Math ECG 2. 2023-2024

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Chapitre 10. Variables aléatoires (réelles) à densité

Avant-propos

Dans tout ce chapitre, on considère des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qu'on ne cherche pas à expliciter.

Résultat du cours de première année

Fonction de répartition.

Si X est une variable aléatoire, la fonction de répartition de X est la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P([X \leq x]).$$

☞ La fonction de répartition est toujours continue par morceaux mais pas (forcément) continue partout sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1. Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.
Même question pour $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Exercice 2. Montrer que, si X est une variable aléatoire avec $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X = n) = F_X(n) - F_X(n-1).$$

☞ Lorsqu'on considère une certaine fonction, on peut se demander si on peut lui associer une variable aléatoire, c'est à dire si c'est la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire X. C'est l'objet de la propriété ci-dessous.

Propriété

Caractérisation d'un fonction de répartition.

Une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X si et seulement si

(1) F est croissante sur $\mathbb{R}$;
(2) F est continue à droite en tout point;
(3) F admet des limites en $-\infty$ et $+\infty$ et vérifie $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

1 Variables aléatoires à densité

1.1 Généralités

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X est **une variable aléatoire à densité** si sa fonction de répartition F_X vérifie:

(1) F_X est continue sur $\mathbb{R}$;
(2) F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points.

Définition

Soient X une variable aléatoire réelle et F_X sa fonction de répartition. Alors, toute fonction f positive sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = F'_X(x)$ (là où F_X est $\mathcal{C}^1$) est appelée **une densité** de X.

☞ La variable X admet une **infinité** de densités qui ne diffèrent toutes que d'un nombre fini de points (qui sont éventuellement ceux où F_X n'est pas dérivable).

À retenir!

Connaissant la fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire à densité X, on obtient donc une densité de X en dérivant F_X en tout point où elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et en donnant une valeur arbitraire ailleurs.

Exercice 3. Soient $a > 0$ et Z une v.a dont la fonction de répartition est

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax^2}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(1) Vérifier que Z est une variable à densité puis déterminer une densité f de Z.
(2) On considère la variable $Y = Z^2$ et on note G sa fonction de répartition. Exprimer G en fonction de F puis vérifier que Y est une variable aléatoire à densité.

À connaître sur le bout des doigts

Caractérisation des fonctions de densité.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

(i) f est positive sur $\mathbb{R}$;
(ii) f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points;
(iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$.

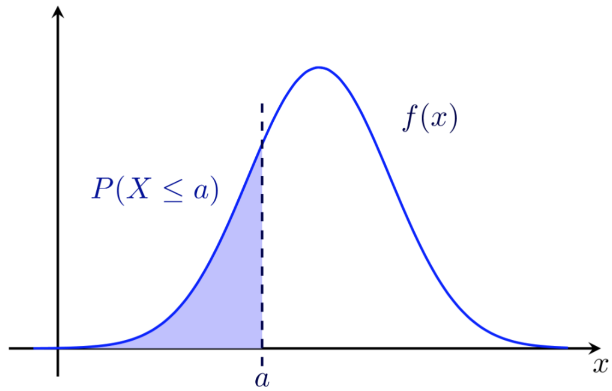
Alors il existe une variable aléatoire X telle que f soit une densité de la variable X. On dit alors que f est une **densité de probabilité**.

Si f est une densité d'une v.a. X, alors la fonction de répartition F_X de X est donnée par

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

Illustration

☞ Notant f une densité de la variable X, la fonction de la répartition F_X évaluée en a correspond à la probabilité $P(X \leq a)$ et représente l'aire du domaine sous la courbe de f jusqu'à a.



Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } |x| < 1 \\ \frac{1}{2x^2}, & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

(1) (a) Montrer que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
(b) Déterminer la fonction de répartition de X.

(2) Mêmes question avec

$$g(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}}, & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(3) Soient $\lambda > 0$ et

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que f_λ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X. *On rappelle qu'on dit que X suit une loi exponentielle de paramètre λ, $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.*
(b) Expliciter la fonction de répartition de X.

