Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir Surveillé n°5 a.k.a Der des der

Solution

Les deux exercices de ce dernier sujet sont des créations originales de Tom Dutilleul (Lycée Carnot, Paris 17e) et il en est de même pour les solutions qui sont jointes ci-après.
On le remercie encore pour ce travail et ce partage.

DS8 (vA) - Correction

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy`, `numpy.random` et `matplotlib.pyplot` de **Python** sont importées sous leurs alias habituels (`np`, `rd` et `plt`).

Problème (sujet maison)

On souhaite étudier dans ce problème l'équation différentielle linéaire d'ordre 3 :

$$(E) : \varphi''' + 2\varphi'' - \varphi' - 2\varphi = (-12t + 5)e^{2t}$$

d'inconnue φ une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note (E_0) l'équation différentielle homogène associée :

$$(E_0) : \varphi''' + 2\varphi'' - \varphi' - 2\varphi = 0$$

Partie I : Étude d'une matrice

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. a) On exécute le script suivant :

```
I = np.eye(3)
A = np.array([[0,1,0],[0,0,1],[2,1,-2]])
B = np.dot(A-I, A+I)
C = np.dot(B, A+2*I)
print(C)
```

et il renvoie :

```
[[0  0  0]
 [0  0  0]
 [0  0  0]]
```

Que peut-on en déduire ?

Démonstration. On peut en déduire que $(A - I_3)(A + I_3)(A + 2I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : le polynôme } P(x) = (x-1)(x+1)(x+2) \text{ est un polynôme annulateur de } A.}$$

□

b) Donner les valeurs propres possibles de A.

Démonstration. D'après la question précédente, P étant un polynôme annulateur de A :

$$\text{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } P\} = \{-2, -1, 1\}$$

$$\boxed{\text{Les valeurs propres possibles de } A \text{ sont : } -2,\ -1 \text{ et } 1.}$$

□

2. ***a)*** Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$ et une base de chacun des sous-espaces propres de A.

Démonstration. Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
U \in E_{-2}(A) &\iff (A+2I)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&\iff \begin{cases} 2x = -y \\ z = -2y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -\frac{1}{2}y \\ z = -2y \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
E_{-2}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -\frac{1}{2}y \quad \text{et} \quad z = -2y \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}y \\ y \\ -2y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$E_{-2}(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ donc -2 est valeur propre de A. De plus, la famille $\mathcal{F}_{-2} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$:

— engendre $E_{-2}(A)$

— est libre car constituée d'un unique vecteur non nul

donc $\boxed{\mathcal{F}_{-2} \text{ est une base de } E_{-2}(A)}$.

- Ensuite :

$$\begin{aligned}
U \in E_{-1}(A) &\iff (A+I)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\\
&\iff \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases} x+y = 0\\ y+z = 0\\ 2x+y-z = 0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x+y = 0\\ y+z = 0\\ -y-z = 0\end{cases} && L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1\\
&\iff \begin{cases} x+y = 0\\ y+z = 0\\ 0 = 0\end{cases} && L_3 \leftarrow L_3 + L_2\\
&\iff \begin{cases} x = -y\\ z = -y\end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
E_{-1}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -y \quad \text{et} \quad z = -y\right\}\\
&= \left\{ \begin{pmatrix}-y\\y\\-y\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y \in \mathbb{R}\right\}\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

$E_{-1}(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ donc -1 est valeur propre de A. De plus, la famille $\mathcal{F}_{-1} = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$:

— engendre $E_{-1}(A)$

— est libre car constituée d'un unique vecteur non nul

donc $\boxed{\mathcal{F}_{-1} \text{ est une base de } E_{-1}(A)}$.

- Enfin :

$$\begin{aligned}
U \in E_1(A) &\iff (A-I)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\\
&\iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases} -x+y = 0\\ \quad -y+z=0\\ 2x+y-3z=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} -x+y = 0\\ \quad -y+z=0\\ \quad 3y-3z=0\end{cases} && L_3 \leftarrow L_3+2L_1\\
&\iff \begin{cases} -x+y = 0\\ \quad -y+z=0\\ \quad 0=0\end{cases} && L_3 \leftarrow L_3+3L_2\\
&\iff \begin{cases} x = y\\ z=y\end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
E_1(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x=y \quad \text{et} \quad z=y\right\}\\
&= \left\{ \begin{pmatrix} y\\ y\\ y\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y\in\mathbb{R}\right\}\\
&= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

$E_1(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ donc 1 est valeur propre de A. De plus, la famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right)$:

— engendre $E_1(A)$

— est libre car constituée d'un unique vecteur non nul

donc $\boxed{\mathcal{F}_1 \text{ est une base de } E_1(A)}$.

Les valeurs propres possibles de A sont $-2, -1, 1$ et on a vérifié que chacune d'elles est une valeur propre de A. Donc

$$\boxed{\text{Sp}(A) = \{-2, -1, 1\}}$$

□

b) Justifier que A est diagonalisable puis expliciter une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, et une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, qui vérifient $A = PDP^{-1}$.

Démonstration. La matrice A est carrée d'ordre 3 et admet trois valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable. Ainsi, il existe :

- une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, obtenue en concaténant les bases des sous-espaces propres de A
- une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A

telles que $A = PDP^{-1}$.

On pose alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{D'après la formule de changement de base, on a bien } A = PDP^{-1}.}$$

□

Partie II : Calcul des solutions générales de (E)

On note S l'ensemble des solutions de (E) et S_0 l'ensemble des solutions de (E_0).

On note $X : t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \end{pmatrix}$ où φ est une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que φ est solution de (E_0) si et seulement si $X' = AX$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} X' = AX &\iff \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \\ \varphi'''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \\ \varphi'''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \\ 2\varphi(t) + \varphi'(t) - 2\varphi''(t) \end{pmatrix} \\ &\iff \varphi'''(t) = 2\varphi(t) + \varphi'(t) - 2\varphi''(t) \\ &\iff \varphi \text{ est solution de } (E_0) \end{aligned}$$

□

4. ***a)*** Déterminer les solutions générales du système différentiel linéaire $X' = AX$.
(On utilisera les notations C_1, C_2 et C_3 pour nommer les constantes indéterminées)

