture ci-dessus avec une intégrale permet de montrer que $\gamma = 0$. Ceci n'est pas possible. En effet, s était croissante, si $\theta > 0$ est fixé, on a ($\mathrm{s}(\theta) > 0$ par hypothèse) et

$$\gamma = \lim_{t+\infty} \mathrm{s}(t) \geq \mathrm{s}(\theta) > 0.$$

Ainsi, c'est notre hypothèse initiale, à savoir que s ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ qui est absurde.

On a donc montré que s s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$. On **admettra** que la plus petite valeur de $\theta > 0$ telle que $\mathrm{s}(\theta) = 0$ est π, ainsi

$$\mathrm{s}(\pi) = 0, \quad \text{et} \quad \forall t \in]0, \pi[,\ \mathrm{s}(t) \neq 0.$$

En travaillant avec les conditions de $(\mathcal{P})$ vérifiées par s, on montre facilement et on **admettra** que s est une fonction impaire et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{s}(\pi - t) = \mathrm{s}(t)$.

(4) (a) Soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{c}(-t) = \mathrm{s}'(-t) = (-\mathrm{s}(-t))' \underset{\text{s est impaire}}{=} (\mathrm{s}(t))' = \mathrm{c}(t)$$

et c est bien paire.

(b) Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi''(t) = \mathrm{s}''(t + 2\pi) = -\mathrm{s}(t + 2\pi) = -\varphi(t),$$

donc $\varphi" + \varphi = 0$ et φ est bien solution de l'équation différentielle. De plus, d'après les propriétés de s admises ci-dessus,

$$\varphi(0) = \mathrm{s}(2\pi) = \mathrm{s}(\pi - 2\pi) = \mathrm{s}(-\pi) = -\mathrm{s}(\pi) = 0.$$

Observons aussi que $\mathrm{c}(t) = \mathrm{s}'(t) = -\mathrm{s}'(\pi - t) = -\mathrm{c}(\pi - t)$. Ce qui donne

$$\varphi'(0) = \mathrm{c}(2\pi) = -\mathrm{c}(\pi - 2\pi) = -\mathrm{c}(-\pi) = -\mathrm{c}(\pi),$$

car c est paire. On sait aussi que $\mathrm{c}^2(\pi) = 1 - \mathrm{s}^2(\pi) = 1$. Donc $\mathrm{c}(\pi) \in \{-1, 1\}$. Or, $\mathrm{c}' = -s < 0$ sur $]0, \pi[$ donc c est strictement décroissante sur $[0, \pi]$. Comme $\mathrm{c}(0) = 1$, on a $\mathrm{c}(\pi) = -1$. Il suit alors que

$$\varphi'(0) = -\mathrm{c}(\pi) = -(-1) = 1.$$

Ainsi φ est solution de $(\mathcal{P})$ mais le problème de Cauchy a une solution unique, qu'on a appelée s. Il suit que $\varphi = \mathrm{s}$ ou encore

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{s}(t + 2\pi) = \mathrm{s}(t).$$

On dit que s est *périodique*, de période 2π.

(c) Il suffit de dériver. Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$c(t + 2\pi) = \mathrm{s}'(t + 2\pi) = (\mathrm{s}(t + 2\pi))' = \mathrm{s}'(t) = \mathrm{c}(t).$$

Ainsi, c est bien périodique de période 2π.

(d) (i) On a déjà vu précédemment que c était strictement décroissante sur $]0, \pi[$. Elle y est aussi continue et réalise donc une bijection de $]0, \pi[$ sur $]-1, 1[$. En particulier, 0 admet un unique antécédent $\theta \in]0, \pi[$.

(ii) On peut dresser le tableau de variations de s sur $[0, \pi]$.

x	0		θ		π
$\mathrm{c}(x) = \mathrm{s}'(x)$		$+$	0	$-$	
s			$\mathrm{s}(\theta)$		
	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

On voit alors que pour tout $t \in [0; \pi]$, $\mathrm{s}(t) \leq \mathrm{s}(\theta)$, ce qui veut bien dire que s atteint son maximum sur $[0; \pi]$ en θ.

On remarquera que ce maximum vaut 1, car $\mathrm{s}^2(\theta) + \mathrm{c}^2(\theta) = 1$ et $\mathrm{c}^2(\theta) = 0$ donc $\mathrm{s}^2(\theta) = 1$ et comme $\mathrm{s}(\theta) > 0$, on a $\mathrm{s}(\theta) = 1$.

