Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Compléments

Mardi 3 Octobre

Exercice 1. Soient f, g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(1) On suppose que $g(x) = o(f(x)), x \to +\infty$. Montrer que $\exp(g(x)) = o\left(\exp(f(x))\right),\ x \to +\infty$.
(2) En considérant $f(x) = x^2 + x$ et $g(x) = x^2$, montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x$.
Pour tout entier $n \geq 2$, on considère l'équation (E_n) : $g(x) = n$, d'inconnue le réel x.

(1) Montrer que l'équation (E_n) admet exactement deux solutions, l'une strictement négative notée α_n et l'autre strictement positive notée β_n.

(2) **Limite de** β_n.

(a) Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.
(b) Montrer que g réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[1; +\infty[$ puis dresser le tableau de variations de g^{-1}.
(c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = +\infty$.

(3) **Équivalent de** β_n.

(a) Montrer que: $1 \leqslant g(\ln n) \leqslant n$.
(b) En déduire que: $g(\ln(2n)) \geqslant n$. (*On donne :* $\ln 2 \simeq 0,69$.)
(c) En déduire que $\ln(n) \leqslant \beta_n \leqslant \ln(2n)$, puis en déduire un équivalent de β_n.

Exercice 3. (Un DL d'ordre 3). On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3).$$

(1) Donner alors le DL à l'ordre 3 en 0 de e^x et de $\ln(1-x)$.
(2) Donner un équivalent, pour $n \to \infty$, à chacune des deux suites

$$u_n = e^{\frac{1}{n}} - 1, \qquad v_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

(3) Utiliser les DL précédents pour déterminer un équivalent de $u_n + v_n$.

Exercice 4. Soit $\gamma > 0$. On introduit les suites (u_n) et (v_n) définies, pour $n \in \mathbb{N}$, par

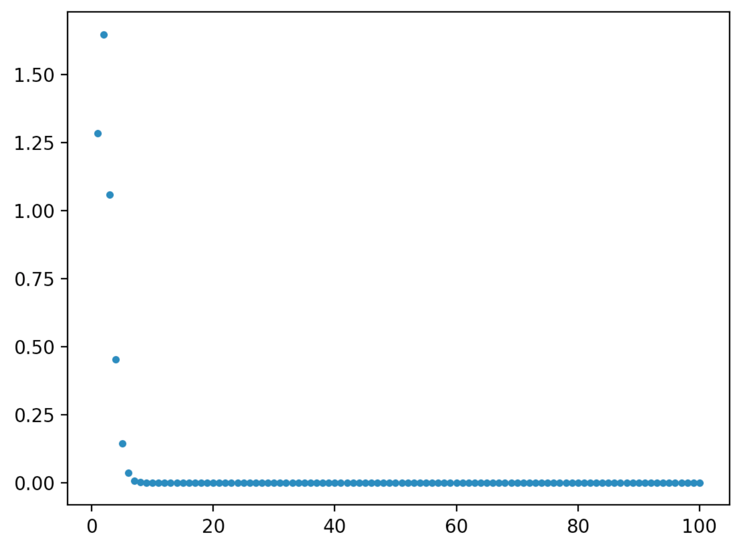
$$u_n = e^{\gamma n}, \quad \text{et} \quad v_n = n!.$$

(1) On considère le programme `Python` suivant dont l'exécution produit l'affichage ci-après.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

gamma=1/4
N=100
u=[np.exp(gamma*k) for k in range(1, N+1)]
v=[1]
for k in range(1,N+1):
    v.append(v[k-1]*k)
w=[u[k]/v[k] for k in range(N)]
plt.plot([k for k in range(1, N+1)], w, '.')
plt.show()
```

Affichage Python



Que représente le graphique obtenu ? Que peut-on en conjecturer ?

(2) On se propose de démontrer de façon générale le résultat conjecturé à la question précédente.

(a) Montrer qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} \times \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

(b) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$, telle que, pour tout $n \geq N$, on a

$$\frac{u_n}{v_n} \leq C \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}.$$

(c) Conclure.