Démonstration. D'après la partie I, la matrice A est diagonalisable, $\mathrm{Sp}(A) = \{-2, -1, 1\}$ et la famille $(U_{-2}, U_{-1}, U_1) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A (pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, U_λ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ). On en déduit, d'après le cours, que les solutions générales du système différentiel linéaire $X' = AX$ sont de la forme :

$$t \mapsto C_1 \mathrm{e}^{-2t} U_{-2} + C_2 \mathrm{e}^{-t} U_{-1} + C_3 \mathrm{e}^{t} U_1$$

où $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$. □

b) Expliciter l'ensemble S_0.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\varphi \in S_0 &\iff \varphi \text{ est solution de } (E_0) \\
&\iff X' = AX && \textit{(d'après la question \textbf{3})} \\
&\iff \exists (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} C_1 \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 \mathrm{e}^{t} \\ -2C_1 \mathrm{e}^{-2t} - C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 \mathrm{e}^{t} \\ 4C_1 \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix} && \textit{(d'après la question \textbf{4.a)})} \\
&\iff \exists (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = C_1 \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 \mathrm{e}^{t} && \textit{(en ne gardant que la première coordonnée)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } S_0 = \left\{ t \mapsto C_1 \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 \mathrm{e}^{t} \mid (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}}$$

□

5. a) Déterminer deux réels a et b tels que la fonction $g : t \mapsto (at + b)\mathrm{e}^{2t}$ soit une solution particulière de (E).
(*Indication : commencer par calculer et mettre sous forme factorisée $g'(t)$, $g''(t)$ et $g'''(t)$.*)

Démonstration. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et soit $g : t \mapsto (at + b)\mathrm{e}^{2t}$. La fonction g est dérivable trois fois sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables trois fois sur $\mathbb{R}$.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
g'(t) &= a\mathrm{e}^{2t} + 2(at + b)\mathrm{e}^{2t} = (2at + a + 2b)\mathrm{e}^{2t} \\
g''(t) &= 2a\mathrm{e}^{2t} + 2(2at + a + 2b)\mathrm{e}^{2t} = (4at + 4a + 4b)\mathrm{e}^{2t} \\
g'''(t) &= 4a\mathrm{e}^{2t} + 2(4at + 4a + 4b)\mathrm{e}^{2t} = (8at + 12a + 8b)\mathrm{e}^{2t}
\end{aligned}$$

Il suit :

$$\begin{aligned}
g'''(t) + 2g''(t) - g'(t) - 2g(t) &= -2(at + b)\mathrm{e}^{2t} \\
&\quad - \ (2at + a + 2b)\mathrm{e}^{2t} \\
&\quad + 2(4at + 4a + 4b)\mathrm{e}^{2t} \\
&\quad + \ (8at + 12a + 8b)\mathrm{e}^{2t} \\
&= (12at + 19a + 12b)\mathrm{e}^{2t}
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
g'''(t) + 2g''(t) - g'(t) - 2g(t) = (-12t + 5)\mathrm{e}^{2t} &\iff (12at + 19a + 12b)\mathrm{e}^{2t} = (-12t + 5)\mathrm{e}^{2t} \\
&\iff (12at + 19a + 12b) = (-12t + 5)
\end{aligned}$$

On en déduit, par identification des coefficients :

$$\begin{aligned}
g \text{ est une solution particulière de } (E) &\iff \begin{cases} 12a = -12 \\ 19a + 12b = 5 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La fonction } g : t \mapsto (-t + 2)\mathrm{e}^{2t} \text{ est une solution particulière de } (E).}$$

□

b) Montrer que φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de (E_0), où g est la solution particulière déterminée à la question précédente.

Démonstration. Raisonnons par double implication.

- Supposons que φ soit solution de (E).
  Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(\varphi-g)'''(t)+2(\varphi-g)''(t)-(\varphi-g)'(t)-2(\varphi-g)(t) &= \varphi'''(t)+2\varphi''(t)-\varphi'(t)-2\varphi(t)\\ &\quad -\left(g'''(t)+2g''(t)-g'(t)-2g(t)\right)\\ &= (-12t+5)\mathrm{e}^{2t}-(-12t+5)\mathrm{e}^{2t}\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{et donc } \varphi-g \text{ est solution de } (E_0).}$$

- Supposons que $\varphi-g$ soit solution de (E_0).
  Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(\varphi-g)'''(t)+2(\varphi-g)''(t)-(\varphi-g)'(t)-2(\varphi-g)(t)=0$$

  et donc, en utilisant le fait que g est solution de (E) :

$$\varphi'''(t)+2\varphi''(t)-\varphi'(t)-2\varphi(t)=g'''(t)+2g''(t)-g'(t)-2g(t)=(-12t+5)\mathrm{e}^{2t}$$

$$\boxed{\text{ceci permet de conclure que } \varphi \text{ est solution de } (E).}$$

□

c) En déduire l'ensemble S.

Démonstration. En traduisant le résultat de la question ***5.b)***, on a

$$\varphi \in S \iff \varphi-g \in S_0$$

Ainsi, d'après la question ***4.b)***,

$$\begin{aligned}\varphi \in S &\iff \exists (C_1,C_2,C_3)\in\mathbb{R}^3, \forall t\in\mathbb{R}, \varphi(t)-g(t)=C_1\mathrm{e}^{-2t}+C_2\mathrm{e}^{-t}+C_3\mathrm{e}^{t}\\ &\iff \exists (C_1,C_2,C_3)\in\mathbb{R}^3, \forall t\in\mathbb{R}, \varphi(t)=C_1\mathrm{e}^{-2t}+C_2\mathrm{e}^{-t}+C_3\mathrm{e}^{t}+(-t+2)\mathrm{e}^{2t}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } S=\left\{t\mapsto C_1\mathrm{e}^{-2t}+C_2\mathrm{e}^{-t}+C_3\mathrm{e}^{t}+(-t+2)\mathrm{e}^{2t} \mid (C_1,C_2,C_3)\in\mathbb{R}^3\right\}}$$

□

Partie III : Etude d'une famille de problèmes de Cauchy

On s'intéresse dans cette partie aux problèmes de Cauchy de la forme :

$$(P_{u,v}) : \begin{cases}\varphi'''+2\varphi''-\varphi'-2\varphi=(-12t+5)\mathrm{e}^{2t}\\ \varphi(0)=1\\ \varphi'(0)=u\\ \varphi''(0)=v\end{cases} \qquad \text{où } (u,v)\in\mathbb{R}^2.$$

6. Soit $(u,v)\in\mathbb{R}^2$.

a) Montrer qu'il existe une unique solution au problème de Cauchy $(P_{u,v})$ et qu'il s'agit de la fonction :

$$\varphi_{u,v} : t \mapsto \left(\frac{1}{3}v-1\right)\mathrm{e}^{-2t}+\left(-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}v+\frac{5}{2}\right)\mathrm{e}^{-t}+\left(\frac{1}{2}u+\frac{1}{6}v-\frac{5}{2}\right)\mathrm{e}^{t}+(-t+2)\mathrm{e}^{2t}$$

