Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir Surveillé n°5 a.k.a Der des der

Solution

Les deux exercices de ce dernier sujet sont des créations originales de Tom Dutilleul (Lycée Carnot, Paris 17e) et il en est de même pour les solutions qui sont jointes ci-après.
On le remercie encore pour ce travail et ce partage.

DS8 (vA) - Correction

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy`, `numpy.random` et `matplotlib.pyplot` de **Python** sont importées sous leurs alias habituels (`np`, `rd` et `plt`).

Problème (sujet maison)

On souhaite étudier dans ce problème l'équation différentielle linéaire d'ordre 3 :

$$(E) : \varphi''' + 2\varphi'' - \varphi' - 2\varphi = (-12t + 5)\mathrm{e}^{2t}$$

d'inconnue φ une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note (E_0) l'équation différentielle homogène associée :

$$(E_0) : \varphi''' + 2\varphi'' - \varphi' - 2\varphi = 0$$

Partie I : Étude d'une matrice

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. a) On exécute le script suivant :

```
I = np.eye(3)
A = np.array([[0,1,0],[0,0,1],[2,1,-2]])
B = np.dot(A-I, A+I)
C = np.dot(B, A+2*I)
print(C)
```

et il renvoie :

```
[[0  0  0]
 [0  0  0]
 [0  0  0]]
```

Que peut-on en déduire ?

Démonstration. On peut en déduire que $(A - I_3)(A + I_3)(A + 2I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : le polynôme } P(x) = (x-1)(x+1)(x+2) \text{ est un polynôme annulateur de } A.}$$

□

b) Donner les valeurs propres possibles de A.

Démonstration. D'après la question précédente, P étant un polynôme annulateur de A :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } P\} = \{-2, -1, 1\}$$

$$\boxed{\text{Les valeurs propres possibles de } A \text{ sont : } -2,\ -1 \text{ et } 1.}$$

□

2. ***a)*** Déterminer $\text{Sp}(A)$ et une base de chacun des sous-espaces propres de A.

Démonstration. Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
U \in E_{-2}(A) &\iff (A+2I)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + z = 0 \\ 0 = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x = -y \\ z = -2y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -\frac{1}{2}y \\ z = -2y \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
E_{-2}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -\frac{1}{2}y \quad \text{et} \quad z = -2y \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}y \\ y \\ -2y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \\
&= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$E_{-2}(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ donc -2 est valeur propre de A. De plus, la famille $\mathcal{F}_{-2} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$:

— engendre $E_{-2}(A)$

— est libre car constituée d'un unique vecteur non nul

donc $\boxed{\mathcal{F}_{-2} \text{ est une base de } E_{-2}(A)}$.

- Ensuite :

$$\begin{aligned}
U \in E_{-1}(A) &\iff (A+I)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x + y & = 0 \\ y + z & = 0 \\ 2x + y - z & = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + y & = 0 \\ y + z & = 0 \\ -y - z & = 0 \end{cases} && L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\
&\iff \begin{cases} x + y & = 0 \\ y + z & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases} && L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\
&\iff \begin{cases} x = -y \\ z = -y \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
E_{-1}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -y \quad \text{et} \quad z = -y \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ -y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$E_{-1}(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ donc -1 est valeur propre de A. De plus, la famille $\mathcal{F}_{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

— engendre $E_{-1}(A)$

— est libre car constituée d'un unique vecteur non nul

donc $\boxed{\mathcal{F}_{-1} \text{ est une base de } E_{-1}(A)}$.

- Enfin :

$$\begin{aligned}
U \in E_1(A) &\iff (A - I)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ - y + z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ - y + z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\
&\iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ - y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \\
&\iff \begin{cases} x = y \\ z = y \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
E_1(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = y \quad \text{et} \quad z = y \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$E_1(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ donc 1 est valeur propre de A. De plus, la famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

— engendre $E_1(A)$

— est libre car constituée d'un unique vecteur non nul

donc $\boxed{\mathcal{F}_1 \text{ est une base de } E_1(A)}$.

