Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
ENC Bessières, Paris 17e.


## Ecricome 2024

*Mathématiques Appliquées*
*Solution*


*Un grand merci à Mélanie Bronn, Tom Dutilleul, Magali Koechlin, Romain Meurant et Jean-François Vidal pour leur relecture, leur correction et leur conseils avisés.*


## Exercice 1

Pour toute variable aléatoire discrète $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et pour tout entier naturel $k$, on note :

$$R_X(k) = P(X > k).$$

### Partie I

(1) Soit $p$ un réel de $]0;1[$. Dans cette question uniquement, on suppose que $X$ suit la loi géométrique de paramètre $p$.

(a) Soit $k$ un entier naturel.
Si $k = 0$, alors $R_X(0) = P(X > 0) = 1 = (1-p)^0$ car $X$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
Si $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} R_X(k) &= P(X > k) = 1 - P(X \leq k) = 1 - \sum_{i=1}^{k} P(X = i) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{k} (1-p)^{i-1} p = 1 - p \sum_{j=0}^{k-1} (1-p)^j \\ &= 1 - p \times \frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} \\ &= (1-p)^k. \end{aligned}$$

On peut aussi remarquer que $[X > k]$ est réalisé si et seulement si on a obtenu $k$ échecs consécutifs (en précisant que la loi géométrique modélise le temps d'attente du premier succès lors de répétitions indépendantes et identiques d'un même schéma de Bernoulli de paramètre $p$, ce qui donnerait tout de suite $(1-p)^k$).

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme $k \geq 1$, on a $k - 1 \in \mathbb{N}$. On a, grâce à la question précédente,

$$\frac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = \frac{(1-p)^k}{(1-p)^{k-1}} = 1 - p,$$

comme attendu.

(2) Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme $[X > k-1] = [X = k] \cup [X > k]$ et que cette union est disjointe, on a

$$P(X > k-1) = P(X = k) + P(X > k) \Longrightarrow P(X = k) = R_X(k-1) - R_X(k).$$

(b) On montre cette équivalence par double implication.
Supposons que $X$ et $Y$ suivent la même loi. Alors, il est clair que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$R_X(k) = P(X > k) = P(Y > k) = R_Y(k).$$

Réciproquement, supposons que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait $R_X(k) = R_Y(k)$. Montrons que $X$ et $Y$ suivent la même loi. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente,

$$P(X = k) = R_X(k-1) - R_X(k) = R_Y(k-1) - R_Y(k) = P(Y = k),$$

et $X$ et $Y$ suivent bien la même loi.

**Partie II**

(3) (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Observons que

$$\frac{a}{n!} - \frac{b}{(n+1)!} = \frac{an + a - b}{(n+1)!}.$$

Ainsi, par principe d'identification

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{a}{n!} - \frac{b}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}\right) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ a - b & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 1 \end{array} \right.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.$$

(b) Montrons que la somme partielle a une limite finie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)!} \qquad \text{par télescopage} \\ &\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1. \end{aligned}$$

Ainsi la série converge et sa somme vaut 1.

(4) Dans cette question, on considère une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $N^*$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = \frac{n}{(n+1)!}.$$

*On remarque que la question précédente permet (la série étant à termes positifs) de bien justifier qu'il s'agit d'une distribution de probabilité et que la formule ci-dessus définit bien une variable aléatoire.*

(a) D'après le théorème de transfert,

$$X + 1 \text{ admet une espérance} \iff \sum_{n \geq 1} (n+1) P(X = n) \text{ converge } (\textit{absolument}).$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(n+1)P(X = n) = (n+1)\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-1)!}.$$

On reconnait le terme général (décalé) d'une série exponentielle de paramètre 1. Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} (n+1)P(X = n)$ converge (et absolument car elle est à termes positifs) et $X + 1$ admet une espérance. De plus,

$$E(X+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)P(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = e.$$

Comme $X = X + 1 - 1$, $X$ admet aussi une espérance et par linéarité, on a

$$E(X) = E(X+1) - 1 = e - 1.$$

(b) Toujours avec le théorème de transfert,

$$(X-1)(X+1) \text{ admet une espérance} \iff \sum_{n \geq 2} (n-1)(n+1)P(X = n) \text{ converge } (\textit{absolument}).$$

Or, pour tout entier $n \geq 2$,

$$(n-1)(n+1)P(X=n) = (n-1)(n+1)\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-2)!}$$

et c'est à nouveau une série exponentielle (décalée de deux). Ainsi $(X-1)(X+1)$ admet une espérance, et

$$E((X-1)(X+1)) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} = e.$$

Observant que $X^2 = (X-1)(X+1)+1$, $X^2$ admet donc une espérance et par linéarité,

$$E(X^2) = e+1.$$

Il suit que $X$ admet une variance et, par la formule de König-Huyguens,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = e+1-(e-1)^2 = e+1-e^2+2e-1 = e(3-e).$$

**Partie III**

Soit $(\alpha_k)_k \in \mathbb{N}^*$ une suite de réels strictement compris entre 0 et 1.
On étudie la durée de vie en années d'un appareil. Tout au long de l'année initiale $k=0$, on suppose que l'appareil fonctionne. Puis, à l'issue de chaque année numéro $k$ ($k$ étant un entier naturel non nul), l'appareil possède une certain probabilité de tomber en panne.
Plus précisément, on suppose que, pour tout entier naturel $k$ non nul, si la machine fonctionne encore à l'issue de la $(k-1)-$ième année, alors elle cesse de fonctionner à la fin de l'année $k$ avec probabilité $\alpha_k$ et elle continue de fonctionner à l'issue de l'année $k$ avec probabilité $1-\alpha_k$.
On note $X$ la variable aléatoire égale à la durée de vie en années de l'appareil.

