Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir surveillé n°4

Solution

Exercice 1

Je dois l'énoncé de cet exercice à mon collègue Romain Meurant, du lycée Descartes à Rabat (Maroc).

(1) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(a) Comme d'habitude

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } A \quad &\iff \quad A - \lambda I \text{ non inversible} \\ &\iff \quad \det(A - \lambda I) = 0 \\ &\iff \quad \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \\ &\iff \quad \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 3 \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \{2; 3\}$.

(b) Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- $AX = 2X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 2x \\ -2x + 4y & = & 2y \end{array} \right. \iff x = y$

  donc le sous-espace propre E_2 est de dimension 1 et engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $AX = 3X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 3x \\ -2x + 4y & = & 3y \end{array} \right. \iff 2x = y$

  donc le sous-espace propre E_2 est de dimension 1 et engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(c) A est de taille 2 avec deux valeurs propres distinctes : elle est donc diagonalisable. De toute façon, par concaténation, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ forme une famille libre de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (donc une base, car composée de deux vecteurs dans un espace de dimension 2) constituée de vecteurs propres de A. En notant P la matrice de passage (donc inversible) de la base canonique vers cette base, la formule de changement de base donne $A = PDP^{-1}$, avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2) (a) Le système $(\mathcal{E}')$ est composée de deux équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants et homogènes, indépendantes. Les solutions sont de la forme :

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t) = \lambda \mathrm{e}^{2t} \quad \text{et} \quad v(t) = \mu \mathrm{e}^{3t}.$$

(b) Commençons par observer que $X = PY$ et que donc $X' = PY'$. Il suit que

$$\begin{aligned} X \text{ solution de } (\mathcal{E}') &\iff X' = AX \\ &\iff PY' = PDP^{-1}X = PDY \\ &\iff Y' = DY \\ &\iff Y \text{ solution de } (\mathcal{E}'). \end{aligned}$$

(c) On sait résoudre $(\mathcal{E}')$ d'après ce qui précède. Il suffit donc de multiplier par P pour trouver les solutions de $(\mathcal{E})$.

$$X = PY = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \mathrm{e}^{2t} \\ \mu \mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \mathrm{e}^{2t} + \mu \mathrm{e}^{3t} \\ \lambda \mathrm{e}^{2t} + 2\mu \mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les solutions de $(\mathcal{E}')$ sont les fonctions x et y de la forme :

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t) = \lambda \mathrm{e}^{2t} + \mu \mathrm{e}^{3t} \quad \text{et} \quad v(t) = \lambda \mathrm{e}^{2t} + 2\mu \mathrm{e}^{3t}.$$

(d) Le cours garantit l'existence et l'unicité d'une solution à ce problème de Cauchy.
On résout le système homogène associé (ce qu'on vient de faire avec $(\mathcal{E})$) et on injecte les valeurs des conditions initiales.
La condition initiale $x(0) = 1$ et $y(0) = -1$ dans les solutions ci-dessus donne :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda + \mu &=& 1 \\ \lambda + 2\mu &=& -1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda &=& 3 \\ \mu &=& -2 \end{array} \right.$$

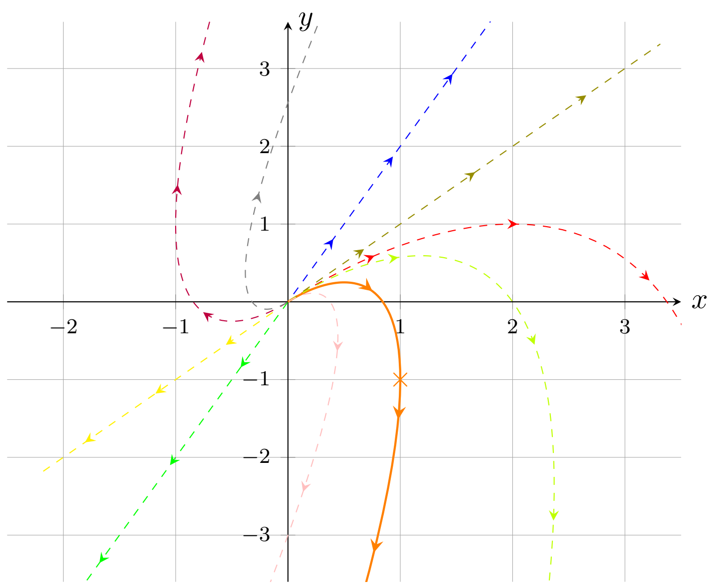
Par conséquent, l'unique solution de $(\mathcal{P})$ est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t) = 3\mathrm{e}^{2t} - 2\mathrm{e}^{3t} \quad \text{et} \quad v(t) = 3\mathrm{e}^{2t} - 4\mathrm{e}^{3t}.$$