Les valeurs propres possibles de A sont $-2, -1, 1$ et on a vérifié que chacune d'elles est une valeur propre de A. Donc

$$\boxed{\text{Sp}(A) = \{-2, -1, 1\}}$$

□

b) Justifier que A est diagonalisable puis expliciter une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, qui vérifient $A = PDP^{-1}$.

Démonstration. La matrice A est carrée d'ordre 3 et admet trois valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable. Ainsi, il existe :

- une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, obtenue en concaténant les bases des sous-espaces propres de A
- une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A

telles que $A = PDP^{-1}$.

On pose alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{D'après la formule de changement de base, on a bien } A = PDP^{-1}.}$$

□

Partie II : Calcul des solutions générales de (E)

On note S l'ensemble des solutions de (E) et S_0 l'ensemble des solutions de (E_0).

On note $X : t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \end{pmatrix}$ où φ est une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que φ est solution de (E_0) si et seulement si $X' = AX$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} X' = AX &\iff \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \\ \varphi'''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \\ \varphi'''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \\ 2\varphi(t) + \varphi'(t) - 2\varphi''(t) \end{pmatrix} \\ &\iff \varphi'''(t) = 2\varphi(t) + \varphi'(t) - 2\varphi''(t) \\ &\iff \varphi \text{ est solution de } (E_0) \end{aligned}$$

□

4. ***a)*** Déterminer les solutions générales du système différentiel linéaire $X' = AX$.
(On utilisera les notations C_1, C_2 et C_3 pour nommer les constantes indéterminées)

Démonstration. D'après la partie I, la matrice A est diagonalisable, $\mathrm{Sp}(A) = \{-2, -1, 1\}$ et la famille $(U_{-2}, U_{-1}, U_1) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A (pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, U_λ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ). On en déduit, d'après le cours, que les solutions générales du système différentiel linéaire $X' = AX$ sont de la forme :

$$t \mapsto C_1 \mathrm{e}^{-2t} U_{-2} + C_2 \mathrm{e}^{-t} U_{-1} + C_3 \mathrm{e}^{t} U_1$$

où $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$. □

b) Expliciter l'ensemble S_0.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\varphi \in S_0 &\iff \varphi \text{ est solution de } (E_0) \\
&\iff X' = AX && \textit{(d'après la question 3)} \\
&\iff \exists (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t} + C_3 e^t \\ -2C_1 e^{-2t} - C_2 e^{-t} + C_3 e^t \\ 4C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t} + C_3 e^t \end{pmatrix} && \textit{(d'après la question 4.a))} \\
&\iff \exists (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t} + C_3 e^t && \textit{(en ne gardant que la première coordonnée)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } S_0 = \left\{ t \mapsto C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t} + C_3 e^t \mid (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}}$$

□

5. a) Déterminer deux réels a et b tels que la fonction $g : t \mapsto (at + b)e^{2t}$ soit une solution particulière de (E).
(*Indication : commencer par calculer et mettre sous forme factorisée $g'(t)$, $g''(t)$ et $g'''(t)$.*)

Démonstration. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et soit $g : t \mapsto (at + b)e^{2t}$. La fonction g est dérivable trois fois sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables trois fois sur $\mathbb{R}$.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
g'(t) &= a e^{2t} + 2(at + b)e^{2t} = (2at + a + 2b)e^{2t} \\
g''(t) &= 2a e^{2t} + 2(2at + a + 2b)e^{2t} = (4at + 4a + 4b)e^{2t} \\
g'''(t) &= 4a e^{2t} + 2(4at + 4a + 4b)e^{2t} = (8at + 12a + 8b)e^{2t}
\end{aligned}$$

Il suit :

$$\begin{aligned}
g'''(t) + 2g''(t) - g'(t) - 2g(t) &= -2(at + b)e^{2t} \\
&\quad - \ (2at + a + 2b)e^{2t} \\
&\quad + 2(4at + 4a + 4b)e^{2t} \\
&\quad + \ (8at + 12a + 8b)e^{2t} \\
&= (12at + 19a + 12b)e^{2t}
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
g'''(t) + 2g''(t) - g'(t) - 2g(t) = (-12t + 5)e^{2t} &\iff (12at + 19a + 12b)e^{2t} = (-12t + 5)e^{2t} \\
&\iff (12at + 19a + 12b) = (-12t + 5)
\end{aligned}$$

On en déduit, par identification des coefficients :

$$\begin{aligned}
g \text{ est une solution particulière de } (E) &\iff \begin{cases} 12a & = -12 \\ 19a + 12b = 5 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a & = -1 \\ & b = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La fonction } g : t \mapsto (-t + 2)e^{2t} \text{ est une solution particulière de } (E).}$$

□

b) Montrer que φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de (E_0), où g est la solution particulière déterminée à la question précédente.