(5) Soit $k$ un entier naturel non nul.
Observons que $[X>k] = [X>k] \cap [X>k-1]$. De plus, d'après l'énoncé, on a $P_{X>k-1}(X>k) = 1-\alpha_k$. Il suit qu'on a bien

$$R_X(k) = P(X>k) = P([X>k]\cap[X>k-1]) = P(X>k-1)P_{X>k-1}(X>k) = (1-\alpha_k)R_X(k-1).$$

(6) On montre la formule attendue par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.

- initialisation. Pour $k=1$, $R_X(1) = P(X>1) = 1-\alpha_1$ : on suppose que l'appareil a fonctionné tout au long de l'année initiale $k=0$ et que la probabilité qu'il fonctionne encore à l'issue de la première année est $1-\alpha_1$. D'autre part,

$$\prod_{i=1}^{1}(1-\alpha_i) = 1-\alpha_1.$$

La formule est bien vérifiée pour $k=1$.

- hérédité. Supposons que, pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, la formule soit vraie. Alors, par la question précédente

$$\begin{aligned} R_X(k+1) &= (1-\alpha_{k+1})R_X(k) \\ &= (1-\alpha_{k+1})\prod_{i=1}^{k}(1-\alpha_i) \qquad \text{par HR} \\ &= \prod_{i=1}^{k+1}(1-\alpha_i), \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule au rang $k+1$ et termine la récurrence.

(7) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si $k=1$, on a

$$P(X=1) = R_X(0) - R_X(1) = 1-(1-\alpha_1) = \alpha_1.$$

Pour $k \geq 2$, d'après la Question (2*a*) et d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} P(X=k) &= R_X(k-1) - R_X(k) \\ &= \prod_{i=1}^{k-1}(1-\alpha_i) - \prod_{i=1}^{k}(1-\alpha_i) \\ &= \alpha_k \prod_{i=1}^{k-1}(1-\alpha_i). \end{aligned}$$

(8) **Étude de deux exemples.**

(a) Dans cette question uniquement, on suppose que la suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est constante, c'est à dire : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_k = p$.
On reconnait alors une loi géométrique de paramètre $p$. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ :
Si $k = 1$, alors

$$P(X=1) = \alpha_1 = p.$$

Si $k \geq 1$,

$$P(X=k) = \alpha_k \prod_{i=1}^{k-1}(1-\alpha_i) = p\prod_{i=1}^{k-1}(1-p) = p(1-p)^{k-1}.$$

(b) Dans cette question uniquement, on suppose que, pour tout entier $k$ non nul, $\alpha_k = \dfrac{k}{k+1}$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si $k = 1$,

$$P(X=1) = \alpha_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{(1+1)!}.$$

Pour $k \geq 2$,

$$P(X=k) = \frac{k}{k+1}\prod_{i=1}^{k-1}\left(1-\frac{i}{i+1}\right) = \frac{k}{k+1}\prod_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i+1} = \frac{k}{k+1}\times\frac{1}{k!} = \frac{k}{(k+1)!},$$

qui n'est rien d'autre que la loi étudiée dans la Partie II.

**Remarque**

La variable aléatoire $X$ est mal définie. En effet, avec la définition proposée, $X$ est à valeurs dans $[\![2,+\infty[\![$ (l'appareil fonctionne toute l'année initiale $k = 0$, et d'après l'énoncé il peut tomber en panne à partir de la fin de l'année $k = 1$, il va donc fonctionner au moins deux années). Ce n'est pas cohérent avec la formule de la Question (6).

Pour rendre l'énoncé cohérent, il faut définir $X$ de la manière suivante : $X$ prend la valeur $k$ si l'appareil fonctionne toute l'année $k$ et tombe en panne à l'issue de l'année $k$.

### Partie IV

Un fabricant d'ordinateurs souhaite publier des données statistiques sur la durée de vie de ses appareils fabriqués à partir de l'an 2000. Dans une base de données, on dispose d'une table `ordinateur` contenant des informations sur tous les ordinateurs produit par le fabricant. Cette table possède les attributs (ou colonnes) suivants :

- `id` (de type `INTEGER`) : le numéro d'identification de l'ordinateur
- `annee_fabrication` (de type `INTEGER`) : l'année de fabrication de l'ordinateur
- `annee_panne` (de type `INTEGER`) : l'année où l'ordinateur a cessé de fonctionner, valant $-1$ si l'ordinateur est encore en état de marche.

