



Chapitre 0. Révisions

On propose, pour attaquer cette rentrée du meilleur pied, de consacrer les premières séances de travaux dirigés à des révisions - sous forme d'exercices accessibles pour tou.te.s - balayant (sans exhaustivité) le programme du cours de première année et piochant allègrement dans le cahier de vacances. Une partie de ces exercices pourra être reprise en *khôlle*.

1 Calculs & Récurrences

Exercice 1. Démontrer par récurrence les résultats suivants.

(1) Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$.

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2}{2n + 1}.$$

(2) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \sum_{k=1}^n kx^k = x \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

(3) Rappeler la formule du triangle de Pascal.

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}.$$

(4) Soit f la fonction définie sur $[0; 1[$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in [0; 1[, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} (1-x)^{-n-\frac{1}{2}}.$$

où $f^{(n)}$ désigne la dérivée n -ième de f .

(5)

Question type de sujet de concours

Soient A , D et P trois matrices telles que : $A = PDP^{-1}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}.$$

Exercice 2. (Calculs de sommes)

(1) Rappeler les formules de sommes (finies) du cours de première année.

(2) Montrer que

$$\sum_{k=1}^n k(2k^2 - 1) = \frac{n(n+1)(n^2 + n - 1)}{2}.$$

(3) Montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \left(\frac{1}{2^i}\right)^2 = \frac{4^n - 1}{3 \cdot 4^{2n}}.$$

(4) Calculer

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k^2}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right).$$

(5) Rappeler la formule du binôme de Newton.

Calculer

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 3^k.$$

(6)

Question type de sujet de concours

Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

En déduire la valeur, pour tout $x \in \mathbb{R}$, de $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k$.

Exercice 3 (Séries usuelles). Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme.

(1) $\sum_{n \geq 0} \frac{n(n-1)}{6^n}$

(2) $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{(n+1)!}$

(3) $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n}{n!}$

Exercice 4 (Sommes doubles). Calculer les sommes suivantes

(i) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i-j),$

(ii) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j),$

(iii) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |i-j|,$

(iv) $\sum_{0 \leq i < j \leq n} \binom{j}{i} 2^i$

(v) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2,$

(vi) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{1+j},$

(vii) $\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \ln(i^k),$

(viii) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n (-1)^{i+j}.$

(et en admettant la convergence)

(ix) $\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i^j}{i!j!}$

2 Algèbre Linéaire

Exercice 5. Montrer que la famille de vecteurs ci-dessous forme une base de \mathbb{R}^3 .

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Exercice 6. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Résoudre les équations $AX = 0$, $AX = X$ et $AX = 3X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On présentera les solutions sous forme d'un $\text{Vect}()$.

Exercice 7. Déterminer, à l'aide de la formule du binôme les puissances A^n où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8. On considère la matrice A ci-dessous

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (1) À l'aide du pivot de Gauss, vérifier que A est inversible et calculer son inverse.
- (2) Calculer $A^2 - 4A + 3I$. En déduire une nouvelle preuve que A est inversible et donner une expression de A^{-1} en fonction de A et de I .

3 Analyse

Exercice 9.

Question type de sujet de concours

Montrer que, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.

Exercice 10. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x \ln(x), & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- (1) Montrer que f est continue sur \mathbb{R}_+ .
- (2) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* . Exprimer la dérivée $f'(x)$ pour $x > 0$.
- (3) La fonction est-elle dérivable en 0? Quelles en sont les conséquences graphiques?

Exercice 11. Que vaut

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ?$$

Exercice 12. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' - y' = 0$ de deux manières différentes:

- (1) En appliquant le théorème du cours sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2.
- (2) En faisant un changement de fonction inconnue pour se ramener à une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Exercice 13. Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

(1) $y'' - 3y' + 2y = 0$

(2) $y'' - 4y' + 4y = 0$

(3) $y'' - 2y = 0$

Exercice 14 (Suite et série). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

(1) Compléter la fonction Python ci-dessous de sorte qu'elle renvoie u_n

```
def suite_u(n):
    u = ...
    .....
    u = ...
    return ...
```

(2) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

(3) Étudier le sens de variation et la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi que sa limite.

(4) On pose pour tout entier n , $v_n = \ln(u_n)$.

Calculer v_{n+1} en fonction de v_n puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n u_k = v_0 - v_{n+1}$

(5) En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

Exercice 15 (Intégrales). Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx$$

(1) (a) Calculer la dérivée de la fonction $g : x \mapsto (x+1) \ln(x+1) - x$.

(b) Calculer I_0 .

(2) (a) Montrer que $I_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Établir que la suite (I_n) est décroissante.

(c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.

(3) (a) Justifier l'égalité : $x^n \ln(1+x) \leq x^n$ pour tout $x \in [0, 1]$.