Démonstration. Raisonnons par double implication.

- Supposons que φ soit solution de (E).
  Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(\varphi - g)'''(t) + 2(\varphi - g)''(t) - (\varphi - g)'(t) - 2(\varphi - g)(t) &= \varphi'''(t) + 2\varphi''(t) - \varphi'(t) - 2\varphi(t) \\ &\quad - (g'''(t) + 2g''(t) - g'(t) - 2g(t)) \\ &= (-12t+5)\mathrm{e}^{2t} - (-12t+5)\mathrm{e}^{2t} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{et donc } \varphi - g \text{ est solution de } (E_0).}$$

- Supposons que $\varphi - g$ soit solution de (E_0).
  Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(\varphi - g)'''(t) + 2(\varphi - g)''(t) - (\varphi - g)'(t) - 2(\varphi - g)(t) = 0$$

  et donc, en utilisant le fait que g est solution de (E) :

$$\varphi'''(t) + 2\varphi''(t) - \varphi'(t) - 2\varphi(t) = g'''(t) + 2g''(t) - g'(t) - 2g(t) = (-12t+5)\mathrm{e}^{2t}$$

$$\boxed{\text{ceci permet de conclure que } \varphi \text{ est solution de } (E).}$$

□

c) En déduire l'ensemble S.

Démonstration. En traduisant le résultat de la question ***5.b)***, on a

$$\varphi \in S \iff \varphi - g \in S_0$$

Ainsi, d'après la question ***4.b)***,

$$\begin{aligned}\varphi \in S &\iff \exists (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) - g(t) = C_1 \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 \mathrm{e}^{t} \\ &\iff \exists (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = C_1 \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 \mathrm{e}^{t} + (-t+2)\mathrm{e}^{2t}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } S = \left\{ t \mapsto C_1 \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 \mathrm{e}^{t} + (-t+2)\mathrm{e}^{2t} \mid (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}}$$

□

Partie III : Etude d'une famille de problèmes de Cauchy

On s'intéresse dans cette partie aux problèmes de Cauchy de la forme :

$$(P_{u,v}) : \begin{cases} \varphi''' + 2\varphi'' - \varphi' - 2\varphi = (-12t+5)\mathrm{e}^{2t} \\ \varphi(0) = 1 \\ \varphi'(0) = u \\ \varphi''(0) = v \end{cases} \qquad \text{où } (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

6. Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

a) Montrer qu'il existe une unique solution au problème de Cauchy $(P_{u,v})$ et qu'il s'agit de la fonction :

$$\varphi_{u,v} : t \mapsto \left(\frac{1}{3}v - 1\right) \mathrm{e}^{-2t} + \left(-\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{5}{2}\right) \mathrm{e}^{-t} + \left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{6}v - \frac{5}{2}\right) \mathrm{e}^{t} + (-t+2)\mathrm{e}^{2t}$$