À l'aide de l'**Annexe B** en fin de sujet, il est facile de répondre aux questions posées.

(9) (a) Il suffit de compter le nombre total d'enregistrements de la table `ordinateur`. Ce qu'on fait avec la requête

```
SELECT COUNT(*) FROM ordinateur
```

(b) Il faut maintenant faire une *restriction* en ne gardant que les enregistrement qui vérifient la condition voulue

```
SELECT COUNT(*) FROM ordinateur
WHERE annee_panne = annee_fabrication +1
```

(c) Dans cette question uniquement, on suppose que la durée de vie en années d'un ordinateur est une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p$ inconnu.
On a vu que la loi géométrique est la loi qui modélise une situation où la probabilité de panne d'une année sur l'autre est constante (ce qui est d'ailleurs cohérent avec ce qu'on sait de la loi géométrique, *sans mémoire*).
En calculant la fréquence du nombre d'ordinateurs qui tombent en panne au bout de un an d'utilisation (c'est à dire le quotient du nombre calculé en (9b) par celui calculé en (9a)), on a donc une valeur approchée (par la loi faible des grands nombres) de la probabilité de tomber en panne $\alpha_1$ donc de $p$.

(10) Un attribut `duree_vie` a été ajouté à la table `ordinateur`. Aux champs de l'attribut `duree_vie` a été affectée la valeur $-1$.
On utilise la requête `UPDATE`. Plus précisément

```
UPDATE ordinateur
SET duree_vie = annee_panne - annee_fabrication
WHERE annee_panne <>-1
```

(11) Dans cette question, on cherche à déterminer s'il est raisonnable de représenter la durée de vie d'un ordinateur par une variable aléatoire géométrique d'un certain paramètre $p$ que l'on cherchera à approcher.

(a) La requête

```
SELECT AVG(duree_vie) FROM ordinateur
```

renvoie la moyenne des valeurs de l'attribut `duree_vie`. D'après la loi faible des grands nombres, la moyenne empirique d'un échantillon d'une variable aléatoire renvoie une valeur approchée de l'espérance de la variable échantillonnée. Si la durée de vie est une loi géométrique de paramètre $p$, son espérance vaut $1/p$. Il faut donc prendre l'inverse de la valeur renvoyée par la requête pour une valeur approchée de $p$.

(b) Chacune des requêtes (pour $k$ de 1 à 24)

```
SELECT COUNT(*)/10000 FROM ordinateur WHERE duree_vie= k
```

renvoie la proportion des appareils avec une durée de vie de $k$ années, qui devrait donner une *estimation* de la probabilité qu'un appareil ait une durée de vie de $k$ années.
Si toutes les valeurs calculées sont les termes d'une suite géométrique, il est raisonnable d'utiliser une loi géométrique pour la durée de vie. Pour vérifier cela, on peut calculer les quotients des valeurs successives qui doivent être constants (comme le garantit la Question (8a)).

Cette réponse qui semble être la plus simple n'est peut-être pas celle attendue puisqu'elle n'utilise pas vraiment le résultat de la Question (8).
Une autre réponse, proposée par Tom Dutilleul, serait la suivante :
Chacune des lignes de la requête renvoie une approximation de la probabilité $P(X = k-$ (pour $k \in [\![1, 24]\!]$), toujours d'après la loi faible des grands nombres. Notons $p_k$ le nombre renvoyé par la requête :

```
SELECT COUNT(*)/10000 FROM ordinateur WHERE duree_vie = k ;
```

Notons ensuite $r_k = 1 - \sum_{i=1}^{k} p_i$. Le nombre $r_k$ est une approximation de $R_X(k) = P(X > k)$.

On a alors l'approximation:

$$1 - \alpha_k \simeq \frac{r_k}{r_{k-1}}$$

qui est valable d'après la Question (5), où $r_0 = 1$ par convention.

D'après la Question (8), si ces différentes valeurs sont toutes sensiblement égales pour $k$ variant entre 1 et 24, alors nous pourrons considérer que la durée de vie d'un ordinateur suit approximativement une loi géométrique.

**Remarque**

Une petite coquille s'est glissée dans le sujet car la table `ordinateur` s'appelle aussi `ordinateurs`.

La Question (11a) semble poser un petit problème, auquel les candidat.e.s n'auront peut être pas fait attention, mais l'affectation $-1$ risque de *biaiser* le calcul de la moyenne et de l'estimation de $p$...

## Exercice 2

Soit $a$ un réel. On considère la fonction $I_a$ définie par

$$I_a(x) = \int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2}\mathrm{d}t.$$

On considère également l'intégrale $J_a$ définie par

$$J_a = \int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t.$$

### Partie I

(1) (a) On a, pour $t > 0$,

$$\frac{e^{-2at-t^2}}{1/t^2} = t^2 e^{-t^2/2} e^{-t^2/2-2at}$$

Par croissance comparée, $t^2 e^{-t^2/2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
De plus, comme $-t^2/2 - 2at \sim -t^2/2 \to -\infty$, lorsque $t \to +\infty$, on a, par composition des limites avec l'exponentielle continue, $e^{-t^2/2-2at} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par produit,

$$\frac{e^{-2at-t^2}}{1/t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ou encore $e^{-2at-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, lorsque $t \to +\infty$.