Démonstration. Soit φ une solution de (E). Il existe $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = C_1 \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 \mathrm{e}^{t} + (-t+2)\mathrm{e}^{2t}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= -2C_1 \mathrm{e}^{-2t} - C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 \mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{2t} + 2(-t+2)\mathrm{e}^{2t} \\ &= -2C_1 \mathrm{e}^{-2t} - C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 \mathrm{e}^{t} + (-2t+3)\mathrm{e}^{2t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi''(t) &= 4C_1 \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 \mathrm{e}^{t} - 2\mathrm{e}^{2t} + 2(-2t+3)\mathrm{e}^{2t} \\ &= 4C_1 \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 \mathrm{e}^{t} + (-4t+4)\mathrm{e}^{2t}\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= C_1 + C_2 + C_3 + 2 \\ \varphi'(0) &= -2C_1 - C_2 + C_3 + 3 \\ \varphi''(0) &= 4C_1 + C_2 + C_3 + 4\end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ est solution de } (P_{u,v}) &\iff \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 + 2 = 1 \\ -2C_1 - C_2 + C_3 + 3 = u \\ 4C_1 + C_2 + C_3 + 4 = v \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = -1 \\ -2C_1 - C_2 + C_3 = u - 3 \\ 4C_1 + C_2 + C_3 = v - 4 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = -1 & \\ C_2 + 3C_3 = u - 5 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ -3C_2 - 3C_3 = v & L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = -1 & \\ C_2 + 3C_3 = u - 5 & \\ 6C_3 = 3u + v - 15 & L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 6C_1 + 6C_2 = -3u - v + 9 & L_1 \leftarrow 6L_1 - L_3 \\ 2C_2 = -u - v + 5 & L_2 \leftarrow 2L_2 - L_3 \\ 6C_3 = 3u + v - 15 & \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 6C_1 = 2v - 6 & L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ 2C_2 = -u - v + 5 & \\ 6C_3 = 3u + v - 15 & \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} C_1 = \frac{1}{3}v - 1 \\ C_2 = -\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{5}{2} \\ C_3 = \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}v - \frac{5}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ceci démontre qu'il existe une unique solution au problème de Cauchy $(P_{u,v})$ et qu'il s'agit de la fonction :

$$\boxed{\varphi_{u,v} : t \mapsto \left(\frac{1}{3}v - 1\right) \mathrm{e}^{-2t} + \left(-\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{5}{2}\right) \mathrm{e}^{-t} + \left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{6}v - \frac{5}{2}\right) \mathrm{e}^{t} + (-t+2)\mathrm{e}^{2t}}$$

$\square$

b) Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi_{u,v}(t)$.

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\varphi_{u,v}(t) = \mathrm{e}^{2t} \left(\left(\frac{1}{3}v - 1\right) \mathrm{e}^{-4t} + \left(-\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{5}{2}\right) \mathrm{e}^{-3t} + \left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{6}v - \frac{5}{2}\right) \mathrm{e}^{-t} + (-t+2) \right)$$

Tout d'abord :

$$\lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{3}v - 1\right) \mathrm{e}^{-4t} + \left(-\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{5}{2}\right) \mathrm{e}^{-3t} + \left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{6}v - \frac{5}{2}\right) \mathrm{e}^{-t} = 0$$

Ensuite :

$$\lim_{t\to+\infty} (-t+2) = -\infty$$

Enfin :

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{2t} = +\infty$$

$$\boxed{\text{Par somme et produit : } \lim_{t\to+\infty} \varphi_{u,v}(t) = -\infty}$$

$\square$

7. a) Expliciter, pour tout $t \geqslant 0$, $\varphi_{0,1}(t)$.

Démonstration. Soit $t \geqslant 0$.

$$\begin{aligned} \varphi_{0,1}(t) &= \left(\frac{1}{3} - 1\right) \mathrm{e}^{-2t} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) \mathrm{e}^{-t} + \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{2}\right) \mathrm{e}^{t} + (-t+2)\mathrm{e}^{2t} \\ &= -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^{-t} - \frac{7}{3}\mathrm{e}^{t} + (-t+2)\mathrm{e}^{2t} \end{aligned}$$

$\square$

b) En déduire une fonction **Python**, nommée `phi(t)`, qui prend en entrée un réel $t \geqslant 0$ et renvoie le réel $\varphi_{0,1}(t)$.

Démonstration. On propose la fonction **Python** suivante :

```
def phi(t):
    return - (2/3) * np.exp(-2*t) + 2 * np.exp(-t)
             - (7/3) * np.exp(t) + (-t+2)*np.exp(2*t)
```

$\square$

c) Dire, parmi les quatre représentations graphiques de fonctions ci-dessous, laquelle correspond au graphe de $\varphi_{0,1}$. On expliquera son raisonnement en notant ψ_i la fonction associée au tracé numéro i.

Démonstration.

