Math ECG 2. 2023-2024

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Exercices ESSEC/HEC

Une sélection

Exercice 1

Partie 1 - Inégalité de convexité

On rappelle qu'une fonction f est dite **convexe** sur un intervalle I si pour tous $x_1, x_2 \in I$, pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in [0;1]$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, on a

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Une fonction g est dite concave (sur I) si $-g$ est convexe (sur I).

1. L'objet de cette première question est de montrer l'équivalence entre les assertions suivantes:

- f est convexe sur I ;
- Pour tout entier $n \geq 2$, f vérifie la condition (C_n) :
  Pour tous $x_1, ..., x_n \in I$, pour tous $\lambda_1, ..., \lambda_n \in [0;1]$ tels que $\lambda_1 + ... + \lambda_n = 1$, on a
  $$f(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + ... + \lambda_n f(x_n).$$

a. Montrer que si, pour tout entier $n \geq 2$ f vérifie la condition (C_n), alors f est convexe.

b. On va montrer l'implication réciproque par **récurrence** sur $n \geq 2$. On suppose donc que f est convexe.

i. Montrer que la propriété est vrai pour $n = 2$.

ii. On suppose que la propriété est vraie pour un certain $n \geq 2$. On considère alors un $(n+1)-$uplet $(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1})$ de $[0;1]$ vérifiant $\lambda_1 + ... + \lambda_{n+1} = 1$ et un $(n+1)-$uplet $(x_1, ..., x_{n+1})$ d'éléments de I. En introduisant les coefficients

$$\mu_j = \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

montrer que

$$f(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \leq \lambda_1 f(x_1) + ... + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}).$$

2. Application : Inégalité de Jensen.
On considère une variable aléatoire X à valeurs finies telle que $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\} \subset I$ et, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $P(X = x_k) = p_k$. Montrer que, pour toute fonction φ convexe sur I, on a

$$\varphi(E(X)) \leq E(\varphi(X)).$$

Partie 2 - Entropie

Soit A un ensemble fini non vide. On dit que X est une variable aléatoire dont la loi est à support A, si X est à valeurs dans A et si pour tout $x \in A$, $P(X = x) > 0$.

Soit X une variable de loi à support $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ où n est un entier naturel. On appelle **entropie** de X le réel

$$H(X) = -\sum_{k=0}^{n} P(X = k) \ln(P(X = k)).$$

3. a. On définit la fonction $g : \{0,1,2,\ldots,n\} \to \mathbb{R}$ en posant $g(k) = \ln(P(X = k))$ pour k élément de $\{0,1,2,\ldots,n\}$. Montrer que $H(X) = -E(g(X))$.

b. Montrer que $H(X) \geq 0$.

c. Soit p un réel tel que $0 < p < 1$. On suppose dans cette question que X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

i. Calculer $H(X)$ en fonction de p. On note ψ la fonction qui, à p, assoicie $H(X)$.

ii. Montrer que ψ est concave sur $]0,1[$.

iii. Déterminer la valeur p_0 où ψ est maximale.

d. On suppose dans cette question que la loi de X est à support $\{0,1,2,3\}$ avec les probabilités

$$P(X=0) = \frac{1}{2} \quad ; \quad P(X=1) = \frac{1}{4} \quad ; \quad P(X=2) = P(X=3) = \frac{1}{8}.$$

Calculer $H(X)$.

On souhaite maintenant démontrer quelques inégalités concernant l'entropie.

4. Soit X une variable aléatoire à support $\{0,1,\ldots,n\}$ où n est un entier naturel non nul fixé. On pose, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $p_k = P(X = k)$.

a. Montrer, à l'aide du résultat obtenu à la Question **1.**, que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k \ln\left(\frac{1}{(n+1)p_k}\right) \leq 0.$

b. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k \ln\left[(n+1)p_k\right] = \ln(n+1) - H(X).$

c. Déduire des deux questions précédentes que : $H(X) \leq \ln(n+1)$.

d. On suppose que X suit une loi uniforme sur $\{0,1,\ldots,n\}$. Calculer $H(X)$.

