Math ECG 2. 2023-2024

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir surveillé n°4

Samedi 20 Janvier
Durée : 4 heures

Dans tout le sujet, on suppose déjà importées sous leur alias habituels les bibliothèques Python usuelles.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
```

Exercice 1

(1) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(a) Déterminer les valeurs propres de A.
(b) Déterminer les sous-espaces propres de A en donnant la dimension et une base pour chacun d'eux.
(c) Justifier que A est diagonalisable et donner une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $P^{-1}AP = D$.

(2) On considère le système différentiel linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & x(t) + y(t) \\ y'(t) & = & -2x(t) + 4y(t) \end{array} \right. \qquad (\mathcal{E})$$

(a) Résoudre le système différentiel linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'(t) & = & 2u(t) \\ v'(t) & = & 3v(t) \end{array} \right. \qquad (\mathcal{E}')$$

(b) En posant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t)$:

- Donner une relation faisant intervenir les matrices A, X et X', équivalente à $(\mathcal{E})$,
- Établir une relation faisant intervenir les matrices D, Y et Y', équivalente à $(\mathcal{E}')$.

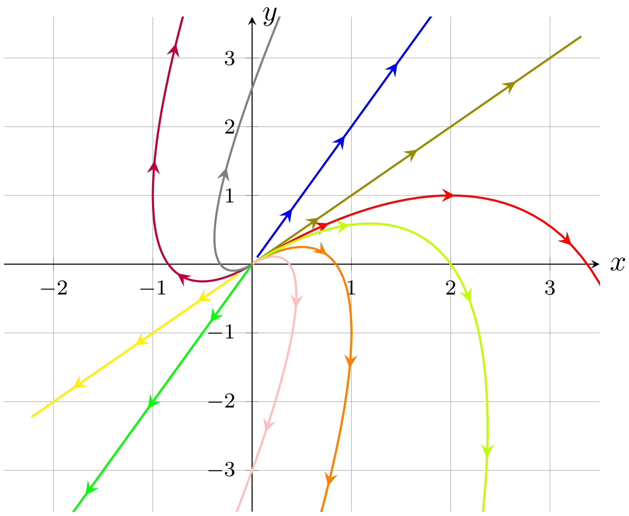
(c) En déduire les solutions du système $(\mathcal{E})$.
(d) Justifier que le problème de Cauchy suivant admet une unique solution:

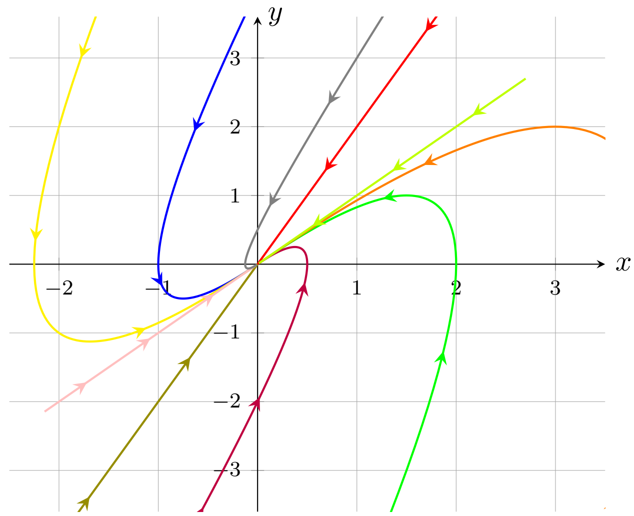
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & x(t) + y(t) \\ y'(t) & = & -2x(t) + 4y(t) \\ x(0) & = & 1 \\ y(0) & = & -1 \end{array} \right. \qquad (\mathcal{P})$$

La déterminer.

(3) On considère les deux graphiques ci-après.

(a) Lequel des deux représente-t-il les trajectoires de quelques solutions du système $(\mathcal{E})$? On justifiera la réponse.
(b) Sur ce graphique et parmi les trajectoires représentées, l'une correspond au système différentiel avec condition initiale $(\mathcal{P})$. Laquelle ? On justifiera la réponse.





Exercice 2

On définit la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f : (x, y) \longmapsto \frac{1}{5}\left(x^2(1-x^2) + y^2(1-y^2) + 2xy\right)$.

(1) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer son gradient $\nabla f(x, y)$ ainsi que sa matrice hessienne $\nabla^2 f(x, y)$ en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(2) Montrer que f admet trois points critiques dont on précisera les coordonnées.

(3) On joint ci-après deux figures (appelées respectivement Figure 1 et 2) relatives à la fonction f.
(a) Que représente chacune de ces figures ?
(b) Que ces figures permettent-elles de conjecturer quant à la nature des points critiques précédents ?