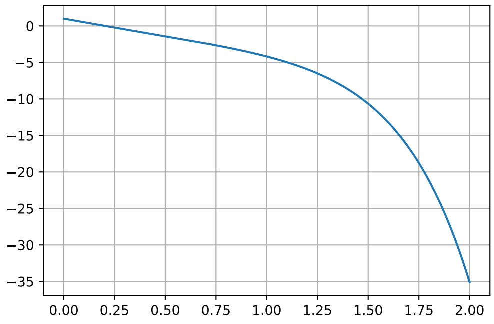


Fig. 1 Tracé 1

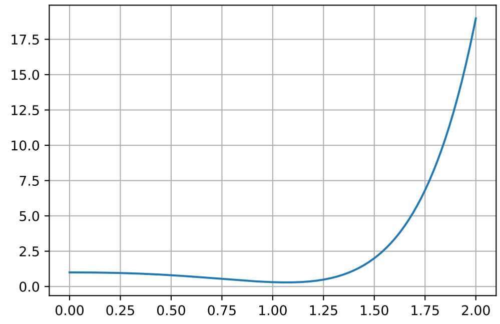


Fig. 2 Tracé 2

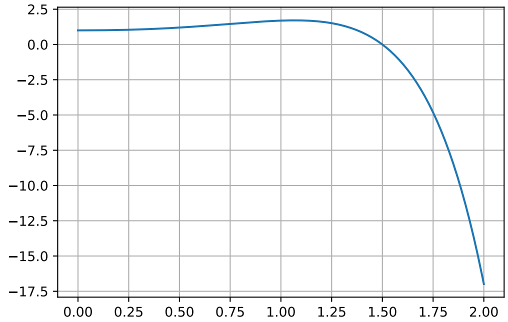


Fig. 3 Tracé 3

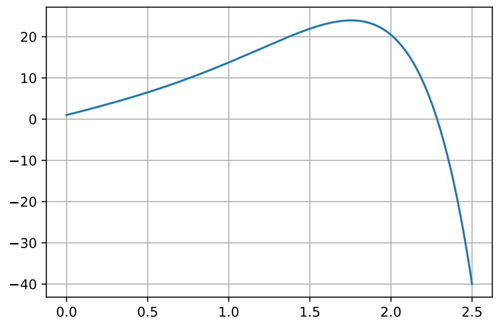


Fig. 4 Tracé 4

- La fonction ψ_2 vérifie : $\lim\limits_{t \to +\infty} \psi_2(t) = +\infty$. Ainsi, d'après la question ***6.b)***, le tracé numéro 2 ne correspond pas à $\varphi_{0,1}$.
- Par définition, $\varphi'_{0,1}(0) = 0$. Or, on remarque que $\psi'_1(0) < 0$ et $\psi'_4(0) > 0$. Donc les tracés numéros 1 et 4 ne peuvent pas correspondre à $\varphi_{0,1}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que c'est le tracé numéro 3 qui correspond au graphe de } \varphi_{0,1}.}$$

$\square$

d) Montrer : $\varphi_{0,1}(2) = \mathrm{e}^2 \left(\dfrac{6 - 7\mathrm{e}^4}{3\mathrm{e}^4} - \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-6} \right)$. En déduire qu'il existe $t \in]0, 2[$ tel que $\varphi_{0,1}(t) = 0$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\varphi_{0,1}(2) &= -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4} + 2\mathrm{e}^{-2} - \frac{7}{3}\mathrm{e}^2 \\
&= \mathrm{e}^2 \left(-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-6} + 2\mathrm{e}^{-4} - \frac{7}{3} \right) \\
&= \mathrm{e}^2 \left(\frac{2}{\mathrm{e}^4} - \frac{7}{3} - \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-6} \right) \\
&= \mathrm{e}^2 \left(\frac{6 - 7\mathrm{e}^4}{\mathrm{e}^4} - \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-6} \right)
\end{aligned}$$

- Par définition, $\varphi_{0,1}(0) = 1 > 0$.

- D'après le calcul précédent, en utilisant le fait que $e^4 > 2 > \dfrac{6}{7}$, on a également $\varphi_{0,1}(2) < 0$.

De plus, la fonction $\varphi_{0,1}$ est continue sur $[0, 2]$.

$$\boxed{\text{D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel } t \in]0, 2[\text{ tel que } \varphi_{0,1}(t) = 0.}$$

$\square$

e) Recopier et compléter la fonction en langage **Python** suivante, prenant en entrée un réel strictement positif `eps`, et renvoyant une valeur approchée d'un zéro de la fonction $\varphi_{0,1}$ à `eps` près en appliquant l'algorithme de dichotomie.

```
def dichotomie(eps):
    a = _____
    b = _____
    while ______________ :
        c = (a+b)/2
        if phi(c) < 0:
            _________
        else:
            _________
    return (a+b)/2
```

Démonstration. On propose de compléter le programme de la manière suivante :

```
def dichotomie(eps):
    a = 0
    b = 2
    while b-a > eps :
        c = (a+b)/2
        if phi(c) < 0:
            b = c
        else:
            a = c
    return (a+b)/2
```

$\square$

Partie IV : Etude d'une fonction de deux variables

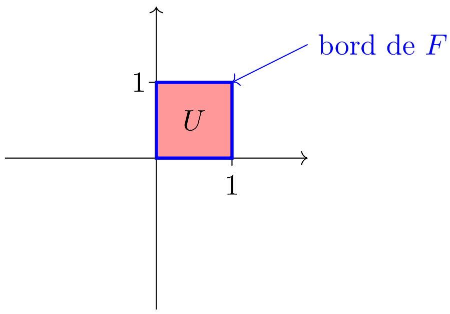
On considère le fermé $F = [0, 1]^2$ et l'ouvert $U =]0, 1[^2$.
On note f la fonction de deux variables définies sur F par :

$$\forall (x, y) \in F,\ f(x, y) = \varphi_{x,y}(1)$$

(On s'intéresse ici à l'évolution au temps 1 *des solutions des problèmes de Cauchy étudiés à la partie précédente.)*

8. Représenter l'ouvert U ainsi que le bord de F sur un même graphique, dans un repère orthonormé.

Démonstration. On représente U en rouge et le bord de F en bleu.



$\square$

9. Montrer qu'il existe trois constantes α, β et γ (que l'on explicitera) telles que :

$$\forall (x,y) \in F,\ f(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma$$

Démonstration. Soit $(x,y) \in F$.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \varphi_{x,y}(1) \\ &= \left(\frac{1}{3}y - 1\right) \mathrm{e}^{-2} + \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{5}{2}\right) \mathrm{e}^{-1} + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}y - \frac{5}{2}\right) \mathrm{e}^{1} + (-1+2)\mathrm{e}^{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}\right) x + \left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} + \frac{1}{6}\mathrm{e}\right) y - \mathrm{e}^{-2} + \frac{5}{2}\mathrm{e}^{-1} - \frac{5}{2}\mathrm{e} + \mathrm{e}^{2} \\ &= \alpha x + \beta y + \gamma \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}\right) \\ \beta &= \left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} + \frac{1}{6}\mathrm{e}\right) \\ \gamma &= -\mathrm{e}^{-2} + \frac{5}{2}\mathrm{e}^{-1} - \frac{5}{2}\mathrm{e} + \mathrm{e}^{2} \end{aligned}$$

$\square$

10. Démontrer que f admet un maximum global sur F.

Démonstration. La fonction f est continue sur F (car polynomiale) et F est un fermé borné.

$$\boxed{\text{D'après le cours, on en déduit que } f \text{ admet un maximum global sur } F.}$$

$\square$

11. ***a)*** Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

Démonstration. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car polynomiale (d'après la question ***9***). $\square$

b) La fonction f admet-elle des points critiques sur U ? Si oui, les donner.

Démonstration. Soit $(x,y) \in U$.

$$\begin{aligned} (x,y) \text{ est un point critique de } f &\iff \begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Or, $\alpha \neq 0$ (car $\mathrm{e} > 2$ donc $\mathrm{e} \neq \mathrm{e}^{-1}$) donc f n'admet aucun point critique sur U. $\square$

c) En déduire que le maximum global de f sur F ne peut pas être atteint sur U.
(Il est donc nécessairement atteint sur le bord de F.)