(b) Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge (par critère de Riemann), le principe de comparaison par négligeabilité pour des fonctions positives permet d'affirmer que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t$$

converge. Comme la fonction $t \mapsto e^{-2at-t^2}$ est continue sur $[0;1]$, l'intégrale est bien définie sur ce même intervalle. Ainsi, on a bien convergence de $J_a$.

(2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Commençons par observer que

$$e^{2a(x-t)-t^2} = e^{2ax}e^{-2at-t^2}.$$

Si $x < 0$, comme $t \mapsto e^{-2at-t^2}$ est continue sur $[x;0]$, l'intégrale est bien définie sur ce même intervalle. Comme $J_a$ converge, on a par Chasles, que $I_a(x)$ est une intégrale convergente et dans ce cas

$$I_a(x) = e^{2ax}\int_x^0 e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t + e^{2ax}J_a.$$

Si $x \geq 0$, la fonction précédente est encore continue sur $[0;x]$. Comme $J_a$ est convergente, on a que $I_a(x)$ converge et

$$I_a(x) = e^{2ax}J_a - e^{2ax}\int_0^x e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t.$$

Dans les deux cas l'intégrale converge donc $I_a$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(3) (a) D'après la question précédente, on peut écrire

$$\int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t = J_a - \int_0^x e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En effet, comme $J_a$ converge, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t = J_a.$$

(b) Dans cette question uniquement, on suppose que $a > 0$.
Pour tout $t \geq x$, on a

$$\begin{aligned} x - t \leq 0 \quad &\Longrightarrow \quad e^{2a(x-t)} \leq 1 \\ &\Longrightarrow \quad e^{2a(x-t)-t^2} \leq e^{-t^2} \end{aligned}$$

Par croissance de l'intégrale (les bornes sont bien dans l'ordre croissant car $x \geq 0$)

$$I_a(x) \leq \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t,$$

ce qu'on voulait.

(c) Si $a > 0$, la question précédente permet, par théorème des gendarmes, de conclure que $I_a(x) \to 0$, lorsque $x \to +\infty$.
En effet, comme la fonction intégrée est positive, il est clair que $I_a(x) \geq 0$. De plus, $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ est le reste d'une intégrale convergente (l'intégrale $J_0$), la quantité tend vers 0.
Si $a < 0$, on réutilise la Question (3a) pour observer que

$$I_a(x) = e^{2ax} \int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t$$

qui est donc le produit de deux quantités qui tendent vers 0 lorsque $x \to +\infty$.
Si $a = 0$,

$$I_a(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

pour des raisons précédemment évoquées.
On a donc, dans tous les cas

$$\lim_{x\to+\infty} I_a(x) = 0.$$

**Partie II**

On considère l'équation différentielle suivante, d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable :

$$y' = 2ay - e^{-x^2}. \qquad (1)$$

Dans cette partie, on s'intéresse aux solutions de l'équation (1) qui vérifient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.
On considère l'équation homogène associée à (1) :

$$y' = 2ay. \qquad (2)$$

(4) D'après le cours, l'ensemble des solutions de cette équation différentielle linéaire, à coefficients constants, homogène d'ordre 1 est

$$\{y : x \mapsto \lambda e^{2ax} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

(5) On considère la fonction $F_a$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_a(x) = \int_0^x e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t.$$

(a) La fonction $t \mapsto e^{-2at-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Par le théorème fondamental de l'analyse elle admet donc des primitives. Plus précisément, $F_a$ est alors la primitive de $t \mapsto e^{-2at-t^2}$ qui s'annule en 0.
À ce titre, $F_a$ est dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_a'(x) = e^{-2ax-x^2}.$$

(b) En reprenant ce qu'on a écrit plus haut à la Question (2) avec la définition de $F_a$, on a bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$I_a(x) = e^{2ax}\left(J_a - F_a(x)\right).$$

(c) Comme $F_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $x \mapsto e^{2ax}$ aussi (composée d'une fonction affine et de l'exponentielle), il en est de même (par produit) pour $I_a$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$I_a'(x) = 2ae^{2ax}\left(J_a - F_a(x)\right) - e^{2ax}F_a'(x) = 2aI_a(x) - e^{2ax}e^{-2ax-x^2} = 2aI_a(x) - e^{-x^2}$$
et $I_a$ est bien solution de (1).

(6) Par principe de superposition, $I_a$ étant solution particulière de (1),
$$y \text{ solution de (1)} \iff y - I_a \text{ solution de (2).}$$
(Cette équivalence n'est pas difficile à montrer ; on ne sait pas ici s'il était attendu d'en démontrer le détail ou non.)
Connaissant les solutions de (2), il suffit donc d'ajouter $I_a$. Ainsi, l'ensemble des solutions de (1) est
$$\{y : \ x \mapsto \lambda e^{2ax} + I_a(x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

(7) D'après la Question (3c), on sait que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} I_a(x) = 0$.