5. Soient X et Y deux variables aléatoires *de même loi* à support $\{0,1,\ldots,n\}$.
On suppose en outre X et Y indépendantes.

a. Montrer que $P(X = Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (P(X=k))^2.$

b. On pose $v(k) = P(X = k)$ pour tout k élément de $\{0,1,\ldots,n\}$.
Montrer, à l'aide de l'inégalité de Jensen obtenue à la Question **2.**, que

$$e^{(E(\ln(v(X))))} \leq E(v(X)).$$

c. En déduire que

$$e^{-H(X)} \leq P(X = Y).$$

d. Donner un exemple de loi où l'inégalité précédente est une égalité.

Exercice 2

Partie 1 - Lois composées

On considère :

- un espace probabilisé $(\Omega, A, \mathbb{P})$ et J un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^+$;
- une variable aléatoire Y sur cet espace à valeurs dans J.
- une famille $(X_t)_{t\in J}$ de variables aléatoires sur cet espace **à valeurs dans** $\mathbb{N}$ et **indépendantes de** Y telles que pour tout $t \in J$,

$$X_t \text{ suit la loi } \mu(t)$$

$\mu(t)$ désignant une loi de probabilité de paramètre t.

On définit la variable aléatoire Z sur cet espace par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \text{si } Y(\omega) = t \text{ alors } Z(\omega) = X_t(\omega)$$

et on dit que Z suit la loi $\mu(Y)$.
On considère dans cette partie une telle variable Z qui suit la loi $\mu(Y)$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit aussi la fonction f_k de J dans $[0,1]$ par :

$$f_k(t) = \mathbb{P}([X_t = k])$$

$\rightsquigarrow$ *Cas où Y est discrète.* On suppose dans les Questions **1.** et **2.** que Y est discrète.

1. a. Soit $y \in Y(\Omega)$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}([Z = k] \cap [Y = y]) = f_k(y)\mathbb{P}([Y = y])$$

et si $\mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$,

$$\mathbb{P}_{[Y=y]}([Z = k]) = f_k(y)$$

b. En déduire que :

$$\mathbb{P}([Z = k]) = E(f_k(Y)).$$

c. *Un exemple où $J = \mathbb{N}^*$.*
Soit $p \in]0,1[$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ et si la loi de Y est définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}([Y = n]) = np^2(1-p)^{n-1}$$

montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre p.

2. On suppose que pour tout $t \in J$, $E(X_t)$ existe. On note $g(t)$ cette espérance et on suppose que $E(g(Y))$ existe.

a. Montrer que :

$$E(g(Y)) = \sum_{y \in Y(n)} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} k f_k(y)\,\mathbb{P}([Y = n]) \right).$$

b. En admettant que l'on peut inverser l'ordre des sommes, montrer que $E(Z)$ existe et que :

$$E(Z) = E(g(Y)).$$

$\rightsquigarrow$ *On admet que les resultats établis dans les Questions **1.** et **2.** sont encore vrais lorsque Y n'est plus discrète.*

3. *Un premier exemple.* On suppose que $J =]0,1[$, que la loi de X_t est la loi géométrique de paramètre t et que Y suit la loi uniforme sur $]0,1[$.

a. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Z = k]) = \dfrac{1}{k(k+1)}$. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?

b. Que vaut $E(X_t)$ en fonction de t ? Si l'on note g cette fonction de t, que peut-on dire de $E(g(Y))$?

4. *Un deuxième exemple.* On suppose que $J = [0,+\infty[$, que la loi de X_t est la loi de Poisson de paramètre t et que Y suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Par suite, Z suit la loi $\mathcal{P}(Y)$.
Par convention, la loi de Poisson de paramètre 0 est la loi de la variable aléatoire nulle.

a. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}([Z = k]) = \int_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda \mathrm{e}^{-(\lambda+1)t} \mathrm{d}t = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^{k+1}} \int_0^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x.$$

b. En raisonnant par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = 1.$$

c. Déterminer la loi de Z. Reconnaître la loi de $Z + 1$.

d. En déduire $E(Z)$. Ce résultat est-il cohérent avec l'egalite (2) ?

Partie 2 - Le modèle de Cori

On considère une population d'effectif infini dans laquelle un individu donné est infecté le jour 0 par un virus contagieux.
Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

- tout individu infecté par le virus est immédiatement contagieux et sa contagiosité ne dure que $(d+1)$ jours, du jour n où il est infecté jusqu'au jour $(n+d)$ $(n \in \mathbb{N})$;

- une fois infectés, les individus présentent un même profil de contagiosité donné par un $(d+1)$-uplet $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ qui dépend généralement de facteurs biologiques.

Pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, on dit que α_k est la contagiosité de tout individu ayant éte infecté k jours plus tôt.

Autrement dit, on peut considérer que α_k, lié à la nature du virus, détermine la proportion d'individus contaminés par un individu infecté, parmi tous ceux avec lesquels il est en contact k jours après sa contamination.

Finalement, les réels $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_d$ sont tels que, pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, $\alpha_k \in \,]0, 1[$ et on note $\alpha = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} \alpha_k$, ce qui signifie que α est la contagiosité globale d'un individu infecté sur toute la période où il est infecté.

On utilise les notations et définitions de la partie 1 avec $J = \mathbb{R}^+$.
On suppose que les variables aléatoires qui interviennent par la suite sont définies sur l'espace $(\Omega, A, \mathbb{P})$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note R_n la variable aléatoire qui désigne le nombre moyen de contacts réalisés le jour n par un individu contagieux ce jour-là.
  On suppose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de $E(R_n)$ et on pose $r_n = E(R_n)$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Z_n la variable aléatoire égale au nombre total d'individus qui sont infectés et donc deviennent contagieux le n-ième jour. Par exemple, $Z_0 = 1$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note I_n la variable aléatoire égale à la contagiosité globale de la population le n-ième jour, définie par :
$$I_n = \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k Z_{n-k} \qquad (*)$$

- On suppose enfin que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n et R_n sont indépendantes et que si l'on pose $Y_n = R_n I_n$, on a :
$$Z_{n+1} \text{ suit la loi } \mathcal{P}(Y_n),$$
  où $\mathcal{P}$ désigne la loi de Poisson. Ainsi la loi de Z_{n+1} ne dépend que des lois de R_n et de I_n.

5. Donner une justification de $(*)$.

6. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $E(I_n)$ existe.
Montrer que $E(Y_n)$ existe et en utilisant un résultat de la Partie 1, montrer que $E(Z_{n+1})$ existe et vaut $r_n E(I_n)$.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = E(Z_n)$ existe et vérifie la relation de récurrence
$$z_{n+1} = r_n \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k z_{n-k}.$$

7. Soit $(U_n)_{n\geqslant 0}$, $(V_n)_{n\geqslant 0}$, deux suites d'événements tels que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(V_n) = 1$.

Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n \cap V_n) = 1$.

$\rightsquigarrow$ On rappelle que l'on dit qu'un événement A est presque sûr lorsque $\mathbb{P}(A) = 1$.

8. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \bigcap_{k=n}^{+\infty} [Z_k = 0]$ et B l'événement "la contamination s'éteint au bout d'un nombre fini de jours".

a. Montrer que $\mathbb{P}(B) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

b. En distinguant les cas où $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$ est nulle ou pas, établir que, pour tout $p \geqslant d$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p} [Z_k = 0]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$$

puis que $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$.

c. En déduire que B est presque sûr si et seulement si $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}([Z_n = 0]) = 1$.

d. Montrer que cela équivaut aussi au fait que $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers 0.

9. a. Montrer, en utilisant un résultat de la Partie 1, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}([Z_{n+1} = 0]) = E\left(\mathrm{e}^{-Y_n}\right).$$

b. On suppose que $\lim_{n \to +\infty} z_n = 0$.
En déduire que B est presque sûr. (*On pourra montrer que pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$.*)

Exercice 3

Partie 1 - Distance en variation

On considère un ensemble $\mathcal{K}$ qui peut être ou bien une partie finie de $\mathbb{N}$ ou bien égal à $\mathbb{N}$ tout entier. Sur l'espace probabilisable $(\mathcal{K}, \mathcal{P}(\mathcal{K}))$, on définit deux probabilités P et Q et on note

$$p_k = P(\{k\}) \quad \text{et} \quad q_k = Q(\{k\}) \qquad (k \in \mathcal{K}).$$

En particulier, on a $p_k, q_k \geq 0$,

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} p_k = \sum_{k \in \mathcal{K}} q_k = 1,$$

et, si A est une partie de $\mathcal{K}$,

$$P(A) = \sum_{k \in A} p_k.$$

Si $\mathcal{K}$ est fini, on introduit la *distance en variation entre les probabilités* P et Q par la formule

$$D(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{K}} |p_k - q_k|.$$

1. On suppose dans cette question que $\mathcal{K} = \{0; 1\}$.
Exprimer $D(P, Q)$, en fonction de p_1 et q_1.

2. On suppose dans cette question que $\mathcal{K} = \mathbb{N}$.

a. Montrer, à l'aide de l'inégalité triangulaire, que la série de terme général $|p_k - q_k|$ est convergente.