Démonstration.
Notons $(x_0, y_0) \in F$ un point où f atteint son maximum global sur F.
Supposons que $(x_0, y_0) \in U$.
L'ensemble U étant un ouvert et f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, le point (x_0, y_0) est nécessairement un point critique de f. Or, d'après la question ***11.b)***, f n'admet aucun point critique sur U. C'est absurde.

$$\boxed{\text{On peut conclure que } (x_0, y_0) \notin U \text{ et donc } (x_0, y_0) \in F \setminus U \text{ (c'est-à-dire le bord de } F\text{).}}$$

□

12. ***a)*** Montrer : $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Démonstration.
- On sait que $\mathrm{e} > 2$ et donc $\mathrm{e}^{-1} < 1 < \mathrm{e}$.

$$\boxed{\text{D'où : } \alpha = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}\right) > 0.}$$

- On remarque que :

$$\beta = \left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} + \frac{1}{6}\mathrm{e}\right) = \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-2}\left(2 + \mathrm{e}^3 - 3\mathrm{e}\right) = \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-2}\left(2 + \mathrm{e}(\mathrm{e}^2 - 3)\right)$$

Or, $\mathrm{e}^2 > 4 > 3$.

$$\boxed{\text{D'où : } \beta > 0.}$$

□

b) En déduire que le maximum global de f sur F est atteint en un unique point (x_0, y_0) dont on explicitera les coordonnées.

Démonstration. Soit $(x, y) \in F$. On a $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \alpha x \leqslant \alpha$ et $0 \leqslant \beta y \leqslant \beta$.
En sommant ces deux inégalités, on obtient :

$$\alpha x + \beta y \leqslant \alpha + \beta$$

D'où

$$f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma \leqslant \alpha + \beta + \gamma = f(1, 1)$$

$$\boxed{\text{Ceci prouve que } f \text{ atteint son maximum global sur } F \text{ au point } (1, 1).}$$

De plus, si $x < 1$ ou $y < 1$, alors

$$f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma < \alpha + \beta + \gamma = f(1, 1)$$

$$\boxed{\text{Ceci prouve que le maximum global de } f \text{ sur } F \text{ est atteint uniquement en } (1, 1).}$$

□

c) Parmi les deux tracés de lignes de niveaux ci-dessous, lequel correspond à la fonction f ?

Démonstration. Il s'agit du tracé numéro 2, car on remarque que la valeur inscrite sur les lignes de niveaux augmente lorsque l'on se rapproche du point $(1, 1)$, contrairement à ce que l'on peut observer sur le tracé numéro 1. □

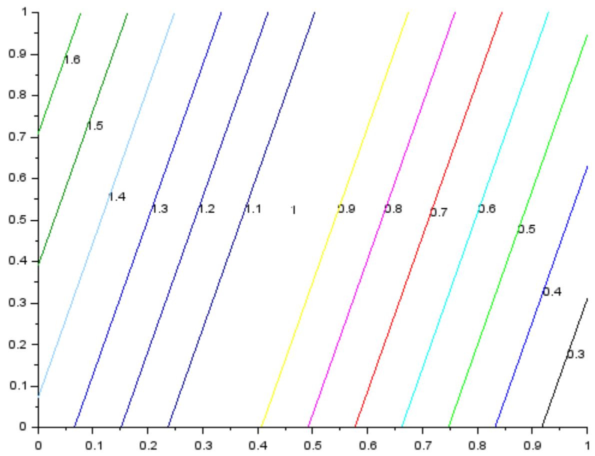


Fig. 5 Tracé 1

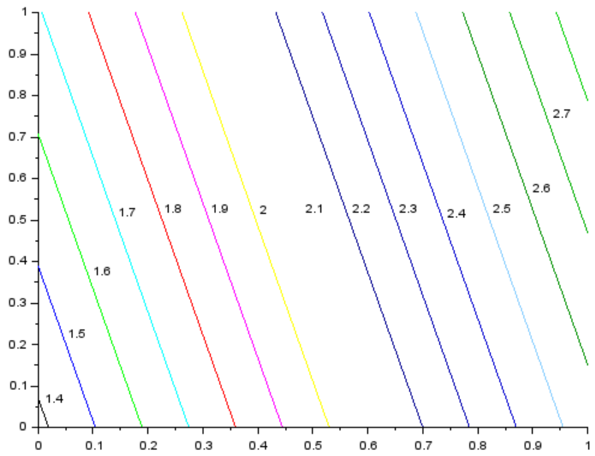


Fig. 6 Tracé 2

On s'intéresse dans ce DS à une modélisation particulière de la durée de vie d'un composant électronique ou électrique (par exemple d'une ampoule ou d'un pixel d'écran).

Soit X une variable aléatoire à densité. On dit que X suit une loi *sans mémoire* si,

- X est à valeurs positives
- pour tout $t \geqslant 0$ et pour tout $x \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}_{[X>t]}([X > t+x]) = \mathbb{P}([X > x])$$

(ce qui sous-entend que $\mathbb{P}([X > t]) > 0$ pour que cela ait un sens)

Interprétation de la formule : si le composant a déjà survécu un temps t, la probabilité qu'il survive un temps x supplémentaire est la même qu'au tout début de son utilisation. Tout se passe comme si le composant avait « oublié » qu'il avait déjà vécu un temps t.

De manière analogue, si X est une variable aléatoire discrète à valeurs entières, on dit que X suit une loi *sans mémoire* si,

- X est à valeurs positives
- pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_{[X>k]}([X > k+j]) = \mathbb{P}([X > j])$$

(ce qui sous-entend que $\mathbb{P}([X > k]) > 0$ pour que cela ait un sens)

1. *Question préliminaire.* Soit X une variable aléatoire qui suit une loi sans mémoire. Montrer que $\mathbb{P}([X > 0]) = 1$ puis que $\mathbb{P}([X = 0]) = 0$. *On pourra ainsi considérer que $X(\Omega) \subset]0, +\infty[$ si X suit une loi sans mémoire.*

Démonstration.