(iii) Comme $\theta \in]0, \pi[$, alors $\pi - \theta \in]0, \pi[$ aussi. Mais, $\mathrm{s}(\pi - \theta) = \mathrm{s}(\theta)$ donc s est maximale en $\pi - \theta$. Or, s n'atteint son maximum sur $[0, \pi]$ qu'en θ. Il suit que

$$\pi - \theta = \theta \iff 2\theta = \pi \iff \theta = \frac{\pi}{2}.$$

(iv) On pose, pour $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) = \mathrm{c}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$. Comme $\mathrm{c}' = -\mathrm{s}$, on a $\mathrm{c}" = -\mathrm{s}' = -\mathrm{c}$. Il suit que

$$\psi''(t) = -\left(-\mathrm{c}''\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) = -c\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -\psi(t)$$

ou encore $\psi'' = \psi = 0$. Reste à vérifier les conditions initiales.

$$\psi(0) = \mathrm{c}\left(\frac{pi}{2}\right) = \mathrm{c}(\theta) = 0$$

et

$$\psi'(0) = -\mathrm{c}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{s}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

(on a bien justifié plus haut que le maximum de s était 1).
Ainsi, ψ est solution de $(\mathcal{P})$. Par unicité de la solution on a $\psi = \mathrm{s}$, ou encore

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{c}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \mathrm{s}(t).$$

(5) On a déjà montré que c était strictement décroissante sur $[0; \pi/2]$. On sait que c est strictement positive sur $]0, \pi/2[$ (par définition de $\theta = \pi/2$), il suit que s est strictement croissante sur $[0, \pi/2]$ (car elle est continue sur l'intervalle fermé).
Le théorème de bijection qu'on applique dans les deux cas (chacune des fonctions est continue sur l'intervalle correspondant et strictement monotone) permet d'obtenir le résultat voulu.

Partie 2 - Une suite d'intégrales

On considère la suite d'intégrales (W_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{c}^n(t)\mathrm{d}t,$$

où c est la fonction étudiée dans la partie précédente. Celle-ci étant continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, la suite (W_n) est bien définie.

(6) Ces calculs ne posent pas de problème

$$\begin{aligned} W_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{c}(t)\mathrm{d}t \\ &= [\mathrm{s}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = s\left(\frac{\pi}{2}\right) - \mathrm{s}(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

(7) Il est suggéré de poser $x = \frac{\pi}{2} - t$ changement de variable affine donc licite qui donne notamment $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$, $t = \frac{\pi}{2} - x$ et

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{c}^n(t)\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \mathrm{c}^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-\mathrm{d}x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{s}^n(x)\mathrm{d}x,$$

car d'après la Question (4(d)iv) de la Partie 1, on a

$$\mathrm{c}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \mathrm{s}(x).$$

(8) On sait que, pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \mathrm{c}(t) \in [0;1]$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on aura $\mathrm{c}^n(t) \geq \mathrm{c}^{n+1}(t)$. Par positivité de l'intégrale (dont les bornes sont rangées dans l'ordre croissant), on a bien $W_n \geq W_{n+1}$, ou encore que la suite (W_n) est décroissante.

(9) L'indication sur l'utilisation de la Question (2c) suggère de remarquer que

$$\mathrm{c}^{n+2}(t) = \mathrm{c}^2(t)\mathrm{c}^n = \left(1 - \mathrm{s}^2(t)\right)\mathrm{c}^n(t) = \mathrm{c}^n(t) - \mathrm{s}(t)\mathrm{s}(t)\mathrm{c}^n(t)$$

et de poser

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(t) & = & -\mathrm{s}(t)\mathrm{c}^n(t) \\ v(t) & = & \mathrm{s}(t) \end{array}\right. \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{rcl} u(t) & = & \frac{1}{n+1}c^{n+1}(t) \\ v'(t) & = & \mathrm{c}(t) \end{array}\right.$$

Les fonctions u et v sont clairement $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par tout ce qui précède. On peut donc faire notre IPP pour obtenir

$$\begin{array}{rcl} W_{n+2} & = & \displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{c}^n(t)\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \mathrm{s}(t)\mathrm{s}(t)\mathrm{c}^n(t)\mathrm{d}t \\ & = & W_n - \left[\dfrac{\mathrm{s}(t)\mathrm{c}^{n+1}(t)}{n+1}\right]_0^{\pi/2} - \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{c}^{n+2}(t)\mathrm{d}t \end{array}$$

Comme $\mathrm{c}(\pi/2) = 0 = \mathrm{s}(0)$, on obtient

$$W_{n+2} = W_{n+1} - \frac{1}{n+1}W_{n+2},$$

ou encore

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)W_{n+2} = W_{n+1}$$

et puis

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$$

comme attendu.

(10) On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, $J_n = (n+1)W_nW_{n+1}$.
On fait ce qu'on nous demande. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcl} J_{n+1} - J_n & = & (n+2)W_{n+1}W_{n+2} - (n+1)W_nW_{n+1} \\ & = & (n+2)W_{n+1}\dfrac{n+1}{n+2}W_n - (n+1)W_nW_{n+1} \\ & = & 0 \end{array}$$

Ainsi, la suite (J_n) est constante. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$J_n = J_0 = W_0W_1 = \frac{\pi}{2}.$$

(11) Soit $n \in \mathbb{N}$. Observons que $W_n \geq 0$ (car $\mathrm{c}(t) \geq 0$ sur $[0;\pi/2]$ et on applique la croissance de l'intégrale). On sait déjà que $\dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{W_{n+2}}{W_n}$. Mais, on sait aussi que (W_n) est décroissante, donc $W_{n+2} \leq W_{n+1}$, ce qui donne

$$\frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n}$$

mais aussi $W_{n+1} \leq W_n$ ou encore $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$. On a bien l'encadrement