Figure 1

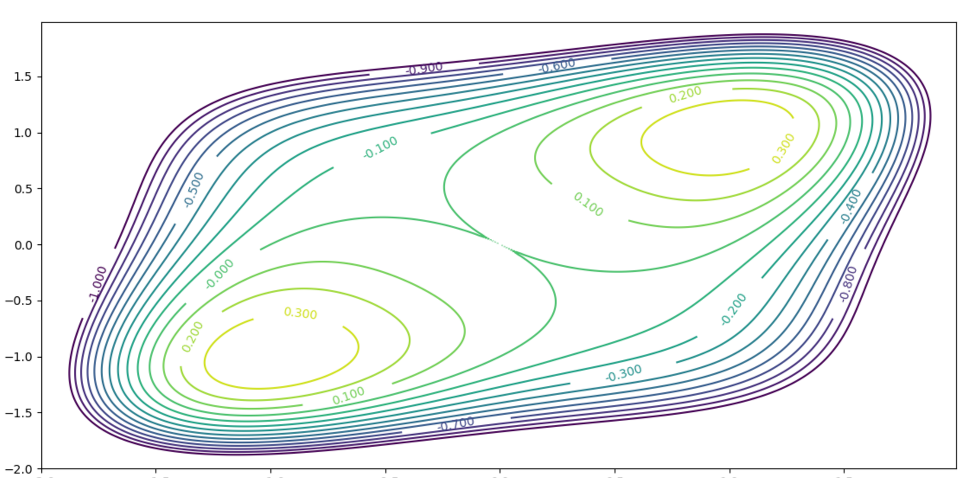
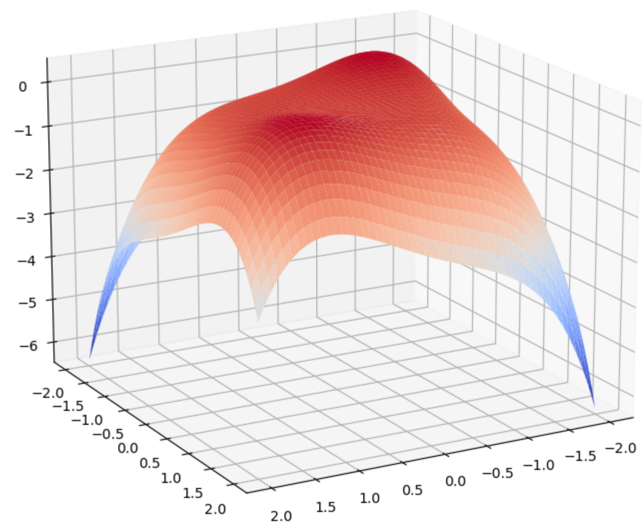


Figure 2



(4) Déterminer la nature de chacun des points critiques. Pour l'un des trois points critiques, on pourra calculer $f(x,x)$ et $f(x,-x)$.

(5) Montrer que f n'est pas minorée.

(6) Posons $g : t \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{2t}{5} - \dfrac{t^2}{10}$.

(a) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$. Préciser le ou les *extrema* de g sur $\mathbb{R}$.
(b) Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $f(x,y) \leq g(x^2+y^2)$.
(c) Que peut-on en conclure quant au caractère global de certains des *extrema* de f trouvés précédemment ?

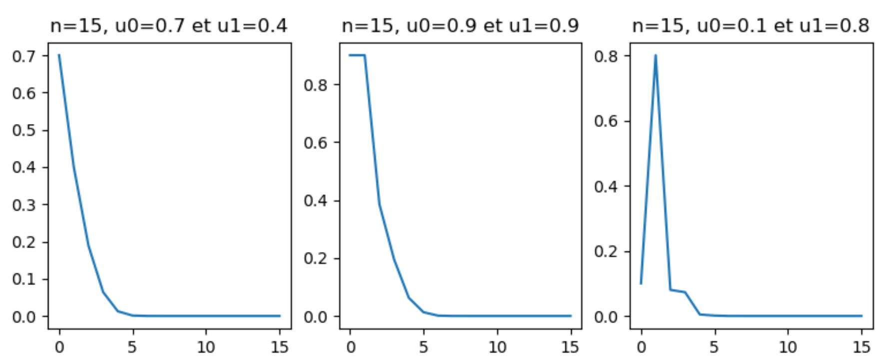
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $(u_0,u_1) \in [0;1]^2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$.

(7) (a) Écrire une fonction en Python d'en-tête `def suite(n, u0, u1):` qui prend en argument un entier naturel n ainsi que les valeurs initiales u_0 et u_1 et qui renvoie un vecteur contenant $u_0, u_1, \ldots, u_n$.