- Cas où X est à densité.
La variable aléatoire X suit une loi sans mémoire donc, en choisissant $t = x = 0$ dans la définition, on a

$$\mathbb{P}([X > 0]) = \mathbb{P}_{[X>0]}([X > 0]) = 1$$

Ensuite, comme X est à densité, on a directement

$$\mathbb{P}([X = 0]) = 0$$

- Cas où X est discrète à valeurs entières.
La variable aléatoire X suit une loi sans mémoire donc, en choisissant $k = j = 0$ dans la définition, on a

$$\mathbb{P}([X > 0]) = \mathbb{P}_{[X>0]}([X > 0]) = 1$$

Ensuite, par définition, X est à valeurs positives et donc $\mathbb{P}([X \geqslant 0]) = 1$. Or, par incompatibilité,

$$\mathbb{P}([X \geqslant 0]) = \mathbb{P}([X = 0]) + \mathbb{P}([X > 0])$$

ce qui donne

$$\mathbb{P}([X = 0]) = 1 - 1 = 0$$

□

Partie 1 : Loi géométrique

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théoreme 1. *Soit X une variable aléatoire. Les deux propriétés qui suivent sont équivalentes :*

- $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ *où* $p \in]0, 1[$.
- *X est discrète à valeurs entières et X suit une loi sans mémoire.*

2. Soit $p \in]0,1[$ et soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. On pose $q = 1-p$.
   (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

   Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X>k]) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=k+1}^{+\infty}[X=j]\right) \\
&= \sum_{j=k+1}^{+\infty}\mathbb{P}([X=j]) && \textit{(par incompatibilité)} \\
&= \sum_{j=k+1}^{+\infty} pq^{j-1} && \textit{(car } j \in \mathbb{N}^* \textit{ et } X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} pq^{j+k} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= pq^k \sum_{j=0}^{+\infty} q^j \\
&= pq^k \frac{1}{1-q} && \textit{(somme géométrique de raison } q \in]-1,1[\textit{)} \\
&= q^k && \textit{(car } 1-q=p\textit{)}
\end{aligned}$$
□

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $j \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\mathbb{P}_{[X>k]}([X > k+j]) = \mathbb{P}([X > j])$$

   Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $j \in \mathbb{N}$. Tout d'abord, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k > 0$ donc la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X>k]}([X > k+j])$ est bien définie.
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[X>k]}([X>k+j]) &= \frac{\mathbb{P}([X>k+j]\cap[X>j])}{\mathbb{P}([X>k])} \\
&= \frac{\mathbb{P}([X>k+j])}{\mathbb{P}([X>k])} && \textit{(car } j \geqslant 0\textit{)} \\
&= \frac{q^{k+j}}{q^k} && \textit{(car } j \in \mathbb{N} \textit{ et } k+j \in \mathbb{N}\textit{)} \\
&= q^j \\
&= \mathbb{P}([X>j]) && \textit{(car } j \in \mathbb{N}\textit{)}
\end{aligned}$$
□

   (c) Conclure.

   Démonstration. On sait que X est à valeurs entières positives (loi géométrique) et d'après la question précédente, on peut conclure que X suit une loi sans mémoire. Ainsi, la première propriété implique la deuxième propriété. □

3. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs entières et qui suit une loi sans mémoire. On pose $q = \mathbb{P}([X > 1])$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \mathbb{P}([X > k])$.
   (a) Justifier : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

   Démonstration. D'après la question préliminaire, $X(\Omega) \subset]0,+\infty[$. De plus, X est à valeurs entières. Il suit que $X(\Omega) \subset \mathbb{Z} \cap]0,+\infty[= \mathbb{N}^*$. □

   (b) Justifier : $q > 0$.

   Démonstration. Par hypothèse, X suit une loi sans mémoire. Ainsi, pour tout entier $j \in \mathbb{N}$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X>1]}([X > 1+j]) = \mathbb{P}([X > j])$ est bien définie (en posant $k = 1$ dans la définition), ce qui implique en particulier que $\mathbb{P}([X > 1]) > 0$. D'où $q > 0$. □

(c) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} = qu_k$. En déduire une expression simple de u_k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$. On sait que X suit une loi sans mémoire, donc en choisissant $j = 1$ dans la définition, on obtient :

$$\mathbb{P}_{[X>k]}([X > k+1]) = \mathbb{P}([X > 1])$$

Or,

$$\mathbb{P}_{[X>k]}([X > k+1]) = \frac{\mathbb{P}([X > k+1])}{\mathbb{P}([X > k])}$$

d'où

$$\mathbb{P}([X > k+1]) = \mathbb{P}([X > 1])\mathbb{P}([X > k])$$

ce qui se traduit bien en

$$\boxed{u_{k+1} = qu_k}$$

On en déduit que (u_k) est une suite géométrique et il vient alors que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = u_0 q^k$.
Or, $u_0 = \mathbb{P}([X > 0]) = 1$ d'après la question préliminaire. D'où :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, u_k = q^k}$$

□

(d) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X = k]) = u_{k-1} - u_k$.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La variable aléatoire X est à valeurs entières donc

$$[X > k-1] = [X \geqslant k] = [X = k] \cup [X > k]$$

Par incompatibilité, il vient

$$\mathbb{P}([X > k-1]) = \mathbb{P}([X = k]) + \mathbb{P}([X > k])$$

ce qui se traduit en

$$\boxed{\mathbb{P}([X = k]) = u_{k-1} - u_k}$$

□

(e) Montrer que $q < 1$. On pourra faire un raisonnement par l'absurde.

Démonstration. On sait déjà que $q \in]0,1]$. Supposons que $q = 1$.
Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = 1$. On en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}([X = k]) = u_{k-1} - u_k = 1 - 1 = 0$$

ce qui donne :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) = 0$$

Or, $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et donc la famille $([X = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) = 1$$

D'où $0 = 1$. C'est absurde. Donc $\boxed{q < 1}$. □

(f) Conclure.

Démonstration. On a montré que

- $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$

- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X = k]) &= u_{k-1} - u_k \\ &= q^{k-1} - q^k \\ &= q^{k-1}(1-q) \\ &= pq^{k-1} && \textit{(en posant } p = 1-q\textit{)}\end{aligned}$$

Ceci permet de conclure que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0,1[$ (puisque $q \in]0,1[$). Ainsi, la deuxième propriété implique la première propriété. □

4. De quel nombre l'appel `simul(100000)` donne-t-il une approximation ?

```
def simul(N):
    c = 0
    tirages = 0
    while tirages < N:
        X = rd.geometric(1/2)
        if X > 2:
            tirages = tirages + 1
            if X > 5:
                c = c + 1
    return c / N
```