(3) On considère les deux graphiques ci-après.

(a) Les solutions de $(\mathcal{E})$ correspondent à des trajectoires divergentes (sauf la solution nulle) car $e^{2t} \longrightarrow +\infty$ (lorsque $t \to +\infty$) et $e^{3t} \longrightarrow +\infty$ aussi lorsque $t \to +\infty$. C'est donc le Graphique 1 qui convient.

(b) Comme l'unique solution de $(\mathcal{P})$ vérifie $x(0) = 1$ et $y(0) = -1$, la trajectoire passe par le point de coordonnées $(1, -1)$: il s'agit de la trajectoire orange :



Exercice 2

On définit la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f : (x,y) \longmapsto \frac{1}{5}\left(x^2(1-x^2)+y^2(1-y^2)+2xy\right)$.

(1) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y) &= \begin{pmatrix}\partial_1 f(x,y)\\ \partial_2 f(x,y)\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}2x-4x^3+2y\\ 2y-4y^3+2x\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Calculons égalements les dérivées partielles d'ordre 2. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\partial^2_{1,1}f(x,y) &= \frac{2}{5}(1-6x^2)\\ \partial^2_{1,2}f(x,y) &= \partial^2_{2,1}f(x,y) \qquad \text{(par Schwarz car } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2\text{)}\\ &= \frac{2}{5}\\ \partial^2_{2,2}f(x,y) &= \frac{2}{5}(1-6y^2)\end{aligned}$$

Ceci permet de former la matrice hessienne de f. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$\nabla^2 f(x,y) = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}1-6x^2 & 1\\ 1 & 1-6y^2\end{pmatrix}.$$

(2) Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}(x,y) \text{ point critique de } f &\iff \nabla f(x,y)=(0,0)\\ &\iff \begin{cases}x-2x^3+y=0\\ y-2y^3+x=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x+y=2x^3\\ x+y=2y^3\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x+y=2x^3\\ x^3=y^3\end{cases}\end{aligned}$$

Comme la fonction cube est (bijective donc) injective, on a :

$$\begin{aligned}(x,y) \text{ point critique de } f &\iff \begin{cases}x+y=2x^3\\ x=y\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}2x=2x^3\\ x=y\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x(1-x^2)=0\\ x=y\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x=0\\ x=y\end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases}x=1\\ x=y\end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases}x=-1\\ x=y\end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi les points critiques de f sont $(0,0)$, $(1,1)$ et $(-1,-1)$.

(3) (a) La figure 1 représente les lignes de niveaux de f sur $[-2,2]\times[-2,2]$ avec ce qui semble être un pas de 0.1. La figure 2 représente la surface d'équation $z=f(x,y)$ sur le même domaine.

(b) Avec la figure 2, on remarque qu'au voisinage de $(1,1)$ et de $(-1,-1)$, il y a une "colline". Cela indique que f admet un maximum local en ces points. En revanche $(0,0)$ semble être un point selle. Avec la figure 1, au voisinage de $(1,1)$ et $(-1,-1)$, les lignes de niveaux ont tendance à se resserrer au fur et à mesure que le niveau augmente, cela traduit qu'il y a un maximum local en ces points. Les lignes de niveaux n'ont pas ce profil au voisinage de $(0,0)$. Ce serait donc un point selle.

