Math ECG 2. 2023-2024

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Variation de la constante

Compléments

Méthode de la Variation de la constante

(1) *Cette première question est indépendante du reste de l'exercice.* On considère deux réels distincts α et β et on introduit les fonctions

$$f_0 : x \mapsto e^{\alpha x}, \quad g_0 : x \mapsto e^{\beta x}, \quad f_1 : x \mapsto xe^{\alpha x} \quad \text{et} \quad g_1 : x \mapsto xe^{\beta x},$$

On considère l'espace vectoriel E engendré par les fonctions f_0, f_1, g_0 et g_1. Montrer que (f_0, f_1, g_0, g_1) est une famille libre. En déduire la dimension de E. En déduire que les familles $(f_0, f_1), (f_0, g_0)$ et (g_0, g_1) sont libres.

Le but de l'exercice est d'introduire une méthode (qui n'est pas à apprendre!) permettant de trouver une solution particulière de chacune de ces équations, même si dans la plupart des sujets, la forme de la solution particulière sera donnée. La méthode présentée ici s'appelle *Méthode de variation de la constante.*

(2) **Premier ordre**.
On considère une fonction f, définie et continue sur un intervalle I, un réel $a \in \mathbb{R}$ et l'équation différentielle, d'inconnue y,

$$(E_1) \qquad y'(t) + ay(t) = f(t), \qquad (t \in I).$$

(a) Expliciter l'équation homogène (H_1) associée à (E_2) et expliciter une fonction y_1, base de l'espace vectoriel des solutions de (H_1).

(b) On introduit alors la fonction $y_0 : t \mapsto \lambda(t)y_1(t)$, où λ est une fonction définie et dérivable sur I que l'on cherche à déterminer.

(i) Montrer que y_0 est solution de (E_1) si et seulement si, pour tout $t \in I$,

$$\lambda'(t) = f(t)e^{at}.$$

(ii) Conclure que $y_0 : t \mapsto \left(\int_\alpha^t f(s)e^{as}\mathrm{d}s\right) e^{-at}$, où α est un élément de I, est solution particulière de (E_1).

(c) **Exemple.** Considérons l'équation différentielle

$$(E_1) \qquad y' - y = t^2 e^t$$

(i) Déterminer une base (y_1) de l'espace des solutions de l'équation homogène associée.
(ii) Déterminer avec la méthode précédente une solution particulière y_0 de (E_1).
(iii) Exprimer l'ensemble de toutes les solutions de (E_1).

(3) **Second ordre**.

On considère une fonction g, définie et continue sur un intervalle I, des réels $a, b \in \mathbb{R}$ et l'équation différentielle, d'inconnue y,

$$(E_2) \qquad y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t), \qquad (t \in I).$$

(a) Expliciter l'équation homogène (H_2) associée à (E_2) et expliciter une base (y_1, y_2) de l'espace vectoriel des solutions de (H_2). (*On distinguera deux cas.*)

(b) On introduit alors la fonction $y_0 :\ t \mapsto \lambda_1(t)y_1(t)+\lambda_2(t)y_2(t)$, où λ_1 et λ_2 sont deux fonctions définies et dérivables sur I que l'on cherche à déterminer. On **suppose** de plus que, pour tout $t \in I$,

$$y_0'(t) = \lambda_1 y_1'(t) + \lambda_2 y_2'(t).$$

(i) Montrer qu'on a alors nécessairement, pour tout $t \in I$,

$$\lambda_1'(t)y_1(t) + \lambda_2'(t)y_2(t) = 0.$$

(ii) Vérifier que $y_0'' = (\lambda_1' - a\lambda_1)y_1' + (\lambda_2' - a\lambda_2)y_2' - b(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$.

(iii) Montrer que si y_0 solution de (E_2), alors

$$\lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = g.$$

On a donc obtenu un système, d'inconnue (λ_1', λ_2')

$$\begin{cases} \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 &= 0 \\ \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' &= g \end{cases}$$

(iv) *Premier cas*: l'équation caractéristique admet deux racines distinctes r_1 et r_2. Montrer alors que le système ci-dessus donne

$$\lambda_1'(t) = \frac{1}{r_1 - r_2} g(t) e^{-r_1 t}, \qquad \lambda_2'(t) = \frac{1}{r_2 - r_1} g e^{-r_2 t}.$$

(v) *Deuxième cas*: l'équation caractéristique admet une seule racine double r_0. Montrer alors que le système ci-dessus donne

$$\lambda_1'(t) = -tg(t)e^{-r_0 t}, \qquad \lambda_2'(t) = g(t)e^{-r_0 t}.$$

(c) **Exemple.** Considérons l'équation différentielle

$$(E_2) \qquad y'' + 3y' + 2y = \frac{t-1}{t^2} e^{-t}, \qquad t > 0.$$

(i) Déterminer une base (y_1, y_2) de l'espace des solutions de l'équation homogène associée.

(ii) On considère une solution particulière y_0 de (E_2) de la forme

$$\lambda_1(t)y_1(t) + \lambda_2(t)y_2(t),$$

où $\lambda_1$et λ_2 sont deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ à déterminer. Expliciter, comme à la Question (3(b)iii) un système d'équations vérifiées par λ_1' et λ_2'.

(iii) Résoudre le système précédent.

(iv) Montrer à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $x > 0$,

$$\int_1^x \frac{1-t}{t^2} e^t \mathrm{d}t = \int_1^x \frac{e^t}{t^2} \mathrm{d}t - \int_1^x \frac{e^t}{t} \mathrm{d}t = -\frac{e^x}{x} + e.$$

En déduire une expression de λ_1 et de λ_2 puis de y_0.

(v) Exprimer l'ensemble de toutes les solutions de (E_2).