Devoir Surveillé n°5 a.k.a Der des der

Samedi 16 Mars
Durée : 4 heures

Dans tout le sujet, on suppose déjà importées sous leur alias habituels les bibliothèques Python usuelles.

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
```

Problème 1

On souhaite étudier dans ce problème l'équation différentielle linéaire d'ordre 3:

$$(E) : \varphi''' + 2\varphi'' - \varphi' - 2\varphi = (-12t + 5)e^{2t}$$

d'inconnue φ une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note (E_0) l'équation différentielle homogène associée:

$$(E_0) : \varphi''' + 2\varphi'' - \varphi' - 2\varphi = 0$$

Partie I : Étude d'une matrice

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(1) (a) On exécute le script Python suivant:

```python
I = np.eye(3)
A = np.array([[0,1,0],[0,0,1],[2,1,-2]])
B = np.dot(A-I, A+I)
C = np.dot(B, A+2*I)
print(C)
```

et il renvoie:

Affichage Python

```
>>>
[[0 0 0],
 [0 0 0],
 [0 0 0]]
```

Que peut-on en déduire ?

(b) Donner les valeurs propres possibles de A.

(2) (a) Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$ et une base de chacun des sous-espaces propres de A.

(b) Justifier que A est diagonalisable puis expliciter une matrice $P \in \mathcal{M}_3$ inversible, dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et une matrice $D \in \mathcal{M}_3$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, qui vérifient $A = PDP^{-1}$.

Partie II : Calcul des solutions générales de (E)

On note S l'ensemble des solutions de (E) et S_0 l'ensemble des solutions de (E_0).

On note $X : t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \end{pmatrix}$ où φ est une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

(3) Montrer que φ est solution de (E_0) si et seulement si $X' = AX$.

(4) (a) Déterminer les solutions générales du système différentiel linéaire $X' = AX$.
(On utilisera les notations C_1, C_2 et C_3 pour nommer les constantes indéterminées)
(b) Expliciter l'ensemble S_0.

(5) (a) Déterminer deux réels a et b tels que la fonction $g : t \mapsto (at+b)\mathrm{e}^{2t}$ soit solution particulière de (E).
(*On commencera par calculer et mettre sous forme factorisée $g'(t)$, $g''(t)$ et $g'''(t)$.*)