On généralise alors la définition de distance en variation entre des probabilités P et Q définies sur $\mathbb{N}$ en posant

$$D(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k - q_k|.$$

b. Vérifier que pour toute partie A de $\mathbb{N}$, $|P(A) - Q(A)| \leq 1$.

c. Montrer que, pour toute partie A de $\mathbb{N}$,

$$2|P(A) - Q(A)| = \left|\sum_{k \in A}(p_k - q_k)\right| + \left|\sum_{k \in \overline{A}}(p_k - q_k)\right|.$$

d. En déduire que, pour toute partie A de $\mathbb{N}$,

$$|P(A) - Q(A)| \leq D(P, Q).$$

e. Montrer qu'en prenant $A = \{k \in \mathbb{N} : \ q_k \geq p_k\}$, l'inégalité précédente devient une égalité.

f. En déduire que

$$D(P, Q) = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} \min(p_k, q_k).$$

g. On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) tel que X soit de loi $P = (p_k)$ et Y de loi $Q = (q_k)$. Montrer que

$$D(P, Q) \leq P(X \neq Y).$$

Partie 2 - Couplage binomiale-Poisson

Soient n un entier strictement positif et $\lambda > 0$ avec $\lambda < n$.

3. Soit $(Y_1, ..., Y_n)$ un $n-$échantillon de $\mathcal{P}(\lambda/n)$. Donner sans démonstration la loi de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

4. Vérifier que, pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) = 1 - (1 - x)e^x \in [0; 1]$.

Soit $(U_1, ..., U_n)$ un $n-$échantillon de $\mathcal{B}(f(\lambda/n))$ tel que les variables U_i sont indépendantes des variables Y_i. Pour $i \in [\![1; n]\!]$, on pose

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{si } U_i = Y_i \\ 1, & \text{sinon} \end{cases}$$

5. Vérifier que pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\lambda/n)$ et donner la loi de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

6. Montrer que, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $P(X_i \neq Y_i) \leq \dfrac{\lambda^2}{n^2}$. (*On pourra établir et utiliser que* $1 + x \leq \exp(x)$.)

7. Montrer que

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \neq \sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^{n} [X_i \neq Y_i]\right).$$

8. En déduire que

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \neq \sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \leq \frac{\lambda^2}{n}$$

et conclure.

Exercice 4

Partie 1 - Variables indicatrices

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et A un évènement.

On appelle *variable indicatrice* de l'évènement A la variable aléatoire notée $\mathbb{1}_A$ définie par

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \in A \\ 0, & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

1. Reconnaître la loi de $\mathbb{1}_A$. Préciser son espérance et sa variance.

2. Soient A et B deux évènements. Montrer que $\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \cap B}$.

3. Calculer alors $\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On introduit la *fonction indicatrice* de I avec la formule

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in I \\ 0, & \text{si } x \notin I \end{cases}$$

Soient X une variable aléatoire réelle de densité f et $s \in \mathbb{R}$. On remarque alors que

$$\mathbb{1}_{[X \geq s]} = \chi_{[s;+\infty[}(X).$$

3. Soient X une variable aléatoire réelle de densité f et $s \in \mathbb{R}$. Soit $Y = g(X)$ une autre variable aléatoire. Justifier soigneusement, que $\mathbb{1}_{[X \geq s]}Y$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[s;+\infty[}(x) g(x) f(x) \mathrm{d}x = \int_{s}^{+\infty} g(x) f(x) \mathrm{d}x$$

converge.

Partie 2 - Optimisation d'une stratégie

On étudie le jeu suivant: X_1 et X_2 étant deux variables indépendantes de loi uniforme sur $[0;1]$, un joueur observe d'abord X_1. S'il décide d'en rester là, il gagne la valeur observée. S'il décide de continuer, il observe et gagne X_2. On note G la v.a. correspondant au gain du joueur.