1.2 Calcul de probabilités

Propriété

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f_X. On note F_X sa fonction de répartition.

(1) Pour tout réel x, on a

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t = F_X(x) \qquad \text{et} \qquad P(X \geq x) = \int_{x}^{+\infty} f_X(t)\mathrm{d}t = 1 - F_X(x);$$

(2) Pour tout réels a et b tels que $a \leq b$, on a

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f_X(t)\mathrm{d}t = F_X(b) - F_X(a);$$

(3) Pour tout réel a, on a

$$P(X = a) = 0.$$

À retenir!

- Les probabilités $P(X \leq x)$, $P(X \geq x)$ et $P(a \leq X \leq b)$ s'interprètent comme des aires sous la courbe représentative de la densité f.

- Les inégalités strictes ou larges ne changent pas les probabilités:
$$P(X < x) = P(X \leq x)$$
et
$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P(a \leq X < b) \\ &= P(a < X \leq b) \\ &= P(a \leq X \leq b). \end{aligned}$$
- Contrairement aux variables discrètes, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(X = x) = 0.$$
Ainsi la loi de X n'est pas donnée par les probabilités $P(X = x)$ mais plutôt par la fonction de répartition ou de la densité. **Cette différence est fondamentale !**

Exercice 5. Soient Z la v.a. définie dans l'Exercice 3. Calculer
$$P(Z \leq 1/2), \qquad P(Z \in [-1; 1/2[), \qquad P(Z \geq 1/2), \qquad P_{Z \geq 1/2}(Z < 3/4).$$

1.3 Transformation d'une variable aléatoire

Dans beaucoup de situations, on est amené à considérer une variable aléatoire Y définie à partir d'une variable aléatoire X que l'on connait ou que l'on vient d'étudier, par exemple sous la forme $Y = g(X)$ où g est une certaine fonction définie sur $X(\Omega)$.

Il s'agit alors de déterminer la fonction de répartition de Y à partir de celle de X. Attention, c'est seulement à partir du moment où on connait la fonction de répartition de Y qu'on peut éventuellement conclure que Y est une variable aléatoire à densité.

À retenir!

Méthode: transformée d'une v.a à densité.

Supposons X à densité avec F_X connue et $Y = g(X)$ avec g une bijection de $X(\Omega)$ sur un certain ensemble $J =]a, b[$ (avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$).

(i) On commence par observer que pour $t \leq a$, $F_Y(t) = 0$ et pour $t \geq b$, $F_Y(t) = 1$.

(ii) Pour $t \in]a, b[$, on a, si g strictement croissante,
$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(g(X) \leq t) = P(X \leq g^{-1}(t)) = F_X(g^{-1}(t)).$$
(iii) Pour $t \in]a, b[$, on a, si g strictement décroissante,
$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(g(X) \leq t) = P(X \geq g^{-1}(t)) = 1 - F_X(g^{-1}(t)).$$
(iv) Une fois F_Y obtenue, on vérifie que F_Y continue partout sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points), Y est alors une v.a à densité. On dérive F_Y (là où on peut), pour obtenir une densité de Y.

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si } x \in [-1;1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

(1) Montrer que f est une densité de probabilité, d'une variable aléatoire que l'on notera X.
(2) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
(3) Déterminer la fonction de répartition, puis une densité de la variable aléatoire $Y = 1 - 2X$.

☞ Ce type d'exercice intervient souvent, notamment sous la forme ci-dessous (on ira lire quelques paragraphes plus bas pour les définitions des lois usuelles impliquées dans l'exercice qui trouve quand même sa place ici).

Question type de sujet de concours

Soient $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$ et $\lambda > 0$. On pose $V = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$.

(1) Déterminer la loi de V. Préciser son espérance et sa variance.
(2) Déterminer une densité de $Z = \frac{1}{V}$.

2 Moments d'une v.a à densité

2.1 Espérance d'une variable aléatoire à densité

Définition

Soit X une variable aléatoire de densité f. On dit que X admet une espérance si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ est **absolument convergente**. Auquel cas,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 7. Montrer que la variable aléatoire X définie à l'Exercice 3 admet une espérance, puis la calculer.