(b) Montrer que φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de (E_0), où g est la solution particulière déterminée à la question précédente.
(c) En déduire l'ensemble S.

Partie III : Etude d'une famille de problèmes de Cauchy

On s'intéresse dans cette partie aux problèmes de Cauchy de la forme:

$$(P_{u,v}) : \begin{cases} \varphi''' + 2\varphi'' - \varphi' - 2\varphi = (-12t+5)\mathrm{e}^{2t} \\ \varphi(0) = 1 \\ \varphi'(0) = u \\ \varphi''(0) = v \end{cases} \qquad \text{où } (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

(6) Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Montrer qu'il existe une unique solution au problème de Cauchy $(P_{u,v})$ et qu'il s'agit de la fonction:

$$\varphi_{u,v} : t \mapsto \left(\frac{1}{3}v - 1\right)\mathrm{e}^{-2t} + \left(-\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{5}{2}\right)\mathrm{e}^{-t} + \left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{6}v - \frac{5}{2}\right)\mathrm{e}^{t} + (-t+2)\mathrm{e}^{2t}$$

(b) Calculer $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \varphi_{u,v}(t)$.

(7) (a) Expliciter, pour tout $t \geq 0$, $\varphi_{0,1}(t)$.
(b) En déduire une fonction Python, d'en-tête `def phi(t)`, qui prend en entrée un réel $t \geq 0$ et renvoie le réel $\varphi_{0,1}(t)$.
(c) Dire, parmi les quatre représentations graphiques de fonctions ci-dessous, laquelle correspond au graphe de $\varphi_{0,1}$. On expliquera son raisonnement en notant ψ_i la fonction associée au tracé numéro i.

Figure 1

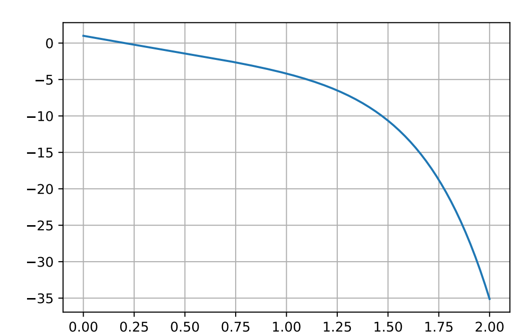


Figure 2

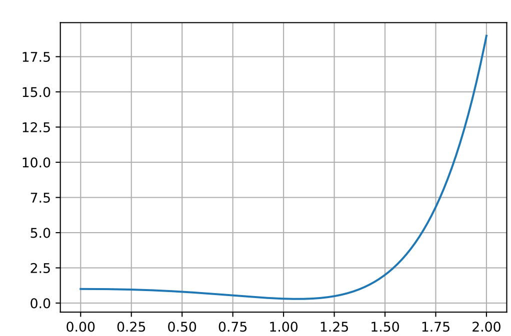


Figure 3

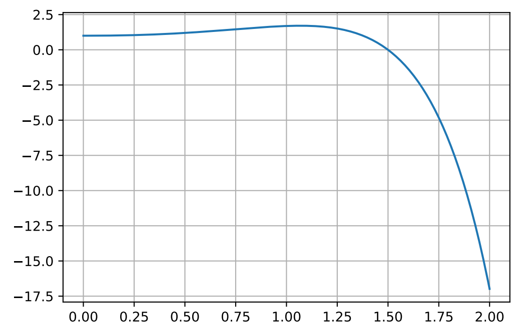
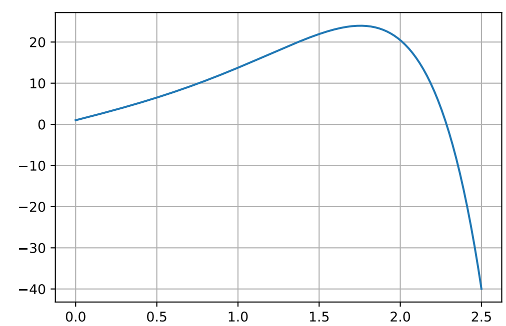


Figure 4



(d) Montrer: $\varphi_{0,1}(2) = \mathrm{e}^2\left(\dfrac{6-7\mathrm{e}^4}{3\mathrm{e}^4} - \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-6}\right)$. En déduire qu'il existe $t \in]0,2[$ tel que $\varphi_{0,1}(t) = 0$.

(e) Recopier et compléter la fonction en langage Python suivante, prenant en entrée un réel strictement positif `eps`, et renvoyant une valeur approchée d'un zéro de la fonction $\varphi_{0,1}$ à `eps` près en appliquant l'algorithme de dichotomie.