Démonstration. Soit φ une solution de (E). Il existe $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = C_1 \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 \mathrm{e}^{t} + (-t+2)\mathrm{e}^{2t}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= -2C_1 \mathrm{e}^{-2t} - C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 \mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{2t} + 2(-t+2)\mathrm{e}^{2t} \\ &= -2C_1 \mathrm{e}^{-2t} - C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 \mathrm{e}^{t} + (-2t+3)\mathrm{e}^{2t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= 4C_1 \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 \mathrm{e}^{t} - 2\mathrm{e}^{2t} + 2(-2t+3)\mathrm{e}^{2t} \\ &= 4C_1 \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 \mathrm{e}^{t} + (-4t+4)\mathrm{e}^{2t} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= C_1 + C_2 + C_3 + 2 \\ \varphi'(0) &= -2C_1 - C_2 + C_3 + 3 \\ \varphi''(0) &= 4C_1 + C_2 + C_3 + 4 \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\varphi \text{ est solution de } (P_{u,v}) \iff \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 + 2 = 1 \\ -2C_1 - C_2 + C_3 + 3 = u \\ 4C_1 + C_2 + C_3 + 4 = v \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = -1 \\ -2C_1 - C_2 + C_3 = u - 3 \\ 4C_1 + C_2 + C_3 = v - 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = -1 & \\ C_2 + 3C_3 = u - 5 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ -3C_2 - 3C_3 = v & L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = -1 & \\ C_2 + 3C_3 = u - 5 & \\ 6C_3 = 3u + v - 15 & L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 6C_1 + 6C_2 = -3u - v + 9 & L_1 \leftarrow 6L_1 - L_3 \\ 2C_2 = -u - v + 5 & L_2 \leftarrow 2L_2 - L_3 \\ 6C_3 = 3u + v - 15 & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 6C_1 = 2v - 6 & L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ 2C_2 = -u - v + 5 & \\ 6C_3 = 3u + v - 15 & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} C_1 = \frac{1}{3}v - 1 \\ C_2 = -\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{5}{2} \\ C_3 = \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}v - \frac{5}{2} \end{cases}$$

Ceci démontre qu'il existe une unique solution au problème de Cauchy $(P_{u,v})$ et qu'il s'agit de la fonction :

$$\boxed{\varphi_{u,v} : t \mapsto \left(\frac{1}{3}v - 1\right) e^{-2t} + \left(-\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{5}{2}\right) e^{-t} + \left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{6}v - \frac{5}{2}\right) e^{t} + (-t+2)e^{2t}}$$

□

b) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi_{u,v}(t)$.

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\varphi_{u,v}(t) = e^{2t} \left(\left(\frac{1}{3}v - 1\right) e^{-4t} + \left(-\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{5}{2}\right) e^{-3t} + \left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{6}v - \frac{5}{2}\right) e^{-t} + (-t+2) \right)$$

Tout d'abord :

$$\lim_{t \to +\infty} \left(\frac{1}{3}v - 1\right) e^{-4t} + \left(-\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{5}{2}\right) e^{-3t} + \left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{6}v - \frac{5}{2}\right) e^{-t} = 0$$

Ensuite :

$$\lim_{t \to +\infty} (-t+2) = -\infty$$

Enfin :

$$\lim_{t \to +\infty} e^{2t} = +\infty$$

$$\boxed{\text{Par somme et produit : } \lim_{t \to +\infty} \varphi_{u,v}(t) = -\infty}$$

□

7. a) Expliciter, pour tout $t \geqslant 0$, $\varphi_{0,1}(t)$.

Démonstration. Soit $t \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}\varphi_{0,1}(t) &= \left(\frac{1}{3} - 1\right) e^{-2t} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) e^{-t} + \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{2}\right) e^{t} + (-t+2)e^{2t} \\ &= -\frac{2}{3}e^{-2t} + 2e^{-t} - \frac{7}{3}e^{t} + (-t+2)e^{2t}\end{aligned}$$

□

b) En déduire une fonction **Python**, nommée `phi(t)`, qui prend en entrée un réel $t \geqslant 0$ et renvoie le réel $\varphi_{0,1}(t)$.

Démonstration. On propose la fonction **Python** suivante :

```
def phi(t):
    return - (2/3) * np.exp(-2*t) + 2 * np.exp(-t)
            - (7/3) * np.exp(t) + (-t+2)*np.exp(2*t)
```

□

c) Dire, parmi les quatre représentations graphiques de fonctions ci-dessous, laquelle correspond au graphe de $\varphi_{0,1}$. On expliquera son raisonnement en notant ψ_i la fonction associée au tracé numéro i.

Démonstration.

