Math ECG 2. 2023-2024

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
ENC Bessières, Paris 17e.

Chapitre 0. Révisions

On propose, pour attaquer cette rentrée du meilleur pied, de consacrer les premières séances de travaux dirigés à des révisions - sous forme d'exercices accessibles pour tou.te.s - balayant (sans exhaustivité) le programme du cours de première année et piochant allègrement dans le cahier de vacances. Une partie de ces exercices pourra être reprise en *khôlle*.

1 Calculs & Récurrences

Exercice 1. Démontrer par récurrence les résultats suivants.

(1) Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.
Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{2}{2n+1}.$$

(2) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \qquad \sum_{k=1}^{n} kx^k = x\frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

(3) Rappeler la formule du triangle de Pascal.
Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}.$$

(4) Soit f la fonction définie sur $[0;1[$ par
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$
Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\forall x \in [0;1[, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}.$$
où $f^{(n)}$ désigne la dérivée $n-$ième de f.

(5)

Question type de sujet de concours

Soient A, D et P trois matrices telles que : $A = PDP^{-1}$. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = PD^nP^{-1}.$$

Exercice 2. (Calculs de sommes)

(1) Rappeler les formules de sommes (finies) du cours de première année.

(2) Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} k(2k^2-1) = \frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}.$$

(3) Montrer que
$$\sum_{k=n+1}^{2n} \left(\frac{1}{2^i}\right)^2 = \frac{4^n-1}{3\cdot 4^{2n}}.$$

(4) Calculer
$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k^2}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right).$$

(5) Rappeler la formule du binôme de Newton.
Calculer
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 3^k.$$

(6)

Question type de sujet de concours

Montrer que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$
En déduire la valeur, pour tout $x \in \mathbb{R}$, de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k$.

Exercice 3 (Séries usuelles)**.** Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme.

(1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n(n-1)}{6^n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{(n+1)!}$ (3) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n}{n!}$

Exercice 4 (Sommes doubles)**.** Calculer les sommes suivantes

(i) $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} (i-j)$, (ii) $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \max(i,j)$, (iii) $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} |i-j|$, (iv) $\displaystyle\sum_{0\leq i<j\leq n} \binom{j}{i} 2^i$

(v) $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} (i+j)^2$, (vi) $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{i}{i+j}$, (vii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(i^k)$, $(viii)$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} (-1)^{i+j}$.

(et en admettant la convergence)
$$(ix) \quad \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i^j}{i!j!}$$

2 Algèbre Linéaire

Exercice 5. Montrer que la famille de vecteurs ci-dessous forme une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$$

Exercice 6. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\-2 & 1 & 2\\-2 & -2 & 5\end{pmatrix}.$$

Résoudre les équations $AX = 0$, $AX = X$ et $AX = 3X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On présentera les solutions sous forme d'un Vect().

Exercice 7. Déterminer, à l'aide de la formule du binôme les puissances A^n où $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Exercice 8. On considère la matrice A ci-dessous

$$A = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\1 & 2 & -1\\1 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

(1) À l'aide du pivot de Gauss, vérifier que A est inversible et calculer son inverse.
(2) Calculer $A^2 - 4A + 3I$. En déduire une nouvelle preuve que A est inversible et donner une expression de A^{-1} en fonction de A et de I.

3 Analyse

Exercice 9.

Question type de sujet de concours

Montrer que, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.

Exercice 10. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x\ln(x), & \text{si } x > 0,\\ 0, & \text{si } x = 0.\end{cases}$$

(1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
(2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Exprimer la dérivée $f'(x)$ pour $x > 0$.
(3) La fonction est-elle dérivable en 0? Quelles en sont les conséquences graphiques?

Exercice 11. Que vaut

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ?$$

Exercice 12. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' - y' = 0$ de deux manières différentes:

(1) En appliquant le théorème du cours sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2.
(2) En faisant un changement de fonction inconnue pour se ramener à une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Exercice 13. Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

(1) $y'' - 3y' + 2y = 0$ (2) $y'' - 4y' + 4y = 0$ (3) $y'' - 2y = 0$

Exercice 14 (Suite et série)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

(1) Compléter la fonction Python ci-dessous de sorte qu'elle renvoie u_n

```
def suite_u(n):
    u = ...
    ......
        u = ...
    return ...
```

(2) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
(3) Étudier le sens de variation et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que sa limite.
(4) On pose pour tout entier n, $v_n = \ln(u_n)$.
Calculer v_{n+1} en fonction de v_n puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = v_0 - v_{n+1}$
(5) En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

Exercice 15 (Intégrales)**.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\mathrm{d}x$$

(1) (a) Calculer la dérivée de la fonction $g : x \mapsto (x+1)\ln(x+1) - x$.
(b) Calculer I_0.
(2) (a) Montrer que $I_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(b) Établir que la suite (I_n) est décroissante.
(c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.
(3) (a) Justifier l'égalité : $x^n \ln(1+x) \leq x^n$ pour tout $x \in [0,1]$.
(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
(c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$
(4) (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

(b) Montrer que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n+2}$$

et en déduire un encadrement de I_n.
(c) En déduire $\lim_{n\to+\infty} nI_n$

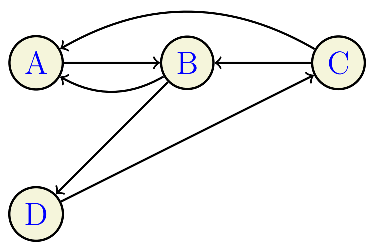
4 Graphes

Exercice 16.

(1) Écrire une fonction Python d'en-tête `def matrix_to_list(M):` qui prend en argument une matrice carrée M étant la matrice d'adjacence d'un graphe $\mathcal{G}$ et qui renvoie la liste d'adjacence du même graphe.