(4) Pour déterminer la nature de chacun des trois points critiques, on raisonne avec le signe des valeurs propres de la hessienne. Observons alors que la matrice hessienne est la même aux points critiques $(1,1)$ et $(-1,-1)$. On nomme H_1 cette matrice.

$$\nabla^2 f(1,1) = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = H_1 = \nabla^2 f(-1,-1) = \frac{2}{5}M_1.$$

Cherchons les valeurs propres de M_1 qui ont le même signe que celles de H_1.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } M_1 &\iff M_1 - \lambda \text{ non inversible} \\ &\iff \det(M_1 - \lambda I) = 0 \\ &\iff \lambda^2 + 10\lambda - 1 = 0 \\ &\iff \lambda = -6 \text{ ou } \lambda = -4 \end{aligned}$$

Les deux valeurs propres sont strictement négatives. On a bien, comme conjecturé, un maximum local à la fois en $(1,1)$ et en $(-1,-1)$.

Pour le troisième point critique,

$$H_2 = \nabla^2 f(0,0) = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice n'est pas inversible. La méthode du signe des valeurs propres ne peut pas nous renseigner; il faut donc raisonner autrement. Il faut montrer que f ne présente ni un maximum local, ni un minimum local en $(0,0)$, par exemple en regardant dans deux directions différentes autour de $(0,0)$.

- Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,x) - f(0,0) = \frac{1}{5}(2x^2(1-x^2) + 2x^2) = \frac{2}{5}x^2(2-x^2).$$

Pour $x \in]0; \sqrt(2)[$, on a donc $f(x,x) > f(0,0)$. Ainsi f n'admet pas de maximum local en $(0,0)$.

- Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,-x) = \frac{1}{5}(2x^2(1-x^2) - 2x^2) = -\frac{2}{5}x^4.$$

Pour $x \neq 0$, on a donc $f(x,-x) < 0$. Ainsi f n'admet pas de minimum local en $(0,0)$.

On en déduit que $(0,0)$ est un point selle (ou point col).

(5) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,0) = x^2 - x^4 \to -\infty$, $x \to +\infty$ donc f n'est pas minorée.

(6) osons $g : t \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{2t}{5} - \dfrac{t^2}{10}$.

(a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (elle est polynomiale). Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g'(t) = \frac{2}{5} - \frac{t}{5} = \frac{2-t}{5}.$$

Il est facile de trouver le signe de $g'(t)$ et d'en déduire ses variations, ce qu'on résume dans le tableau ci-dessous

t	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$g(2)$	$\searrow$	$-\infty$

En particulier, g atteint un maximum en $t = 2$ qui vaut
$$g(2) = \frac{4}{5} - \frac{4}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$
et g n'est clairement par minorée (du fait des limites infinies).

(b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} g(x^2+y^2) - f(x,y) &= \frac{1}{5}\left(2(x^2+y^2) - \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2 - x^2 + x^4 - y^2 + y^4 - 2xy\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(x^2 + y^2 - \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{2} + x^4 + y^4 - 2xy\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(x^2 + -2xy + y^2 + \frac{x^4 - 2x^2y^2 + y^4}{2}\right) \\ &= \frac{1}{5}\left((x-y)^2 + \frac{(x^2-y^2)^2}{2}\right) \geq 0. \end{aligned}$$

donc $f(x, y) \leq g(x^2 + y^2)$.

(c) Il découle des deux dernières questions que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$f(x,y) \leq g(x^2+y^2) \leq \frac{2}{5}.$$
De plus, si f admet un maximum global, il est local et est donc atteint en un point critique. On a
$$f(0,0) = 0, \quad f(1,1) = \frac{1}{5}(0+0+2) = \frac{2}{5}, \quad \text{et} \quad f(1,1) = \frac{1}{5}(0+0+2) = \frac{2}{5}.$$
On en déduit que f possède un maximum global qui vaut $\frac{2}{5}$ et qui est atteint en $(1, 1)$ et $(-1, -1)$.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $(u_0, u_1) \in [0; 1]^2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$.

(7) (a) Par définition de la suite, on écrit

```
def suite(n,u0,u1):
    L=np.zeros(n+1)
    L[0]=u0
    L[1]=u1
    for k in range(n-1):
        L[k+2]=f(L[k],L[k+1])
    return L
```

(b) Sans difficulté non plus

```
def figure(n,u0,u1):
    L=suite(n,u0,u1)
    plt.plot(range(n+1),L)
    plt.show()
```

(c) Après observation de la figure, il est raisonnable de conjecturer que la suite (u_n) converge vers 0 quelles que soient les valeurs de u_0 et u_1 (comprises entre 0 et 1).

