

# Exercice 1

Les parties B et C sont indépendantes de la partie A.

## Partie A : Résolution d'un système différentiel

On considère l'équation différentielle

$$(E) : x'(t) = -x(t) + e^{-t},$$

où  $x$  est une fonction définie et dérivable sur  $\mathbf{R}$  à valeurs dans  $\mathbf{R}$ .

1. a) Résoudre l'équation différentielle homogène  $x'(t) = -x(t)$  sur  $\mathbf{R}$ .
- b) Déterminer une solution particulière  $x_0$  de (E) de la forme  $x_0 : t \mapsto (at + b)e^{-t}$  avec  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ .
- c) Résoudre l'équation différentielle (E).

On s'intéresse maintenant au système différentiel :

$$(S) : \begin{cases} x'(t) &= -x(t) + y(t) \\ y'(t) &= -y(t) \end{cases}$$

où  $x$  et  $y$  désignent des fonctions définies et dérivables sur  $\mathbf{R}$  à valeurs dans  $\mathbf{R}$ .

2. a) Donner la matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$  telle que

$$(S) \iff X'(t) = AX(t) \quad \text{avec} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

La matrice  $A$  est-elle diagonalisable?

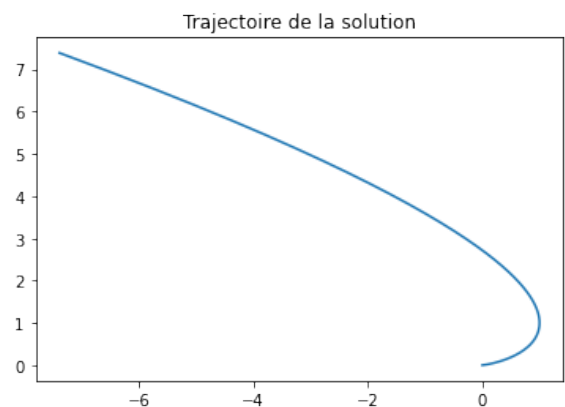
- b) Justifier l'existence d'une unique solution  $(x, y)$  de (S) telle que  $x(0) = 1$  et  $y(0) = 1$ .
  - c) Déterminer cette solution  $(x, y)$  en vous aidant de la question 1.
  - d) Étudier la convergence de la solution  $(x, y)$  vers un état d'équilibre lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .
3. Recopier et compléter le programme en langage Python ci-dessous de manière à ce qu'il produise le graphique sur la droite représentant la trajectoire  $t \mapsto (x(t), y(t))$  pour  $t \in [-2, 10]$ .

On rappelle que la commande `np.linspace(-2, 10, 200)` crée une liste de 200 valeurs régulièrement espacées allant de  $-2$  à  $10$ .

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T = np.linspace(-2, 10, 200)
x = [ ... for t in T]
y = [ ... for t in T]