(a) Si $a < 0$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \lambda e^{2ax} = 0$. Ainsi, toutes les solutions obtenues à la Question (6) conviennent.

(b) Si $a = 0$, il est alors nécessaire de prendre $\lambda = 0$. Il n'y a donc qu'une seule solution qui convienne : $y = I_a$.

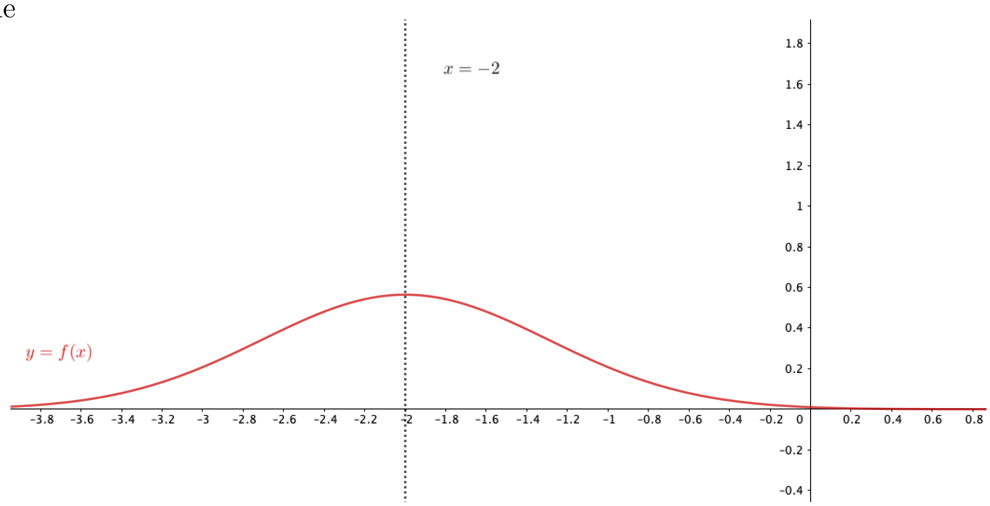
(c) Si $a > 0$, on ne peut pas prendre $\lambda \neq 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \lambda e^{2ax} = \pm\infty$ selon que $\lambda > 0$ ou $\lambda < 0$. Il n'y a alors que $\lambda = 0$ qui convienne, et on a encore une seule solution : $y = I_a$.

**Partie III**

On considère une variable aléatoire $X$ de loi normale d'espérance $-a$ et de variance $\dfrac{1}{2}$.

(8) (a) D'après le cours, une densité $f$ de $X$ est donnée par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x+a)^2}.$$

(b) Pour $a = 2$, l'axe de symétrie est donc la droite d'équation $x = -2$. En $-2$, la fonction vaut $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$. Cela donne




(9) Soit $x$ un réel.

(a) Par définition
$$P(X \geq x) = \int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty} e^{-(t+a)^2}\mathrm{d}t.$$

(b) Si on développe
$$(t+a)^2 = t^2 + 2at + a^2$$
et il suit que
$$P(X \geq x) = \frac{e^{-a^2}}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2-2at} \mathrm{d}t = \frac{e^{-a^2-2ax}}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2+2a(x-t)} \mathrm{d}t = \frac{e^{-a^2-2ax}}{\sqrt{\pi}} I_a(x),$$
ou encore, comme demandé,
$$I_a(x) = \sqrt{\pi} e^{2ax+a^2} P(X \geq x).$$

(10) (a) Soit $Z$ une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.
D'après le cours, par transformation affine des lois normales, la variable aléatoire
$$\frac{1}{\sqrt{2}} Z - a$$
suit la loi normale $\mathcal{N}(-a, 1/2)$.

(b) Il suffit de simuler $X$ à partir de $Z$ 10000 fois et de compter combien de fois le résultat est supérieur ou égal à $x$ en renvoyant la fréquence d'apparition de ces cas-là, ce qui donne (par la loi faible des grands nombres) une estimation de la probabilité $P(X \geq x)$. Le programme est donc le suivant

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def estim_proba(a,x) :
    num = 0 # c'est notre compteur
    for i in range(10000):
        Z=rd.normal()
        X= -a + Z/np.sqrt(2)
        if X >= x :
            num = num +1
    return num/10000
```

(11) On utilise les résultats des Question (9b) et (10b).