(8) On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = u_0$, $a_1 = u_1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \dfrac{2}{5}(a_n + a_{n+1})$.

(a) Si x et y sont dans $[0;1]$, alors $x^2(1-x^2) \geq 0$, $y^2(1-y^2) \geq 0$ et $xy \geq 0$ donc $f(x,y) \geq 0$. De plus on a vu que $f(x,y) \leq \dfrac{2}{5} \leq 1$.

Raisonnons donc par récurrence double.

- initialisation. Pour $n = 0$ et $n = 1$, les hypothèses de l'énoncé donnent bien $(u_0, u_1) \in [0,1]^2$.

- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \in [0;1]$ et $u_{n+1} \in [0;1]$. Montrons que $u_{n+2} \in [0;1]$. En utilisant ce qui précède on a
$$u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}) \in [0;1],$$
ce qui termine cette récurrence.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}) \leq g(u_n^2 + u_{n+1}^2) = \frac{2}{5}(u_n^2 + u_{n+1}^2) - \frac{1}{10}(u_n^2 + u_{n+1}^2) \leq \frac{2}{5}(u_n^2 + u_{n+1}^2).$$
Puisque u_n et u_{n+1} sont dans $[0;1]$ d'après la question précédente, on a $u_n^2 \leq u_n$ et $u_{n+1}^2 \leq u_{n+1}$ donc
$$u_{n+2} \leq \frac{2}{5}(u_n + u_{n+1}),$$
ce qu'on voulait.

(c) On procède à nouveau par récurrence double.

- initialisation. Pour $n = 0$ et $n = 1$, on a $a_0 = u_0$ et $a_1 = u_1$, et la propriété est trivialement vérifiée.

- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leq a_n$ et $u_{n+1} \leq a_{n+1}$. Montrons que $u_{n+2} \leq a_{n+2}$. On a alors, par la question précédente,
$$u_{n+2} \leq \frac{2}{5}(u_n + u_{n+1}) \leq \frac{2}{5}(a_n + a_{n+1}) = a_{n+2}$$
ce qui est bien la propriété au rang $n+2$ et termine cette récurrence.

(d) La suite (a_n) est récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est
$$r^2 = \frac{2}{5}r + \frac{2}{5},$$
i.e.
$$r^2 - \frac{2}{5}r - \frac{2}{5} = 0.$$
Son discriminant est $\dfrac{4}{25} - 4 \times \left(-\dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{4 \times 11}{25} > 0$ donc elle admet deux racines :
$$s = \frac{2/5 - 2\sqrt{11}/5}{2} = \frac{1-\sqrt{11}}{5} \qquad \text{et} \qquad t = \frac{2/5 + 2\sqrt{11}/5}{2} = \frac{1+\sqrt{11}}{5}.$$
Ainsi, d'après le cours, il existe des réels λ, μ (qui dépendent des valeurs initiales a_0 et a_1) tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_n = \lambda s^n + \mu t^n.$$

(e) Comme $9 < 11 < 16$, par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, $3 < \sqrt{11} < 4$ donc
$$\frac{4}{5} = \frac{1+3}{5} < \frac{1+\sqrt{11}}{5} < \frac{1+4}{5} = 1$$

et

$$-\frac{3}{5} = \frac{1-4}{5} < \frac{1+\sqrt{11}}{5} < \frac{1-3}{5} = -\frac{2}{5}$$

ce qui permet de voir que $|s| < 1$ et $|t| < 1$.
On en déduit que $s^n \to 0$ et $t^n \to 0$ donc $a_n \to 0$. Finalement, par théorème d'encadrement (puisque $0 \leq u_n \leq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), $u_n \to 0$, ce qui est bien ce qu'on avait conjecturé à la Question (7c).