(b) Écrire une fonction en Python d'en-tête `def figure(n, u0, u1):` (qui utilise la précédente) qui prend en argument un entier naturel n ainsi que les valeurs initiales u_0 et u_1 et qui représente graphiquement les points $(0,u_0), (1,u_1), \ldots, (n,u_n)$.

(c) On obtient alors, avec la fonction de la question précédente les figures ci-dessous, pour différentes valeurs de u_0 et u_1. Que peut-on conjecturer ?

Affichage Python



(8) On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = u_0$, $a_1 = u_1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \dfrac{2}{5}(a_n + a_{n+1})$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.
(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} \leq \dfrac{2}{5}(u_n + u_{n+1})$.
(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq a_n$.
(d) Justifier qu'il existe des réels s, t, λ, μ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \lambda s^n + \mu t^n$.
(*On explicitera s et t mais pas λ et μ.*)
(e) Montrer la conjecture de la Question (7c).

Exercice 3

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$, la fonction f_n par

$$f_n(x) = x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

(1) (a) En considérant la fonction de densité de la loi normale centrée-réduite, justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_0(t)\mathrm{d}t$ et préciser sa valeur.

(b) À l'aide d'une relation de négligeabilité, montrer la convergence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$. On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t.$$

(2) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+2} = (n+1)I_n.$$

(3) Calculer I_1.
(4) Écrire une fonction Python, d'en-tête `def I(n):` qui prend en argument un entier naturel n et renvoie la valeur de I_n.
(5) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!}, \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = 2^n n!$$

Problème

Partie 1 : Propriété d'une loi de probabilité

On désigne par c un réel strictement positif et on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^{1+c}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

(1) Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre c.

(2) Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F(x)$ en fonction de x et c.

(3) Soit t un réel strictement supérieur à 1.

(a) Déterminer, en distinguant les cas $x \geq 1$ et $x < 1$, la probabilité conditionnelle $P_{[X>t]}(X \leq tx)$.

(b) En déduire que la loi de $\dfrac{X}{t}$, conditionnellement à l'événement $[X > t]$, est la loi de X.

Partie 2 : Réciproque de la propriété précédente

On considère une variable aléatoire Y de densité g nulle sur $]-\infty, 1[$, strictement positive et continue sur $[1, +\infty[$. On pose $c = g(1)$ et on note G la fonction de répartition de Y.

Dans toute la suite, on suppose que, pour tout réel t strictement supérieur à 1, on a :

- $P(Y > t) > 0$.
- La loi de $\dfrac{Y}{t}$, conditionnellement à l'événement $[Y > t]$, est la loi de Y.

(4) Justifier que $G(1) = 0$.

(5) (a) Établir l'égalité :

$$\forall x \geq 1,\ \forall t > 1,\ G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}.$$

(b) Justifier que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et en déduire que :

$$\forall x > 1,\ \forall t > 1,\ G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}.$$

(c) Montrer enfin la relation :

$$\forall t > 1,\ G(t) + \frac{t}{c}G'(t) = 1.$$

(6) Dans cette question, la lettre y désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ qui, à tout réel t de $]1, +\infty[$, associe $y(t)$.

On note (E_1) l'équation différentielle $y + \dfrac{t}{c}y' = 0$ et (E_2) l'équation différentielle $y + \dfrac{t}{c}y' = 1$.

Il convient de noter que ces équations différentielles ne sont pas à coefficients constants.

(a) Soit z la fonction définie par $z(t) = t^c y(t)$. Montrer que y est solution de l'équation différentielle (E_1) si, et seulement si, z est constante sur $]1, +\infty[$.
(b) En notant K la constante évoquée à la Question (6a) , donner toutes les solutions de (E_1).
(c) Trouver une fonction u, constante sur $]1, +\infty[$, et solution de l'équation différentielle (E_2).
(d) Montrer l'équivalence : h solution de $(E_2) \iff h - u$ solution de (E_1).
(e) En déduire que les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions h définies par :

$$\forall t > 1,\ h(t) = 1 + \frac{K}{t^c}.$$

(7) (a) Montrer finalement que l'on a :

$$\forall t > 1,\ G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}$$

(b) Vérifier que cette relation s'étend à $[1, +\infty[$ puis conclure quant à la loi de Y.

Partie 3 : Simulation d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètre c

(8) On pose $Z = \ln(X)$ et on admet que Z est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note H sa fonction de répartition.

(a) Pour tout réel x, exprimer $H(x)$ à l'aide de la fonction F.
(b) En déduire que Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
(c) Écrire une fonction Python d'en-tête `def simul_X(c)` et permettant de simuler X.