```
def approx I(a,x) :
    p=estim_proba(a,x)
    return np.sqrt(pi)*np.exp(2*a*x+a**2)*p
```

# Exercice 3

## Partie I

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la matrice carrée d'ordre $n$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 0 et tous les autres coefficients égaux à 1 :
$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
On note $I_n$ la matrice identité d'ordre $n$.

(1) **Étude du cas** $n = 3$.

Dans cette question, on considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Comme $M$ est symétrique, $M$ est diagonalisable.

(b) On obtient immédiatement

$$M+I=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\quad \text{puis}\quad (M+I)^2=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}=3(M+I).$$

Il suit que $(M+I)^2-3(M+I)=0$ ou encore $(M+I)(M+I-3I)=0$ ou encore $(M+I)(M-2I)=0$. Ainsi, le polynome $P:\ x\mapsto(x+1)(x-2)$ annule $M$.

(c) Les valeurs propres de $M$ sont à chercher parmi les racines du polynôme annulateur $P$, c'est à dire

$$\mathrm{Sp}(M)\subset\{-1;2\}.$$

Vérifions qu'elles sont toutes deux valeurs propres et déterminons en même temps une base de chaque sous-espace propre. (On sait en fait qu'elles le sont; comme $M$ est diagonalisable elle a au moins une valeur propre, comme elle n'est pas déjà diagonale, son spectre ne peut pas être réduit à un élément).

- Pour $-1$ :

$$\begin{aligned}X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathrm{Ker}(M+I)&\iff x+y+z=0\\&\iff x=-y-z\\&\iff X=\begin{pmatrix}-y-z\\y\\z\end{pmatrix}=-y\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}-z\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\qquad x,y\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Ainsi, $-1$ est bien valeur propre (le noyau ci-dessus n'est pas réduit au vecteur nul) et

$$E_{-1}(M)=\mathrm{Ker}(M+I)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right).$$

- Pour 2 :

$$\begin{aligned}X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathrm{Ker}(M-2I)&\iff\begin{cases}-2x+y+z=0\\x-2y+z=0\\x+y-2z=0\end{cases}\\&\iff\begin{cases}x-2y+z=0\\-3y+3z=0\\3y-3z=0\end{cases}\\&\iff x=y=z\\&\iff X=\begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\qquad x\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Ainsi, 2 est bien valeur propre (le noyau ci-dessus n'est pas réduit au vecteur nul) et

$$E_2(M)=\mathrm{Ker}(M-2I)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Dans les questions qui suivent on considère la matrice $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$.

*On observe que les colonnes sont exactement les vecteurs propres qu'on vient de trouver...*

(d) On peut commencer par dire que, par principe de concaténation, la famille de vecteurs

$$\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

est libre. En effet, il s'agit de la concaténation de deux bases de sous-espaces propres de $M$ associés à des valeurs propres distinctes. Comme est elle constituée de trois vecteurs, c'est donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

La matrice $P$ est donc la matrice de passage vers cette base (depuis la base canonique). Elle est donc inversible.
Le calcul du produit de $P$ avec la matrice donnée donne bien $I$, ce qui conclut la question.
On pouvait naturellement faire un pivot de Gauss simultané.

Dans les questions qui suivent on pose $D = P^{-1}MP$.

(e) Selon qu'on a déjà expliqué que $P$ était la matrice de passage vers une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de $M$ ou non, on peut citer la formule de changement de base ou bien faire le calcul explicite. On trouve

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(f) C'est une récurrence ultra classique et facile.
- <u>initialisation.</u> Pour $k = 0$, on a $M^0 = I = PP^{-1} = PD^0P^{-1}$ et la relation est bien vérifiée.
- <u>hérédité.</u> Supposons que, pour un certain $k \in \mathbb{N}$, on ait $M^k = PD^kP^{-1}$. Alors, comme $D = P^{-1}MP$ donne aussi $M = PDP^{-1}$, on a

$$\begin{aligned} M^{k+1} &= M \cdot M^k \\ &= PDP^{-1} \cdot PD^kP^{-1} \qquad \text{par HR} \\ &= PD \cdot D^kP^{-1} \\ &= PD^{k+1}P^{-1}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule au rang $k + 1$ et termine la récurrence.

(g) Soit $k$ un entier naturel. On admet qu'il existe des réels $a_k$ et $b_k$ tels que $M^k = a_kM + b_kI$.
On peut alors factoriser par $P$ à gauche et $P^{-1}$ à droite

$$PD^kP^{-1} = M^k = a_kM + b_kI = a_kPDP^{-1} + b_kPP^{-1} = P\left(a_kD + b_kI\right)P^{-1}$$

puis, en multipliant à gauche par $P^{-1}$ et à droite par $P$, on a donc

$$D^k = a_kD + b_kI.$$

$D$ étant diagonale, on peut immédiatement calculer ses puissances