Démonstration. D'après la loi faible des grands nombres, l'appel `simul(100000)` renvoie une approximation de la probabilité conditionnelle

$$\mathbb{P}_{[X>2]}([X > 5])$$

où $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.
En effet, dans cette simulation **Python**, on ne retient que les tirages qui réalisent l'événement $[X > 2]$ donc on conditionne l'expérience par cet événement. Ensuite, on effectue exactement N tirages réalisant l'événement $[X > 2]$, et parmi ces tirages, la variable c compte combien de tirages ont réalisé l'événement $[X > 5]$. Le nombre c/N est donc la fréquence empirique de réalisation de cet événement lorsque l'on conditionne par $[X > 2]$.
De plus, d'après ce qui précède, X suit une loi sans mémoire, donc

$$\mathbb{P}_{[X>2]}([X > 5]) = \mathbb{P}([X > 3]) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\boxed{\text{L'appel simul(100000) renvoie une approximation de } \frac{1}{8}.}$$

□

Partie 2 : Loi exponentielle

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théoreme 2. *Soit X une variable aléatoire. Les deux propriétés qui suivent sont équivalentes :*

- $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ *où* $\lambda > 0$.
- *X suit une loi sans mémoire et X admet une densité f qui est nulle sur $]-\infty, 0[$, continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$ et continue à droite en 0.*

5. Soit $\lambda > 0$ et soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
   (a) On note f la densité usuelle de X. Rappeler l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Démonstration.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

□

(b) Vérifier que f est nulle sur $]-\infty, 0[$, continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$ et continue à droite en 0.

Démonstration. • D'après la formule précédente, f est nulle sur $]-\infty, 0[$.

- f coïncide avec $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$ sur $]0, +\infty[$ et $\lambda > 0$ donc f est continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$.
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \lambda e^{-\lambda x} = \lambda = f(0)$. Donc f est continue à droite en 0.

□

(c) Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, $\mathbb{P}([X > t]) = e^{-\lambda t}$.

Démonstration. Soit $t \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X > t]) &= 1 - \mathbb{P}([X \leqslant t]) \\ &= 1 - F_X(t) \\ &= 1 - (1 - e^{\lambda t}) && \textit{(d'après le cours)} \\ &= e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

□

(d) Conclure.

Démonstration. Tout d'abord, f est nulle en dehors de $[0, +\infty[$ donc X est à valeurs positives.
Soit $t \geqslant 0$ et soit $x \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[X>t]}([X > t + x]) &= \frac{\mathbb{P}([X > t + x] \cap [X > t])}{\mathbb{P}([X > t])} \\ &= \frac{\mathbb{P}([X > t + x])}{\mathbb{P}([X > t])} && \textit{(car } x \geqslant 0\textit{)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+x)}}{e^{-\lambda t}} && \textit{(car } t \geqslant 0 \textit{ et } t + x \geqslant 0\textit{)} \\ &= e^{-\lambda x} \\ &= \mathbb{P}([X > x]) && \textit{(car } x \geqslant 0\textit{)}\end{aligned}$$

On en déduit que X suit une loi sans mémoire. Ainsi, la première propriété implique la deuxième propriété.

□

6. Soit X une variable aléatoire suivant une loi sans mémoire et admettant une densité f qui est nulle sur $]-\infty, 0[$, continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$ et continue à droite en 0. On note $G : x \mapsto \mathbb{P}([X > x])$ (on appelle G la fonction de *survie* de X). On pose $\lambda = f(0)$.

(a) Donner la valeur de $F_X(x)$ pour $x \leqslant 0$. Rappeler la valeur de $G(0)$.

Démonstration. Soit $x \geqslant 0$. D'après la question préliminaire, $X(\Omega) \subset]0, +\infty[$. On en déduit que

$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

De plus,

$$G(0) = \mathbb{P}([X > 0]) = 1$$

□

(b) Justifier que G est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \mathbb{P}([X > x]) = 1 - \mathbb{P}([X \leqslant x]) = 1 - F_X(x)$.

- La variable aléatoire X est à densité donc F_X est continue sur $\mathbb{R}$ donc G est continue sur $\mathbb{R}$.
- f est continue sur $]0, +\infty[$ donc F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ donc G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

□

(c) i. Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$ et pour tout $x \geqslant 0$,

$$G(t+x) = G(t)G(x)$$

Démonstration. Soit $t \geqslant 0$ et soit $x \geqslant 0$. Puisque X suit une loi sans mémoire, on a

$$\mathbb{P}_{[X>t]}([X > t+x]) = \mathbb{P}([X > x])$$

Or, $x \geqslant 0$, donc

$$\mathbb{P}_{[X>t]}([X > t+x]) = \frac{\mathbb{P}([X > t+x])}{\mathbb{P}([X > t])}$$

ce qui se réécrit

$$\frac{G(t+x)}{G(t)} = G(x)$$

d'où

$$\boxed{G(t+x) = G(t)G(x)}$$

□

ii. Montrer que, pour tout $t > 0$ et pour tout $x > 0$,

$$G'(t+x) = G(t)G'(x)$$

Démonstration. Soit $t > 0$. On pose $h_1 : x \mapsto G(t+x)$ et $h_2 : x \mapsto G(t)G(x)$. D'après la question précédente, h_1 et h_2 coïncident sur $[0, +\infty[$. De plus, G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ donc h_1 et h_2 sont dérivables sur $]0, +\infty[$ (on a bien, pour tout $x > 0$, $t + x > 0$).
Ainsi,

$$\forall x > 0, h_1'(x) = h_2'(x)$$

i.e.

$$\boxed{\forall x > 0, G'(t+x) = G(t)G'(x)}$$

□

iii. En déduire que, pour tout $t > 0$,

$$G'(t) = -\lambda G(t)$$

(on fera le lien entre la fonction G' et la fonction f)

Démonstration. Soit $t > 0$ et soit $x > 0$. On sait que

$$G'(t+x) = G(t)G'(x)$$

Or, $G(x) = 1 - F_X(x)$ donc $G'(x) = -F_X'(x) = -f(x)$. D'où

$$G'(t+x) = -f(x)G(t)$$

Or,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = \lambda$$

car f est continue à droite en 0.
De plus, G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ donc G' est continue sur $]0, +\infty[$ donc

$$\lim_{x \to 0} G'(t+x) = G'(t) \qquad (\text{car } t > 0)$$

On fait alors un passage à la limite lorsque $x \to 0^+$, on obtient :

$$\boxed{G'(t) = -\lambda G(t)}$$

□

iv. Justifier que $\lambda \geqslant 0$ puis montrer que $\lambda > 0$. On pourra faire un raisonnement par l'absurde pour la deuxième inégalité.

Démonstration. Tout d'abord, on sait que f est une densité donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$. En particulier, $f(0) \geqslant 0$. D'où $\lambda \geqslant 0$.
Supposons que $\lambda = 0$.
Alors, pour tout $t > 0$, $G'(t) = 0$ et donc $-f(t) = 0$. Ceci contredit l'hypothèse faite sur f, à savoir que f est strictement positive sur $]0, +\infty[$.
Donc $\boxed{\lambda > 0}$. □

v. Montrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t > 0$, $G(t) = C\mathrm{e}^{-\lambda t}$, puis déterminer la valeur de C.