4. Sa première stratégie est de toujours continuer et observer X_2. Quelle est alors l'espérance de son gain?

5. Dans un deuxième temps, il décide de continuer et d'observer X_2 si et seulement si $X_1 \leq s$, où $s \in [0;1]$ est un seuil qu'il se fixe à l'avance.

a. Justifier que

$$G = \mathbb{1}_{X_1 \geq s} X_1 + \mathbb{1}_{X_1 < s} X_2.$$

b. Quelle est l'espérance du gain dans ce cas? Quelle valeur s doit-il choisir pour maximiser cette espérance?

6. Si, dans une variante du jeu précédent, on pouvait observer X_1 et X_2 avant de prendre une décision, quelle serait la stratégie et combien rapporterait-elle en moyenne?

Exercice 5

Si f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, le *produit de convolution* de f et de g est la fonction $f \star g$ définie par

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(t-x) \mathrm{d}x$$

définie pour tout réel x où l'intégrale ci-dessus converge.

On **admet** le résultat suivant. Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** de densités respectives f et g **toutes deux bornées** alors $X+Y$ est encore une variable aléatoire dont une densité est donnée par $f \star g$.

On note $f_{m,\sigma}$ la fonction de densité d'une variable gaussienne de moyenne m et de variance σ^2 et Φ désigne la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Montrer que $f_{0,\sigma}$ est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$.

2. Soit a un réel strictement positif et b et c deux réels quelconques. Trouver trois réels α, m et σ, en fonction de a, b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} + \alpha = ax^2 + bx + c.$$

3. En déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(ax^2+bx+c)) \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right).$$

4. Démontrer que $\forall a > 0$, $\forall b \in \mathbb{R}$, les assertions suivantes sont équivalentes :

i. X suit la loi normale de paramètres m, σ^2 ;

ii. $aX + b$ suit la loi normale de paramètres $am + b, a^2\sigma^2$.

5. Soient G et G' deux variables aléatoires gaussiennes, indépendantes, centrées réduites et λ, μ deux réels positifs vérifiant $\lambda^2 + \mu^2 = 1$.
Montrer que $\lambda G + \mu G'$ est une variable à densité dont on déterminera une densité h. En déduire que $\lambda G + \mu G'$ est une variable gaussienne dont on donnera l'espérance et la variance.

6. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes, d'espérances respectives m_1 et m_2 et de variances respectives σ_1^2 et σ_2^2. Déduire de la question précédente que $X_1 + X_2$ suit une loi normale dont on précisera les paramètres.

Pour $\alpha > 0$, on dit qu'une variable X est *α-sous-gaussienne* si pour tout t réel, $E(e^{tX}) \leq e^{\alpha^2 t^2/2}$.

7. À l'aide de la Question **3.**, montrer que, si X est une variable gaussienne centrée réduite, X est $1-$sous-gaussienne.

8. Montrer que $\forall p \geq 1$, $2^p p! \leq (2p)!$

9. En déduire que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n=0}^{N} \frac{t^n}{n!} + \sum_{n=0}^{N} \frac{(-t)^n}{n!} \leq 2 \sum_{n=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{t^{2n}}{2^n n!}$$

puis que

$$\frac{e^t + e^{-t}}{2} \leq e^{t^2/2}.$$

10. Soit t un réel et $x \in [-1, 1]$.

En utilisant la convexité de la fonction exponentielle sur l'intervalle d'extrémités t et $-t$, montrer que

$$e^{tx} \leq \frac{1+x}{2} e^t + \frac{1-x}{2} e^{-t}.$$

11. Soient X_1, X_2,...,X_n des variables indépendantes, α-sous-gaussiennes et $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ des réels tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 = 1.$$

Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i$ est α-sous-gaussienne.

12. Soit X une variable α-sous-gaussienne et $\lambda > 0$.

(a) En utilisant l'inégalité de Markov, montrer que $\forall t > 0$, on a :

$$P(X \geq \lambda) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right).$$

(b) En déduire que

$$P(|X| \geq \lambda) \leq 2\exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right).$$

(c) Étudier la fonction $t \mapsto \dfrac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda$ et montrer que $\forall \lambda > 0$,

$$P(|X| \geq \lambda) \leq 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right).$$