$$D^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} = a_k \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + b_k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_k + b_k & 0 & 0 \\ 0 & -a_k + b_k & 0 \\ 0 & 0 & 2a_k + b_k \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} -a_k + b_k &= (-1)^k \\ 2a_k + b_k &= 2^k \end{cases} \iff \begin{cases} a_k &= \dfrac{1}{3}\left(2^k - (-1)^k\right) \\ b_k &= \dfrac{1}{3}\left(2^k + 2(-1)^k\right) \end{cases}$$

(2) **Cas général : $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2.**
On considère la matrice carrée $J_n$ d'ordre $n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 :

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) On procède par récurrence sur $k$.
- <u>initialisation.</u> Pour $k = 1$, on a bien $J_n = n^0 J_n$.

- héredité. Supposons que, pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, on ait $J_n^k = n^{k-1} J_n$. Comme on a clairement

$$J_n^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & n & \cdots & n \\ n & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & n & n \end{pmatrix} = nJ_n,$$

il suit que

$$\begin{aligned} J_n^{k+1} &= J_n \cdot J_n^k \\ &= J_n \cdot n^{k-1} J_n \qquad \text{par HR} \\ &= n^{k-1} J^2 = n^{k-1} n J_n \\ &= n^k J_n, \end{aligned}$$

ce qui est la formule au rang $k+1$ et termine la récurrence.

(b) Il est clair que $M_n = J_n - I_n$.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme $J_n$ et $-I_n$ commutent, on peut appliquer la formule du binôme pour écrire

$$\begin{aligned} {M_n}^k &= (J_n - I_n)^k \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} J_n^i (-I_n)^{k-i} = (-1)^k I_n + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} J_n^i (-I_n)^{k-i} \\ &= (-1)^k I_n + \left( \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i} \right) J_n \\ &= (-1)^k I_n + c_k J_n, \end{aligned}$$

où on a posé

$$c_k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i}.$$

(d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par la formule du binôme (pour des nombres réels)

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i} - \frac{(-1)^k}{n} \\ &= \frac{1}{n} \left( \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^{i} (-1)^{k-i} - (-1)^k \right) \\ &= \frac{1}{n} \left( (n + (-1))^k - (-1)^k \right) \\ &= \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

(e) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En dehors de la diagonale, tous les coefficients de $M^k$ sont égaux à $c_k$ donc égaux à

$$\frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}.$$

Sur la diagonale, tous les coefficients de $M^k$ sont égaux à $(-1)^k + c_k$ donc

$$\frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n} + (-1)^k = \frac{(n-1)^k + (n-1)(-1)^k}{n}.$$

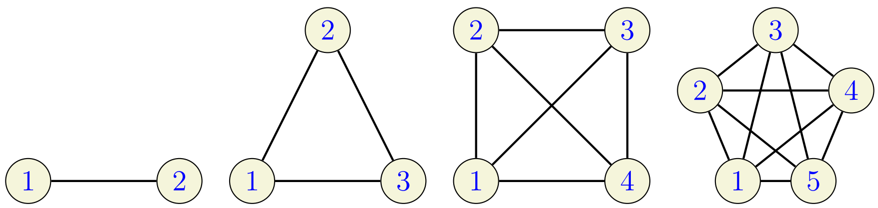
**Remarque**

Dans le sujet, la matrice identité d'ordre 3 est par moments désignée par $I_3$ ou par $I$.

**Partie II**

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère un graphe $K_n$ non orienté à $n$ sommets numérotés de 1 à $n$ dans lequel chaque sommet est relié à chaque autre sommet par une arête et n'est pas relié à lui même par une arête.

(3) Il s'agit de graphes dits *complets*.




$K_2$ $K_3$ $K_4$ $K_5$

(4) (a) La matrice d'adjacence a pour coefficient à la $i-$ème ligne et $j-$ème colonne un 1 ou un 0 selon que les sommets $i$ et $j$ sont reliés par une arête ou non. Il est alors clair que la matrice d'adjacence de $K_n$ est la matrice $M_n$.

(b) Le nombre de chemins de longueur 4 menant du sommet 1 à lui-même est le coefficient à la première ligne et première colonne de la matrice $M_4^4$.
D'après la Question (2e), ce coefficient vaut

$$\frac{3^4+3(-1)^4}{4}=\frac{84}{4}=21.$$

(5) Dans un graphe non orienté, le degré d'un sommet est le nombre de sommets adjacents à celui-ci. Dans le graphe $K_n$, chaque sommet est adjacent aux $n-1$ autres sommets. Donc le degré de chaque sommet vaut $n-1$.

(6) D'après le lemme des poignées de mains, la somme des degrés d'un graphe est égale au double du nombre des arêtes de ce graphe. Notant $\kappa_n$ le nombre d'arêtes de $K_n$, et $s_i$ le sommet numéro $i$, on a donc

$$\sum_{i=1}^{n}\deg(s_i)=2\kappa_n \iff \sum_{i=1}^{n}(n-1)=2\kappa_n \iff \kappa_n=\frac{n(n-1)}{2}.$$

On peut aussi dire qu'il existe une bijection entre l'ensemble des arêtes et l'ensemble des parties à deux éléments de l'ensemble des sommets, dont on connait le cardinal : $\binom{n}{2}$.

**Partie III**

Soient $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $K_n$ le graphe défini dans la Partie II. On parcourt les sommets du graphe $K_n$ de la façon suivante :

- Initialement, à l'étape $k=0$, on se trouve sur le sommet 1.
- À chaque étape, on change de sommet en suivant au hasard, avec équiprobabilité, l'une des arêtes issues du sommet actuel.

Pour tout entier naturel $k$, on note $X_k$ la variable aléatoire égale à la valeur du sommet sur lequel on se trouve à la $k$ème étape (c'est à dire à l'issue du $k-$ème déplacement). En particulier $X_0$ est une variable aléatoire constante égale à 1.