(2) Écrire une fonction Python d'en-tête `def nb_sommets_isoles(L):` qui prend en argument une liste L d'adjacence d'un graphe $\mathcal{G}$ et qui renvoie le nombre de sommets isolés du graphe.

Exercice 17. On considère le graphe orienté $\mathcal{G}$ ci-dessous.



(1) Déterminer la matrice M d'adjacence du graphe.
(2) Calculer M^2 et M^3.
(3) Montrer que $\mathcal{G}$ est connexe.

Exercice 18. (Extrait de **EML 2023**)

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ représenté dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ par la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) On note $v_1 = (2, -1)$ et $v_2 = (-1, 0)$. Montrer que (v_1, v_2) forme une base de $\mathbb{R}^2$.
(2) Déterminer la matrice T de f dans cette base.
(3) On note Q la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de v_1 et v_2 dans la base canonique. Justifier que Q est inversible. Déterminer Q^{-1} et vérifier que $B = QTQ^{-1}$.

On considère le *système différentiel* (Σ) suivant

$$(\Sigma) : \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -x - 4y \\ y' & = & x + 3y \end{array} \right.$$

où x et y désignent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (à valeurs réelles).
Afin de résoudre (Σ) (c'est à dire de déterminer x et y), on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a alors que $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

(4) Vérifier que (x, y) est solution de (Σ) si et seulement si $X' = BX$.
(5) On introduit $Z = Q^{-1}X$. On admet que, par linéarité de la dérivation, $Z' = Q^{-1}X'$. Vérifier que
$$X' = BX \Longleftrightarrow Z' = TZ.$$
(6) On note $Z = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Expliciter, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\alpha(t)$ et $\beta(t)$.
(7) Conclure.

5 Probabilités

Exercice 19. Montrer que, si C et D sont deux évènements d'un même espace probabilisé, alors

$$P(C \cup D) \leq P(C) + P(D).$$

En déduire que, si (A_j) est une suite d'évènements du même espace, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \geq P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Exercice 20. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. La valeur renvoyée par X a-t-elle plus de chances d'être paire ou impaire ? Quelle réponse élémentaire aurait-on pu proposer si $p = 1/2$?

Exercice 21. Soit $p \in]0; 1[$. On dispose d'une pièce de monnaie qui amène *Pile* avec la probabilité p, et *Face* avec la probabilité $1 - p$.

On lance la pièce jusqu'à obtenir pour la seconde fois *Pile*. On note X la variable aléatoire égale au nombre de *Face* obtenus au cours des lancers.

(1) (a) Déterminer $P(X=0)$ et $P(X=1)$.
   (b) Plus généralement, déterminer la loi de la variable aléatoire X.
   (c) Vérifier que
$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)=1.$$

(2) Que peut-on dire de l'événement « on n'obtient jamais deux *Pile* au cours d'une infinité de lancers de la pièce » ?

(3) Montrer que la variable X admet une espérance et la calculer.

(4) Compléter le code Python ci-dessous afin qu'il affiche une réalisation de la variable X

```
def simul_X(p):
    n_pile=0
    n_lancers=1
    while .... :
        if  .... :
            ...
            ...
    return ...
```

Exercice 22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Une urne contient une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, trois boules numérotées 3 et ainsi de suite jusqu'à n boules numérotées n. On pioche une boule au hasard dans cette urne et on note X le numéro de la boule piochée.

(1) Combien y a-t-il de boules dans l'urne?
(2) Déterminer la loi de X.
(3) Calculer $E(X)$.
(4) Montrer que $V(X)=\dfrac{(n-1)(n+2)}{18}$.

6 Python

Exercice 23. On dispose du programme ci-dessous. Interpréter la valeur affichée par son exécution.

```
L = ['O','E','N','S']
P = []
for a in L:
    for b in L:
        for c in L:
            for d in L:
                for e in L:
                    for f in L:
                        for g in L:
                            for h in L:
                                for i in L:
                                    for j in L:
                                        P.append([a,b,c,d,e,f,g,h,i,j])
n = 0
```

```python
for e in P:
    if e.count('O') == e.count('E') and e.count('N') == e.count('S'):
        n += 1
print(n/len(P))
```

Exercice 24. Écrire une fonction `symetrie(P,Q)` qui prend en argument deux listes de même longueur `P`=$[p_0, ..., p_n]$ et `Q`=$[q_0, ..., q_n]$ et qui calcule et renvoie la valeur de la somme `s` où

$$\texttt{s} = \sum_{i=0}^{n} p_i q_{n-i}.$$

Khûbes***

Exercice 25. Étudier la convergence en loi de (T_n) où T_n est la v.a qui peut être simulée par la fonction ci-dessous.

```python
import numpy as np; import numpy.random as rd

def simul_T(n) :
    U=[rd.random() for k in range(n)]
    N=np.sum[rd.binomial(1, p) for k in range(n)]
    if N==0 :
       return U[0]
    return(max([U[j] for j in range(N)]))
```

Exercice 26. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Une urne contient initialement $n-1$ boules blanches et une boule noire. On dispose de la fonction Python ci-dessous qui renvoie la simulation de deux variables aléatoires X et Y.

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_XY(n):
    nN=1
    X=0
    k=0
    while nN == 1 :
        k=k+1
        p= nN/n
        boule = rd.binomial(1, p)
        if X == 0 :
            X=boule*k
        if 2*np.floor(k/2) != k :
            nN=nN-boule
            n=n-1
    Y=k
    return [X,Y]
```

(1) Décrire l'expérience et ce à quoi correspondent les variables aléatoires X et Y.
(2) Déterminer la loi de Y.