```
def dichotomie(eps):
    a = 0
    b = 2
    while .........  :
        c = (a+b)/2
        if ............  :
            b = c
        else:
            .............
    return ..........
```

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables

On considère le fermé $F = [0,1]^2$ et l'ouvert $U =]0,1[^2$.
On note f la fonction de deux variables définie sur F par :

$$\forall (x,y) \in F,\ \ f(x,y) = \varphi_{x,y}(1)$$

(On s'intéresse ici à l'évolution au temps 1 *des solutions des problèmes de Cauchy étudiés à la partie précédente.)*

(8) Représenter l'ouvert U ainsi que le bord de F sur un même graphique, dans un repère orthonormé.

(9) Montrer qu'il existe trois constantes α, β et γ (que l'on explicitera) telles que:

$$\forall (x,y) \in F,\ \ f(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma.$$

(10) Démontrer que f admet un maximum global sur F.

(11) (a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.
(b) La fonction f admet-elle des points critiques sur U ? Si oui, les donner.
(c) En déduire que le maximum global de f sur F ne peut pas être atteint sur U.
(Il est donc nécessairement atteint sur le bord de F.)

(12) (a) Montrer: $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.
(b) En déduire que le maximum global de f sur F est atteint en un unique point (x_0, y_0) dont on explicitera les coordonnées.
(c) Parmi les deux tracés de lignes de niveaux ci-dessous, lequel correspond à la fonction f ?

Figure 5

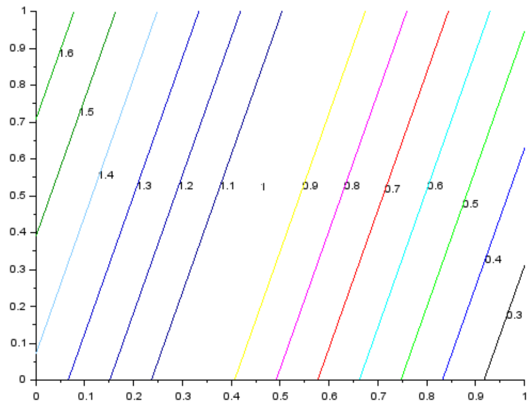
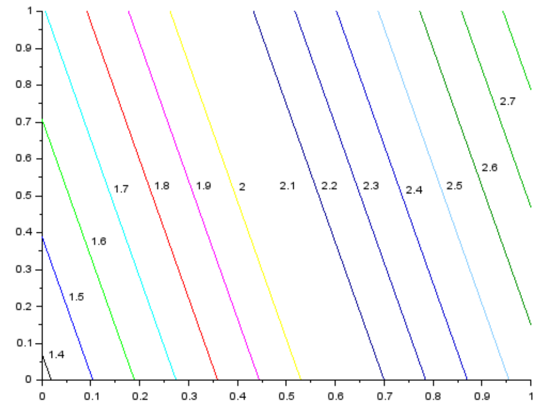


Figure 6



Problème 2

Partie I : Motivation, définitions et résultat préliminaire

On s'intéresse dans ce problème à une modélisation particulière de la durée de vie d'un composant électronique ou électrique (par exemple d'une ampoule ou d'un pixel d'écran).

Définition

Soit X une variable aléatoire à densité. On dit que X suit une loi **sans mémoire** si,

- X est à valeurs positives ;
- pour tout $t \geq 0$ et pour tout $x \geq 0$, $P(X > t) > 0$ et
$$P_{[X>t]}(X > t + x) = P(X > x).$$

Soit X est une variable aléatoire discrète à valeurs entières, on dit que X suit une loi **sans mémoire** si,

- X est à valeurs positives ;
- pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $P(X > k) > 0$ et
$$P_{[X>k]}(X > k + j) = P(X > j).$$

On peut interpréter la définition comme suit; si le composant a déjà survécu un temps t, la probabilité qu'il survive un temps x supplémentaire est la même qu'au tout début de son utilisation. Tout se passe comme si le composant avait *oublié* qu'il avait déjà vécu un temps t.

(1) Soit X une variable aléatoire qui suit une loi sans mémoire. Montrer que $P(X > 0) = 1$ puis que $P(X = 0) = 0$.

On pourra ainsi considérer dans la suite que $X(\Omega) \subset]0, +\infty[$ si X suit une loi sans mémoire.

Partie II : Loi géométrique

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théorème

Soit X une variable aléatoire. Les deux propriétés qui suivent sont équivalentes :

(i) $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ où $p \in]0, 1[$.

(ii) X est discrète à valeurs entières et X suit une loi sans mémoire.

(2) Soit $p \in]0,1[$ et soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. On pose $q = 1 - p$.

(a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X > k) = q^k$.
(b) Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $j \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$P_{[X>k]}(X > k + j) = P(X > j).$$

(c) Conclure.

(3) Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs entières et qui suit une loi sans mémoire. On pose $q = P(X > 1)$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = P(X > k)$.

(a) Justifier : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
(b) Justifier : $q > 0$.
(c) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} = qu_k$. En déduire une expression simple de u_k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
(d) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = u_{k-1} - u_k$.
(e) Montrer que $q < 1$. On pourra faire un raisonnement par l'absurde.
(f) Conclure.

(4) On dispose de la fonction Python ci-dessous. De quel nombre l'appel `simul(100000)` donne-t-il une approximation ? On justifera soigneusement la réponse.