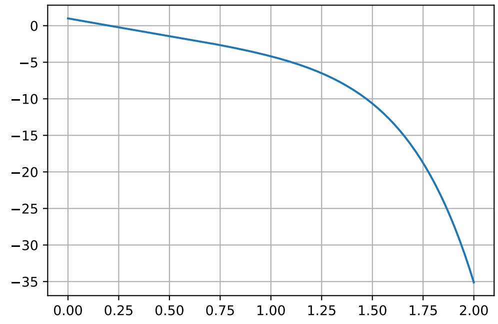


Fig. 1 Tracé 1

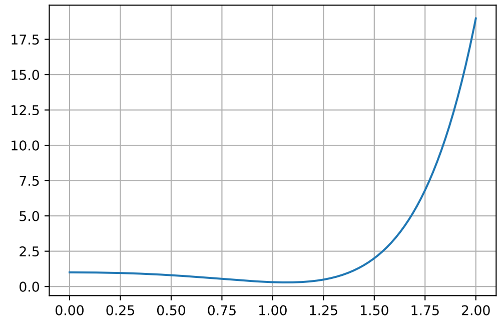


Fig. 2 Tracé 2

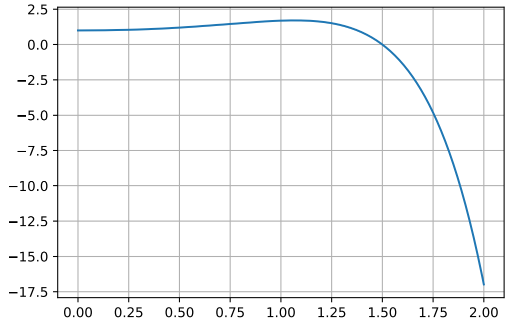


Fig. 3 Tracé 3

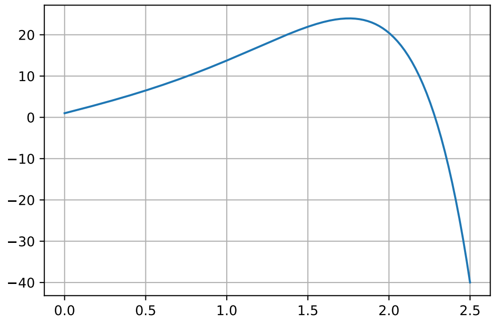


Fig. 4 Tracé 4

- La fonction ψ_2 vérifie : $\lim\limits_{t\to+\infty} \psi_2(t) = +\infty$. Ainsi, d'après la question ***6.b)***, le tracé numéro 2 ne correspond pas à $\varphi_{0,1}$.
- Par définition, $\varphi_{0,1}'(0) = 0$. Or, on remarque que $\psi_1'(0) < 0$ et $\psi_4'(0) > 0$. Donc les tracés numéros 1 et 4 ne peuvent pas correspondre à $\varphi_{0,1}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que c'est le tracé numéro 3 qui correspond au graphe de } \varphi_{0,1}.}$$

$\square$

d) Montrer : $\varphi_{0,1}(2) = \mathrm{e}^2 \left(\dfrac{6-7\mathrm{e}^4}{3\mathrm{e}^4} - \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-6} \right)$. En déduire qu'il existe $t \in]0, 2[$ tel que $\varphi_{0,1}(t) = 0$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\varphi_{0,1}(2) &= -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4} + 2\mathrm{e}^{-2} - \frac{7}{3}\mathrm{e}^2 \\
&= \mathrm{e}^2 \left(-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-6} + 2\mathrm{e}^{-4} - \frac{7}{3} \right) \\
&= \mathrm{e}^2 \left(\frac{2}{\mathrm{e}^4} - \frac{7}{3} - \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-6} \right) \\
&= \mathrm{e}^2 \left(\frac{6-7\mathrm{e}^4}{\mathrm{e}^4} - \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-6} \right)
\end{aligned}$$

- Par définition, $\varphi_{0,1}(0) = 1 > 0$.

- D'après le calcul précédent, en utilisant le fait que $e^4 > 2 > \frac{6}{7}$, on a également $\varphi_{0,1}(2) < 0$.

De plus, la fonction $\varphi_{0,1}$ est continue sur $[0,2]$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $t \in]0,2[$ tel que $\varphi_{0,1}(t) = 0$.