Exercice 3

*Ce court exercice est inspiré par un exercice d'oral de l'**ESM**, pour la session 2019.*

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$, la fonction f_n par

$$f_n(x) = x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

(1) (a) La fonction de densité de la loi normale est donnée par

$$\varphi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{f_0(x)}{\sqrt{2\pi}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

On sait que φ est paire, et que son intégrale sur $\mathbb{R}$ converge et vaut 1. Il en découle que l'intégrale de f_0 sur $[0; +\infty[$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} f_0(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

(b) L'intégrale est impropre en $+\infty$; sur $[0; 1]$, f_n est continue et l'intégrale existe. Par croissance comparée, on a

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{n+2}e^{-x^2+2} = 0$$

ou encore que,

$$f_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right), \qquad x \to +\infty.$$

Comme, par le critère de Riemann, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge et que la fonction f_n est positive, le critère de comparaison par négligeabilité permet d'affirmer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ est également convergente. Au final, on a bien la convergence de l'intégrale considérée. On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t.$$

(2) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A > 0$. On va procéder par intégration par parties, et ce manière un peu astucieuse dans le "découpage" de la fonction dans l'intégrale. En effet, posons

$$\left\{\begin{array}{rcl} u' & = & xe^{-x^2/2} \\ v & = & x^{n+1} \end{array}\right. \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{rcl} u & = & -e^{-x^2/2} \\ v & = & (n+1)x^n \end{array}\right.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; A]$ rendant l'intégration par parties licite et permettant d'écrire

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^A x^{n+2}e^{-x^2/2}\mathrm{d}x & = & \left[-x^{n+1}e^{-x^2/2}\right]_0^A + (n+1)\displaystyle\int_0^A x^n e^{-x^2/2}\mathrm{d}x \\ & = & -A^{n+1}e^{-A^2/2} + (n+1)\displaystyle\int_0^A f_n(x)\mathrm{d}x \\ & \underset{A+\to+\infty}{\longrightarrow} & (n+1)I_{n-2} \end{array}$$

par croissance comparée et car $\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ converge. Au final, on a bien

$$I_{n+2} = (n+1)I_n.$$

(3) Python. On utilise la relation de récurrence pour calculer I_n à l'aide d'une boucle. On utilise une boucle for, mais avec un pas de 2.

```python
def I(n) :
    if (-1)**n == 1 : # si n est pair
        x=np.sqrt(np.pi/2)
        for k in np.arange(0, n, 2) :
            x=(k+1)*x
    else :
        x=1
        for k in np.arange(1, n, 2):
            x=(k+1)*x
    return x
```

(4) Soit $A > 0$.

$$\begin{aligned}\int_0^A xe^{-x^2/2}\mathrm{d}x &= \left[-e^{x^2}/2\right]_0^A \\ &= -e^{-A^2/2}+1 \\ &\underset{A + \to +\infty}{\longrightarrow} 1.\end{aligned}$$

Ainsi, on a $I_1 = 1$.

(5) Montrons les formules demandées par récurrences.

- Initialisation. Pour $n = 0$, on a
$$I_0 = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(0)!}{2^0 0!}$$
car $0! = 1$.On a également
$$I_1 = 1 = 2^0 0!.$$
Donc les formules sont vraies pour $n = 0$.

- Hérédité. Supposons les deux formules vérifiées pour un certain $n \in \mathbb{N}$. D'une part
$$\begin{aligned}I_{2(n+1)} &= I_{2n+2} = (n+1)I_n \\ &= (2n+1)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!} \qquad \text{(par HR)} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(2n+2)}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!} \\ &= \frac{(2n+2)!}{2(n+1)2^n n!}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{(2(n+1)!}{2^{n+1}(n+1)!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$
ce qui est bien la première formule au rang $n+1$. D'autre part,
$$\begin{aligned}I_{2(n+1)+1} &= I_{2n+3} = (2n+2)I_{2n+1} \\ &= (2n+2)2^n n! = 2(n+1)2^n n! \\ &= 2^{n+1}(n+1)!\end{aligned}$$
et on a encore l'autre formule au rang $n+1$, ce qui termine la récurrence.

Problème

*Cet exercice provient du sujet **EDHEC 2023**.*
On renvoie donc à la solution en ligne, en cliquant ici et on remercie Tom Dutilleul (Lycée Carnot, Paris 17e) pour l'avoir écrite.