```
def simul(N):
    c = 0
    tirages = 0
    while tirages < N:
        X = rd.geometric(1/2)
        if X > 2:
            tirages = tirages + 1
            if X > 5:
                c = c + 1
    return c / N
```

Partie III : Loi exponentielle

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théorème

Soit X une variable aléatoire. Les deux propriétés qui suivent sont équivalentes :
(i) $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ où $\lambda > 0$;
(ii) X suit une loi sans mémoire et X admet une densité f qui est nulle sur $]-\infty, 0[$, continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$ et continue à droite en 0.

(5) Soit $\lambda > 0$ et soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

(a) On note f la densité usuelle de X. Rappeler l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
(b) Vérifier que f est nulle sur $]-\infty, 0[$, continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$ et continue à droite en 0.
(c) Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $P(X > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
(d) Conclure.

(6) Soit X une variable aléatoire suivant une loi sans mémoire admettant une densité f nulle sur $]-\infty, 0[$, continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$ et continue à droite en 0.
On note $G : x \mapsto P(X > x)$ (on appelle G la fonction de *survie* de X). On pose $\lambda = f(0)$.

(a) Donner la valeur de $F_X(x)$ pour $x \leq 0$. Rappeler la valeur de $G(0)$.
(b) Justifier que G est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

(c) (i) Montrer que, pour tout $t \geq 0$ et pour tout $x \geq 0$, $G(t+x) = G(t)G(x)$.
(ii) Montrer que, pour tout $t > 0$ et pour tout $x > 0$, $G'(t+x) = G(t)G'(x)$.
(iii) En déduire que, pour tout $t > 0$, $G'(t) = -\lambda G(t)$.
(On fera le lien entre la fonction G' et la fonction f.)
(iv) Justifier que $\lambda \geq 0$ puis montrer que $\lambda > 0$. On pourra faire un raisonnement par l'absurde pour la deuxième inégalité.
(v) Montrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t > 0$, $G(t) = C\mathrm{e}^{-\lambda t}$, puis déterminer la valeur de C.

(d) Conclure.

Partie IV : De la loi exponentielle à la loi géométrique

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théorème

Soit $\lambda > 0$ et soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. On pose $Y = \lfloor X \rfloor + 1$. Alors $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right)$.

(7) On pose $Z = \lfloor X \rfloor$.

(a) Déterminer $Z(\Omega)$.
(b) Calculer, pour tout $k \in Z(\Omega)$, $P(Z = k)$.

(8) Conclure.

(9) (a) Écrire une fonction Python, d'en-tête `def partieEnt(x)`, qui prend en paramètre un réel $x \geq 0$ et renvoie $\lfloor x \rfloor$.
(b) Compléter le programme Python suivant pour qu'il simule la variable aléatoire Y (on note `lam` le réel λ).

```
def simulY(lam):
    X = rd.exponential(1 / lam)
    return ....
```

Partie V : De la loi géométrique à la loi exponentielle

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théorème

Soit $\lambda > 0$ et soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels dans $]0,1[$ qui vérifie :

$$\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda.$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{G}(p_n)$.

Alors la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{X_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X.

(10) Soit $x \leq 0$. Donner la valeur de $F_{Y_n}(x)$.

(11) Soit $x > 0$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_{Y_n}(x) = 1 - (1 - p_n)^{\lfloor nx \rfloor}$.
(b) Montrer que $\lfloor nx \rfloor \sim nx$, $n \to +\infty$.
(c) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x)$.

(12) Conclure.