$\square$

e) Recopier et compléter la fonction en langage **Python** suivante, prenant en entrée un réel strictement positif `eps`, et renvoyant une valeur approchée d'un zéro de la fonction $\varphi_{0,1}$ à `eps` près en appliquant l'algorithme de dichotomie.

```
def dichotomie(eps):
    a = _____
    b = _____
    while ______________ :
        c = (a+b)/2
        if phi(c) < 0:
            _________
        else:
            _________
    return (a+b)/2
```

Démonstration. On propose de compléter le programme de la manière suivante :

```
def dichotomie(eps):
    a = 0
    b = 2
    while b-a > eps :
        c = (a+b)/2
        if phi(c) < 0:
            b = c
        else:
            a = c
    return (a+b)/2
```

$\square$

Partie IV : Etude d'une fonction de deux variables

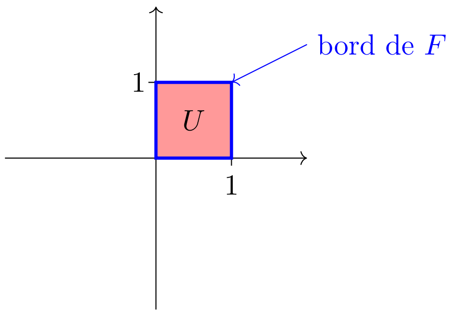
On considère le fermé $F = [0,1]^2$ et l'ouvert $U =]0,1[^2$.
On note f la fonction de deux variables définies sur F par :

$$\forall (x,y) \in F,\ f(x,y) = \varphi_{x,y}(1)$$

(On s'intéresse ici à l'évolution au temps 1 *des solutions des problèmes de Cauchy étudiés à la partie précédente.)*

8. Représenter l'ouvert U ainsi que le bord de F sur un même graphique, dans un repère orthonormé.

Démonstration. On représente U en rouge et le bord de F en bleu.



□

9. Montrer qu'il existe trois constantes α, β et γ (que l'on explicitera) telles que :

$$\forall (x,y) \in F,\ f(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma$$

Démonstration. Soit $(x,y) \in F$.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \varphi_{x,y}(1) \\ &= \left(\frac{1}{3}y - 1\right) \mathrm{e}^{-2} + \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{5}{2}\right) \mathrm{e}^{-1} + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}y - \frac{5}{2}\right) \mathrm{e}^{1} + (-1+2)\mathrm{e}^{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}\right) x + \left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} + \frac{1}{6}\mathrm{e}\right) y - \mathrm{e}^{-2} + \frac{5}{2}\mathrm{e}^{-1} - \frac{5}{2}\mathrm{e} + \mathrm{e}^{2} \\ &= \alpha x + \beta y + \gamma \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}\right) \\ \beta &= \left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} + \frac{1}{6}\mathrm{e}\right) \\ \gamma &= -\mathrm{e}^{-2} + \frac{5}{2}\mathrm{e}^{-1} - \frac{5}{2}\mathrm{e} + \mathrm{e}^{2} \end{aligned}$$

□

10. Démontrer que f admet un maximum global sur F.

Démonstration. La fonction f est continue sur F (car polynomiale) et F est un fermé borné.

$$\boxed{\text{D'après le cours, on en déduit que } f \text{ admet un maximum global sur } F.}$$

□

11. ***a)*** Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

Démonstration. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car polynomiale (d'après la question ***9***). □

b) La fonction f admet-elle des points critiques sur U ? Si oui, les donner.

Démonstration. Soit $(x,y) \in U$.

$$\begin{aligned} (x,y) \text{ est un point critique de } f &\iff \begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Or, $\alpha \neq 0$ (car $\mathrm{e} > 2$ donc $\mathrm{e} \neq \mathrm{e}^{-1}$) donc f n'admet aucun point critique sur U. □

c) En déduire que le maximum global de f sur F ne peut pas être atteint sur U.
(Il est donc nécessairement atteint sur le bord de F.)