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

(c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

(4) (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

(b) Montrer que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+2}$$

et en déduire un encadrement de I_n .

(c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$

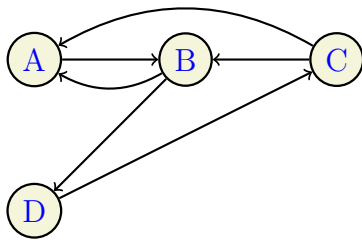
4 Graphes

Exercice 16.

(1) Écrire une fonction Python d'en-tête `def matrix_to_list(M):` qui prend en argument une matrice carrée M étant la matrice d'adjacence d'un graphe \mathcal{G} et qui renvoie la liste d'adjacence du même graphe.

(2) Écrire une fonction Python d'en-tête `def nb_sommets_isoles(L):` qui prend en argument une liste L d'adjacence d'un graphe \mathcal{G} et qui renvoie le nombre de sommets isolés du graphe.

Exercice 17. On considère le graphe orienté \mathcal{G} ci-dessous.



- (1) Déterminer la matrice M d'adjacence du graphe.
- (2) Calculer M^2 et M^3 .
- (3) Montrer que \mathcal{G} est connexe.

Exercice 18. (Extrait de **EML 2023**)

On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^2 représenté dans la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{R}^2 par la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (1) On note $v_1 = (2, -1)$ et $v_2 = (-1, 0)$. Montrer que (v_1, v_2) forme une base de \mathbb{R}^2 .
- (2) Déterminer la matrice T de f dans cette base.
- (3) On note Q la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de v_1 et v_2 dans la base canonique. Justifier que Q est inversible. Déterminer Q^{-1} et vérifier que $B = QTQ^{-1}$.

On considère le *système différentiel* (Σ) suivant

$$(\Sigma) : \begin{cases} x' &= -x - 4y \\ y' &= x + 3y \end{cases}$$

où x et y désignent des fonctions dérivables sur \mathbb{R} (à valeurs réelles).

Afin de résoudre (Σ) (c'est à dire de déterminer x et y), on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a alors que $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

- (4) Vérifier que (x, y) est solution de (Σ) si et seulement si $X' = BX$.
- (5) On introduit $Z = Q^{-1}X$. On admet que, par linéarité de la dérivation, $Z' = Q^{-1}X'$. Vérifier que

$$X' = BX \iff Z' = TZ.$$

- (6) On note $Z = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Expliciter, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\alpha(t)$ et $\beta(t)$.
- (7) Conclure.

5 Probabilités

Exercice 19. Montrer que, si C et D sont deux évènements d'un même espace probabilisé, alors

$$P(C \cup D) \leq P(C) + P(D).$$

En déduire que, si (A_j) est une suite d'évènements du même espace, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) \geq P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right).$$

Exercice 20. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p . La valeur renvoyée par X a-t-elle plus de chances d'être paire ou impaire ? Quelle réponse élémentaire aurait-on pu proposer si $p = 1/2$?

Exercice 21. Soit $p \in]0; 1[$. On dispose d'une pièce de monnaie qui amène *Pile* avec la probabilité p , et *Face* avec la probabilité $1 - p$.


```

for e in P:
    if e.count('O') == e.count('E') and e.count('N') == e.count('S'):
        n += 1
print(n/len(P))

```

Exercice 24. Écrire une fonction `symetrie(P,Q)` qui prend en argument deux listes de même longueur $P=[p_0, \dots, p_n]$ et $Q=[q_0, \dots, q_n]$ et qui calcule et renvoie la valeur de la somme s où

$$s = \sum_{i=0}^n p_i q_{n-i}.$$

Khûbes***

Exercice 25. Étudier la convergence en loi de (T_n) où T_n est la v.a qui peut être simulée par la fonction ci-dessous.

```

import numpy as np; import numpy.random as rd

def simul_T(n) :
    U=[rd.random() for k in range(n)]
    N=np.sum[rd.binomial(1, p) for k in range(n)]
    if N==0 :
        return U[0]
    return(max([U[j] for j in range(N)]))

```

Exercice 26. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Une urne contient initialement $n - 1$ boules blanches et une boule noire. On dispose de la fonction Python ci-dessous qui renvoie la simulation de deux variables aléatoires X et Y .

```

import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_XY(n):
    nN=1
    X=0
    k=0
    while nN == 1 :
        k=k+1
        p= nN/n
        boule = rd.binomial(1, p)
        if X == 0 :
            X=boule*k
        if 2*np.floor(k/2) != k :
            nN=nN-boule
            n=n-1
    Y=k
    return [X,Y]

```

- (1) Décrire l'expérience et ce à quoi correspondent les variables aléatoires X et Y .
- (2) Déterminer la loi de Y .