plt.title("Trajectoire de la solution")
plt.plot( ... )
plt.show()
```



### Partie B : Étude d'une suite de fonctions

Pour tout entier  $k \in \mathbf{N}^*$ , on considère la fonction  $f_k$  définie sur  $\mathbf{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f_k(x) = (x+1)e^{kx}.$$

On note  $\mathcal{C}_k$  la courbe de  $f_k$  dans le plan muni d'un repère orthonormé.

4. a) Calculer les limites de la fonction  $f_k$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .  
 b) Dresser le tableau de variation de  $f_k$  en y faisant figurer les valeurs prises par  $f_k$  en  $-1$  et en  $0$ .
5. a) Étudier la position relative des courbes  $\mathcal{C}_k$  et  $\mathcal{C}_{k+1}$ . Vous préciserez leurs points d'intersection.  
 b) Dessiner sur un même graphique l'allure de  $\mathcal{C}_k$  et  $\mathcal{C}_{k+1}$ .

### Partie C : Étude d'une suite implicite

6. a) Montrer que, pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$ , l'équation  $f_k(x) = k$  admet une unique solution dans  $\mathbf{R}$  notée  $u_k$ .  
 b) Déterminer explicitement  $u_1$ .
7. Montrer que, pour tout entier  $k \geq 1$ , on a :

$$0 \leq u_k \leq \frac{\ln(k)}{k}.$$

En déduire que la suite  $(u_k)$  converge et donner sa limite.

8. a) Soit  $k \geq 1$  un entier, montrer que :

$$u_k = \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(u_k + 1)}{k}.$$

- b) En déduire que  $u_k \sim \frac{\ln(k)}{k}$  lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ .
9. Quelle est la nature de la série  $\sum_{k \geq 1} u_k$  ?

## Exercice 2

On considère les matrices carrées d'ordre deux suivantes :

$$0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note  $\mathcal{C}$  le sous-ensemble de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$  défini par :

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) ; AM = MA\}.$$

**Partie A : Étude de  $A$  et de  $\mathcal{C}$**

1. Calculer  $A^2$ . En déduire que  $A$  est inversible et donner son inverse.
2. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable?
3. Justifier que  $\mathcal{C}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ .
4.
  - a) Résoudre l'équation  $AM = MA$  d'inconnue  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ .
  - b) Montrer que  $(I_2, A)$  est une base de  $\mathcal{C}$ .
5. Soient  $M$  et  $N$  deux matrices quelconques de  $\mathcal{C}$ .
  - a) Montrer que le produit  $MN$  appartient à  $\mathcal{C}$ .
  - b) Montrer que  $M$  et  $N$  commutent, c'est-à-dire que  $MN = NM$ .
6. Soit  $M$  une matrice non nulle de  $\mathcal{C}$ . Montrer que  $M$  est inversible et que  $M^{-1}$  appartient à  $\mathcal{C}$ .

**Partie B : Toute équation du second degré admet une solution dans  $\mathcal{C}$**

On fixe un polynôme unitaire du second degré à coefficients réels :

$$P(x) = x^2 + ux + v \quad \text{avec } (u, v) \in \mathbf{R}^2.$$

On note  $\Delta = u^2 - 4v$  son discriminant.

Le but de cette partie est de montrer qu'il existe une matrice  $M \in \mathcal{C}$  telle que  $P(M) = 0_2$ .

7. Soit  $M = aI_2 + bA$  avec  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ .
  - a) Montrer :  $M^2 = (a^2 - b^2)I_2 + 2abA$ .
  - b) En déduire :

$$P(M) = 0_2 \iff \begin{cases} a^2 - b^2 + ua + v = 0 \\ 2ab + ub = 0 \end{cases}$$

8. Dans cette question, on montre que le système ci-dessus admet au moins une solution  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  en distinguant deux cas :
  - a) Si  $\Delta \geq 0$ , montrer que le système admet au moins une solution de la forme  $(a, 0)$ .
  - b) Si  $\Delta < 0$ , montrer que le système admet au moins une solution  $(a, b)$  avec  $b \neq 0$ .
9. En vous aidant de la question précédente, donner une matrice  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$  telle que  $M^2 + M + I_2 = 0_2$ .

**Partie C : Un endomorphisme bijectif de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$**

On considère l'application  $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$  définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}), \quad \varphi(M) = AMA.$$

On note  $(E_1, E_2, E_3, E_4)$  la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$  définie par :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ .
11. Calculer  $\varphi \circ \varphi$ . En déduire que l'endomorphisme  $\varphi$  est bijectif, et donner  $\varphi^{-1}$ .
12.
  - a) Calculer  $\varphi(E_1), \dots, \varphi(E_4)$ , puis donner la matrice  $B$  de  $\varphi$  dans la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ .
  - b) Justifier sans calcul que  $B$  est diagonalisable et  $\text{Sp}(B) = \{-1, 1\}$ .  
(On pourra remarquer que  $B^2 = I_4$  où  $I_4$  est la matrice identité d'ordre 4)
  - c) Déterminer une base de chaque sous-espace propre de  $B$ .

## Exercice 3

Soit  $N$  un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose d'une urne contenant  $N$  boules numérotées de 1 à  $N$ , et on effectue une succession illimitée de tirages d'une boule avec remise dans l'urne. Pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$ , on note  $X_k$  la variable aléatoire indiquant le numéro de la boule obtenue au  $k$ -ième tirage.

Pour tout entier  $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$ , on note  $T_i$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir  $i$  numéros distincts, ainsi  $T_i = k$  si on a obtenu  $i$  numéros distincts lors des  $k$  premiers tirages, mais seulement  $i - 1$  numéros distincts lors des  $k - 1$  premiers tirages.

*Exemple* : on suppose  $N = 4$ , si les huit premiers tirages donnent

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$X_i$	2	3	3	3	1	2	1	4

alors  $T_1 = 1$ ,  $T_2 = 2$ ,  $T_3 = 5$  et  $T_4 = 8$ .

### Partie A : Simulation informatique

1. Soit  $k \in \mathbf{N}^*$ . Reconnaitre la loi de  $X_k$ .
2. Le programme en langage Python ci-dessous définit une fonction « ajout » qui prend en argument une liste  $L$  et un entier  $x$ .