Pour tout entier naturel $k$, on note $V_k$ la matrice ligne de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ définie par

$$V_k=\begin{pmatrix}P(X_k=1) & P(X_k=2) & \cdots & P(X_k=n)\end{pmatrix}.$$

(7) La matrice $V_k$ est le $k-$ème état probabiliste de la chaîne de Markov $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Comme $X_0$ est la variable aléatoire constante égale à 1, on a $P(X_0=1)=1$ et, pour tout $i\in[\![2,n]\!]$, $P(X_0=i)=0$. Ainsi

$$V_0=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

Après un déplacement, on peut être sur l'un des $n-1$ sommets numérotés de 2 à $n$ avec équiprobabilité. Ainsi,

$$X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![2,n]\!]).$$

En particulier, $P(X_1 = 1) = 0$ et, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $P(X_1 = i) = \dfrac{1}{n-1}$. Ainsi,

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \end{pmatrix}.$$

(8) La matrice de transition de la chaîne est la matrice dont le coefficient situé à la $i-$ème ligne et $j-$ème colonne correspond à la probabilité

$$P_{X_k=i}(X_{k+1} = j).$$

Comme (pour $i \neq j$) depuis le sommet $i$, on peut passer à n'importe lequel des autres sommets (y compris donc le sommet $j$) avec la même probabilité $1/(n-1)$, on a que la matrice de transition de cette chaîne de Markov est

$$A_n = \frac{1}{n-1} M_n,$$

où $M_n$ est la matrice étudiée à la Partie I.

(9) (a) Un état-stable de la chaîne est un vecteur propre à gauche associé à la valeur propre 1 de la matrice de transition dont les coefficients sont positifs et dont la somme des coefficients vaut 1 (on l'appelle vecteur *stochastique*). Plus précisément, $\pi = (p_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est un état stable de la chaîne de Markov $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrice de transition $A_n$ si

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ p_i \geq 0, \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \quad \text{et} \quad \pi A_n = \pi.$$

(b) Soit $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$.

Observons d'abord que tous les coefficients de $V$ sont bien positifs et que leur somme fait clairement 1. Ensuite

$$VA_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = V,$$

et $V$ est bien un état stable de la chaîne de Markov $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

(10) (a) C'est une conséquence de la formule des probabilités totales (avec le s.c.e $\{[X_k = i] \ : \ i \in [\![1, n]\!]\}$) mais on ne demandait pas de justifier. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$V_{k+1} = V_k A_n = \frac{1}{n-1} V_k M_n.$$

(b) On procède à nouveau par récurrence sur $k$.

- <u>initialisation.</u> Pour $k = 0$. On a $\dfrac{1}{(n-1)^0} V_0 M_n^0 = V_0$ et c'est vérifié.
- <u>hérédité.</u> Supposons que, pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, on ait $V_k = \dfrac{1}{(n-1)^k} V_0 {M_n}^k$. Alors

$$\begin{aligned} V_{k+1} &= \frac{1}{n-1} V_k M_n \\ &= \frac{1}{n-1} \frac{1}{(n-1)^k} V_0 {M_n}^k M_n && \text{par HR} \\ &= \frac{1}{(n-1)^{k+1}} V_0 M_n^{k+1}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule au rang $k+1$ et termine la récurrence.

(c) D'après la Question (2e), les coefficients de la matrice $\dfrac{1}{(n-1)^k} {M_n}^k$ sont

$$\frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n(n-1)^k} = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^{k+1}}{n(n-1)^k}$$

en dehors de la diagonale, et

$$\frac{(n-1)^k + (n-1)(-1)^k}{n(n-1)^k} = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^k}{n(n-1)^{k-1}}$$

sur la diagonale.

Par ce qui précède, $V_k = \dfrac{1}{(n-1)^k} V_0 {M_n}^k$.

D'après ce qu'on a obtenu ci-avant pour $V_0$, $V_k$ est donc la première ligne de la matrice $\dfrac{1}{(n-1)^k}{M_n}^k$, ainsi

$$\begin{aligned} V_k &= \begin{pmatrix} P(X_k=1) & P(X_k=2) & \cdots & P(X_k=n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^k}{n(n-1)^{k-1}} & \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^{k+1}}{n(n-1)^k} & \cdots & \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^{k+1}}{n(n-1)^k} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observons alors que, si $n \geq 3$, on a $\left|\dfrac{-1}{n-1}\right| < 1$ donc, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$P(X_k = i) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{n}.$$

Ainsi, en notant $Z$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers $Z$.

(11) On a bien convergence de la chaîne vers l'état stable.

**Remarque**

Petite coquille encore dans le sujet, la convergence en loi n'a lieu que pour $n \geq 3$. En effet, pour $n = 2$,

$$\frac{(-1)^{k-1}}{(n-1)^{k-1}} = (-1)^{k-1}$$

qui n'a pas de limite lorsque $k \to +\infty$.