Démonstration. La fonction G est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$ d'inconnue y. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire, d'ordre 1, homogène et à coefficients constants. On sait alors que les solutions de cette équation différentielle sont toutes de la forme

$$t \mapsto C\mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

La fonction G étant l'une de ces solutions, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t > 0$, $G(t) = C\mathrm{e}^{-\lambda t}$.
En faisant tendre t vers 0^+ et en utilisant la continuité de G en 0, on obtient : $G(0) = C$. Or, $G(0) = 1$ donc $\boxed{C = 1}$. □

(d) Conclure.

Démonstration. On a montré que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}$$

car $F_X = 1 - G$.
On reconnait la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ. Or, la fonction de répartition caractérise la loi, donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \text{ avec } \lambda > 0}$. La deuxième propriété implique la première propriété. □

Partie 3 : De la loi exponentielle à la loi géométrique

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théoreme 3. *Soit $\lambda > 0$ et soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. On pose $Y = \lfloor X \rfloor + 1$. Alors $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1 - e^{-\lambda}\right)$.*

7. On pose $Z = \lfloor X \rfloor$.

(a) Déterminer $Z(\Omega)$.

Démonstration. On a $Z = h(X)$ où $h : x \mapsto \lfloor x \rfloor$. Donc

$$\begin{aligned} Z(\Omega) &= h(X)(\Omega) \\ &= h(X(\Omega)) \\ &= h([0, +\infty[) \\ &= \mathbb{N} \end{aligned}$$

□

(b) Calculer, pour tout $k \in Z(\Omega)$, $\mathbb{P}([Z = k])$.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z = k]) &= \mathbb{P}([\lfloor X \rfloor = k]) \\ &= \mathbb{P}([k \leqslant X < k + 1]) \\ &= F_X(k+1) - F_X(k) && \textit{(car X est à densité)} \\ &= \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda(k+1)}\right) - \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda k}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda k} - \mathrm{e}^{-\lambda(k+1)} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right) \end{aligned}$$

□

8. Conclure.

Démonstration. Tout d'abord, $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y = k]) &= \mathbb{P}([Z + 1 = k]) \\ &= \mathbb{P}([Z = k - 1]) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda(k-1)}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right) && \textit{(car } k - 1 \in \mathbb{N}\textit{)}\end{aligned}$$

Posons $p = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$ et $q = 1 - p = \mathrm{e}^{-\lambda}$. On a bien $1 - \mathrm{e}^{-\lambda} \in]0,1[$ (car $\lambda > 0$) et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Y = k]) = pq^{k-1}$ donc $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. □

9. (a) Ecrire une fonction **Python**, nommée `partieEnt(x)`, qui prend en paramètre un réel $x \geqslant 0$ et renvoie $\lfloor x \rfloor$.

Démonstration. On propose le programme **Python** suivant :

```
def partieEnt(x):
    k = 0
    while k+1 <= x:
        k = k+1
    return k
```

□

(b) Compléter le programme **Python** suivant pour qu'il simule la variable aléatoire Y (on note `lam` le réel λ).

```
def simulY(lam):
    X = rd.exponential(1 / lam)
    return partieEnt(X) + 1
```

Démonstration. Il faut faire attention au paramètre pour la simulation d'une loi exponentielle en **Python**. C'est l'inverse du paramètre de la loi dans le langage mathématiques. Ceci est dû à une différence culturelle entre la France et le monde anglo-saxon, qui définit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ de telle sorte que $\mathbb{E}(X) = \lambda$ (alors qu'avec la convention française, $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$). □

Partie 4 : De la loi géométrique à la loi exponentielle

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théoreme 4. *Soit $\lambda > 0$ et soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels dans $]0,1[$ qui vérifie : $\lim\limits_{n \to +\infty} np_n = \lambda$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{G}(p_n)$. Alors la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{X_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X.*

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$. Il s'agit de démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \to +\infty} F_{Y_n}(x) = F_X(x)$$

10. Soit $x \leqslant 0$. Donner la valeur de $F_{Y_n}(x)$.

Démonstration. Y_n est à valeurs strictement positives, donc, pour tout $x \leqslant 0$, $F_{Y_n}(x) = 0$. □

11. Soit $x > 0$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_{Y_n}(x) = 1 - (1 - p_n)^{\lfloor nx \rfloor}$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
F_{Y_n}(x) &= \mathbb{P}([Y_n \leqslant x]) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\frac{X_n}{n} \leqslant x\right]\right) \\
&= \mathbb{P}([X_n \leqslant nx]) && \textit{(car } n > 0\textit{)} \\
&= \mathbb{P}([X_n \leqslant \lfloor nx \rfloor]) && \textit{(car } X \textit{ est à valeurs entières)} \\
&= 1 - \mathbb{P}([X_n > \lfloor nx \rfloor]) \\
&= 1 - (1-p_n)^{\lfloor nx \rfloor} && \textit{(cf question 2a)}
\end{aligned}$$

□

(b) Montrer que $\lfloor nx \rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} nx$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\lfloor nx \rfloor \leqslant nx < \lfloor nx \rfloor + 1$$

donc

$$nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leqslant nx$$

Or, $nx > 0$ (car $x > 0$ et $n > 0$) donc

$$1 - \frac{1}{nx} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{nx} \leqslant 1$$

De plus, $\dfrac{1}{nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, par théorème d'encadrement,

$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

d'où

$$\boxed{\lfloor nx \rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} nx}$$

□

(c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x)$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$F_{Y_n}(x) = 1 - (1-p_n)^{\lfloor nx \rfloor} = 1 - \mathrm{e}^{\lfloor nx \rfloor \ln(1-p_n)}$$

Or, $np_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$ et $\lambda \neq 0$ donc $p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n}$, d'où $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, on a $\ln(1-p_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -p_n$ et, d'après la question précédente, $\lfloor nx \rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} nx$. Par produit :

$$\lfloor nx \rfloor \ln(1-p_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -np_n x$$

D'où $\lfloor nx \rfloor \ln(1-p_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\lambda x$. Par continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\lfloor nx \rfloor \ln(1-p_n)} = \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

et finalement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}}$$

□

12. Conclure.

Démonstration. En faisant le bilan des questions 10 et 11, il vient que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \to +\infty} F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} F_{Y_n}(x) = F_X(x)}$$

puisque $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. □