```
def ajout(L,x):
    if (x in L) == False :
        L.append(x)
```

Expliquez succinctement comment et à quelle condition l'exécution de la commande `ajout(L,x)` modifie la liste  $L$ .

3. Recopier et compléter la fonction Python « Simul\_T » ci-dessous. Cette fonction prend en argument deux entiers  $N \in \mathbf{N}^*$  et  $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$ . Elle a pour but de simuler la variable aléatoire  $T_i$ . Dans le script nous notons :
  - $L$  la liste sans répétition des numéros sortis lors des tirages effectués;
  - $k$  le rang du tirage en cours;
  - $x$  le résultat du tirage en cours.

```
import numpy.random as rd

def Simul_T(N,i):
    L = []
    k = 0
    while ... :
        x = rd.randint(1,N+1)
        ajout(L,x)
        k = ...
    return(...)
```

4. On suppose  $N = 3$ . Rédiger un programme Python qui calcule et affiche la moyenne de 100 réalisations de `Simul_T(3,2)`. Que représente le résultat obtenu par rapport à la variable aléatoire  $T_2$  ?

**Partie B : Étude de  $T_2$  dans le cas d'une urne contenant trois boules**

Dans cette partie on suppose  $N = 3$ , ainsi l'urne contient exactement trois boules numérotées 1, 2 et 3.

5. Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire  $T_2$ .
6. Soit  $k \geq 2$  un entier fixé.
  - a) Décrire l'évènement  $(T_2 = k) \cap (X_1 = 1)$  à l'aide des évènements  $(X_j = 1)$  et  $(X_j \neq 1)$  avec  $j \in \mathbf{N}^*$ .
  - b) En déduire  $P((T_2 = k) \cap (X_1 = 1))$ .
  - c) Montrer que  $P(T_2 = k) = \frac{2}{3^{k-1}}$ .
7. Justifier que  $T_2$  admet une espérance et la calculer.
8. Déterminer la loi de la variable aléatoire  $Z_2 = T_2 - 1$ .  
Reconnaître une loi usuelle, retrouver l'espérance de  $T_2$  et donner sa variance.

**Partie C : Quelques résultats dans le cas général**

On retourne au cas général, l'urne contient  $N$  boules numérotées de 1 à  $N$ .

Pour tout  $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$ , on note  $Z_i$  la variable aléatoire définie par :

$$\begin{cases} Z_1 = 1 & \text{si } i = 1, \\ Z_i = T_i - T_{i-1} & \text{si } i \geq 2. \end{cases}$$

La variable aléatoire  $Z_i$  donne le nombre de tirages nécessaires, après le  $T_{i-1}$ -ième tirage, pour obtenir un numéro distinct des  $i - 1$  numéros déjà tirés.

On admet que les variable aléatoires  $Z_1, \dots, Z_N$  sont indépendantes.

**Décomposition de  $T_i$**

9. Soit  $i \in \llbracket 2; N \rrbracket$ .
  - a) Justifier que  $Z_i$  suit la loi géométrique de paramètre  $\frac{N-i+1}{N}$ .
  - b) Exprimer  $E(Z_i)$  et  $V(Z_i)$  en fonction de  $i$  et  $N$ . Vérifier que ces formules restent vraies pour  $i = 1$ .
10. Soit  $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$ . Exprimer  $T_i$  comme somme de  $Z_1, \dots, Z_i$ .

**Loi de  $T_3$**

11.
  - a) Calculer  $P((Z_2 = \ell) \cap (Z_3 = k))$  pour tous  $\ell$  et  $k$  dans  $\mathbf{N}^*$ .
  - b) En déduire que, pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$P(Z_2 + Z_3 = n) = \frac{(N-1)(N-2)}{2} \left( \left( \frac{2}{N} \right)^n - \frac{2}{N^n} \right).$$

- c) Déterminer la loi de  $T_3$ .

**Espérance et covariance**

12. Soit  $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$ , montrer que  $E(T_i) = N \sum_{k=N-i+1}^N \frac{1}{k}$ .

13. Soient  $i$  et  $j$  deux entiers tels que  $1 \leq i \leq j \leq N$ , montrer que

$$\text{cov}(T_i, T_j) = V(T_i).$$

où  $\text{cov}(T_i, T_j)$  désigne la covariance de  $T_i$  et  $T_j$ .

**Fin de l'énoncé**