Démonstration.
Notons $(x_0, y_0) \in F$ un point où f atteint son maximum global sur F.
Supposons que $(x_0, y_0) \in U$.
L'ensemble U étant un ouvert et f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, le point (x_0, y_0) est nécessairement un point critique de f. Or, d'après la question ***11.b)***, f n'admet aucun point critique sur U.
C'est absurde.

$$\boxed{\text{On peut conclure que } (x_0, y_0) \notin U \text{ et donc } (x_0, y_0) \in F \setminus U \text{ (c'est-à-dire le bord de } F\text{).}}$$

□

12. a) Montrer : $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Démonstration.
- On sait que $\mathrm{e} > 2$ et donc $\mathrm{e}^{-1} < 1 < \mathrm{e}$.

$$\boxed{\text{D'où : } \alpha = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}\right) > 0.}$$

- On remarque que :

$$\beta = \left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} + \frac{1}{6}\mathrm{e}\right) = \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-2}\left(2 + \mathrm{e}^3 - 3\mathrm{e}\right) = \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-2}\left(2 + \mathrm{e}(\mathrm{e}^2 - 3)\right)$$

Or, $\mathrm{e}^2 > 4 > 3$.

$$\boxed{\text{D'où : } \beta > 0.}$$

□

b) En déduire que le maximum global de f sur F est atteint en un unique point (x_0, y_0) dont on explicitera les coordonnées.

Démonstration. Soit $(x, y) \in F$. On a $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \alpha x \leqslant \alpha$ et $0 \leqslant \beta y \leqslant \beta$.
En sommant ces deux inégalités, on obtient :

$$\alpha x + \beta y \leqslant \alpha + \beta$$

D'où

$$f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma \leqslant \alpha + \beta + \gamma = f(1, 1)$$

$$\boxed{\text{Ceci prouve que } f \text{ atteint son maximum global sur } F \text{ au point } (1, 1).}$$

De plus, si $x < 1$ ou $y < 1$, alors

$$f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma < \alpha + \beta + \gamma = f(1, 1)$$

$$\boxed{\text{Ceci prouve que le maximum global de } f \text{ sur } F \text{ est atteint uniquement en } (1, 1).}$$

□

c) Parmi les deux tracés de lignes de niveaux ci-dessous, lequel correspond à la fonction f ?

Démonstration. Il s'agit du tracé numéro 2, car on remarque que la valeur inscrite sur les lignes de niveaux augmente lorsque l'on se rapproche du point $(1, 1)$, contrairement à ce que l'on peut observer sur le tracé numéro 1. □

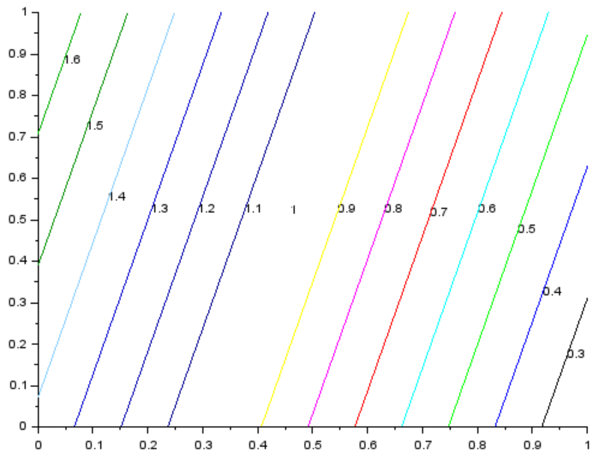


Fig. 5 Tracé 1

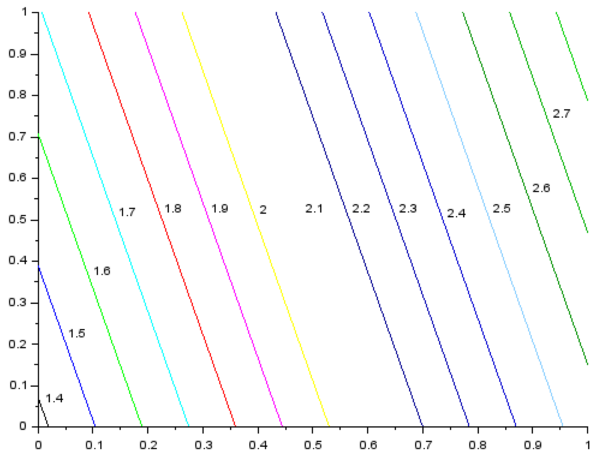


Fig. 6 Tracé 2