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

(12) Comme $n+1 \sim n+2$, lorsque $n \to +\infty$, le théorème des gendarmes avec l'encadrement précédent donne
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1 \iff W_n \sim W_{n+1},\ n \to +\infty.$$
On utilise alors la valeur de J_n, on a, pour $n \to +\infty$,
$$\frac{\pi}{2} = J_n = (n+1)W_nW_{n+1} \sim nW_n^2$$
ou encore
$$W_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$$
et enfin
$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}},\ n \to +\infty.$$

Partie 3 - L'intégrale de Gauss

Le but de cette partie est d'évaluer (sans faire appel au résultat admis du cours) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}t$.

(13) La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, l'intégrale est impropre en $+\infty$. Sur $[0;1]$, il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue donc l'intégrale existe. Observons que, par croissance comparée
$$e^{-x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right),\ x \to +\infty.$$
Or, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est convergente.
Par critère de négligeabilité pour des fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$ est encore convergente.
Au final, l'intégrale est bien convergente sur $[0;+\infty[$.

(14) On l'a fait 1000 fois. Un argument de concavité de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ permet de dire que sa courbe est au dessous de toutes ses tangentes, notamment celle en 0 d'équation $y = -x$, ce qui donne l'inégalité demandée.

(15) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Soit $x \in [0, \sqrt{n}]$. On a d'après l'inégalité ci-avant et la croissance de la fonction exponentielle
$$\ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \leq -\frac{x^2}{n}$$
et donc
$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right) \leq e^{-x^2}.$$
La positivité de l'intégrale permet de conclure à l'inégalité souhaitée.

(16) De la même manière, on a
$$\ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right) \leq \frac{x^2}{n}$$
donc
$$\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n\ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)\right) \geq e^{-x^2}$$
et la positivité de l'intégrale donne à nouveau l'inégalité voulue.

(17) Considérons donc le changement de variable $x = \sqrt{n}\mathrm{c}(u)$. Comme c est bijective de $[0, \pi/2]$ sur $[0, 1]$, il suit que la définition précédente est équivalente à $u = \mathrm{c}^{-1}\left(x/\sqrt{n}\right)$ qui définit bien une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \sqrt{n}]$, bijective à valeurs dans $[0, \pi/2]$. On a même

$$\mathrm{d}x = \sqrt{n}\mathrm{c}'(u)\mathrm{d}u = \sqrt{n}\mathrm{s}(u)\mathrm{d}u.$$

On obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \left(1 - \mathrm{c}^2(u)\right)^n \mathrm{s}(u)\sqrt{n}\mathrm{d}u \\ &= \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \mathrm{s}^{2n+1}(u)\mathrm{d}u \\ &= \sqrt{n}W_{2n+1}, \end{aligned}$$

comme demandé.

On **admet**[1] que le changement de variable $x = \sqrt{n}\dfrac{\mathrm{s}(u)}{\mathrm{c}(u)}$ (est licite et) permet d'obtenir

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x = \sqrt{n}W_{2n-2}.$$

On a donc l'encadrement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\mathrm{d}x \leq \sqrt{n}W_{2n-2}.$$

(18) D'après la Question (12) de la Partie 2, on a

$$W_{2n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}},$$

et

$$W_{2n-2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2)}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}.$$

En divisant donc l'encadrement précédent par $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que tout tend vers 1. Il suit que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et on n'est pas peu fier d'avoir démontré le résultat admis dans le cours sur la valeur de cette intégrale.

(19) Par parité et la question précédente, on peut affirmer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

On va ensuite poser le changement de variable affine

$$x = \frac{t - m}{\sigma\sqrt{2}},$$

qui est donc licite (et qu'on peut faire directement sur l'intégrale impropre car c'est affine et que celle-ci converge). On a

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\mathrm{d}t$$

[1] on suggère de le vérifier en exercice supplémentaire

donc
$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right)\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\mathrm{d}t,$$
ou encore
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}t = \sigma\sqrt{2\pi}.$$

(20) En développant puis par identification, on trouve sans difficulté
$$\left\{\begin{array}{rcl} 1/(2\sigma^2) & = & a \\ -m/\sigma^2 & = & b \\ m^2/(2\sigma^2)+\alpha & = & c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \sigma & = & \sqrt{1/(2a)} \\ m & = & -b\sigma^2 = -b/(2a) \\ \alpha & = & c - m^2/(2\sigma^2) = c - b^2/(4a) \end{array}\right.$$

(21) Étant clair que, avec le choix précédent de m, σ et α, on a
$$\exp(-(at^2+bt+c)) = \exp(-\alpha)\exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}+\alpha\right) = \exp(-\alpha)\exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right),$$
la convergence de l'intégrale est garantie et, d'après la valeur trouvée pour l'intégrale deux questions plus haut, on a
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(at^2+bt+c))\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi\sigma^2}\exp(-\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right),$$
comme demandé. Ouf!