Exercice 8. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2x}}, & \text{si } x \geqslant 2 \\ 0, & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

(1) Montrer la convergence et calculer l'intégrale

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{2x}}\mathrm{d}x.$$

(2) Montrer que f est une densité de probabilité d'une v.a. que l'on notera X.
(3) Donner la fonction de répartition F_X de X.
(4) X admet-elle une espérance?

Propriété

Linéarité de l'espérance.

Soient X et Y deux variables aléatoires à densité admettant une espérance.

- Pour tous réels a et b, on a : $E(aX+b) = aE(X)+b$.
- Si $X+Y$ est une variable à densité alors elle admet une espérance et on a
$$E(X+Y) = E(X)+E(Y).$$
- **Généralisation.** Si $X_1, ..., X_n$ sont des variables aléatoires admettant toutes une espérance, alors $X_1 + ... + X_n$ admet une espérance et
$$E(X_1+...+X_n) = E(X_1)+...+E(X_n).$$

Propriété

Croissance de l'espérance.

Soient X et Y deux variables aléatoires à densité admettant une espérance. Si, presque sûrement, $X \leq Y$ (c'est à dire si $P(X \leq Y) = 1$), alors $E(X) \leq E(Y)$.

2.2 Théorème de transfert et moment d'ordre r

Comme pour les variables discrètes, ce théorème est crucial et puissant. Ici, on l'aime d'amour.

Propriété

Théorème de transfert.

Soient X est une variable aléatoire de densité f et φ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f_X(t) \mathrm{d}t$ est **absolument convergente**, alors la variable aléatoire $\varphi(X)$ admet une espérance et on a
$$E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f_X(t) \mathrm{d}t.$$

Exercice 9. (Extrait de **EML 2020**).

Soit X une variable aléatoire ayant pour densité $f(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0, & \text{si } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \end{array} \right.$, où $\lambda > 0$.

La variable $Y = e^X$ admet-elle une d'espérance ?

Exercice 10. (Extrait de **ESSEC II 2019**).

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda |x|}$, avec $\lambda > 0$.

(1) Montrer que f est une densité de probabilité.
(2) Montrer que $Z = -\log_2(f(X))$ admet une espérance et la calculer, où $\log_2(t) = \frac{\ln(t)}{\ln(2)}$

Définition

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente alors on dit que X **admet un moment d'ordre** r, notée $m_r(X)$ et on a

$$m_r(X) = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\mathrm{d}t.$$

2.3 Variance et écart-type

Définition

Si la variable aléatoire X admet une espérance et si la variable $(X - E(X))^2$ admet une espérance, on appelle **variance de** X le réel

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right).$$

Propriété

Formule de König-Huyguens.

Une variable à densité X admet une variance si et seulement X admet un moment d'ordre 2 et dans ce cas

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Exercice 11. Soit X une variable aléatoire de densité f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 2/x^3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

Définition

Si X admet une variance alors $V(X) \geq 0$. On appelle alors **écart-type** le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Propriété

Soit X une variable à densité admettant une variance.
Alors pour tout réels a et b, $aX + b$ admet une variance et on a

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Définition

- Si X est une variable à densité telle que $E(X) = 0$ on dit que X **est une variable centrée**.
- Si X est une variable à densité telle que $\sigma(X) = 1$, on dit que X **est une variable réduite**.
- Si X admet une espérance et un écart-type non nul, on appelle **variable centrée-réduite associée à** X la variable

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}.$$

3 Lois à densité usuelles

Les lois usuelles (comme les autres variables aléatoires à densité) sont caractérisées par une densité ou leur fonction de répartition. Il est donc indispensable d'en connaître les formules sur le bout des doigts pour pouvoir les reconnaître ou les manipuler.

3.1 Loi uniforme continue (sur un segment)

Définition

Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;\,b]$, notée $\mathcal{U}([a\,;\,b])$, si une densité de X est la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } x \in [a\,;\,b] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction de répartition d'une variable qui suit la loi $\mathcal{U}([a\,;\,b])$ est la fonction F définie par :

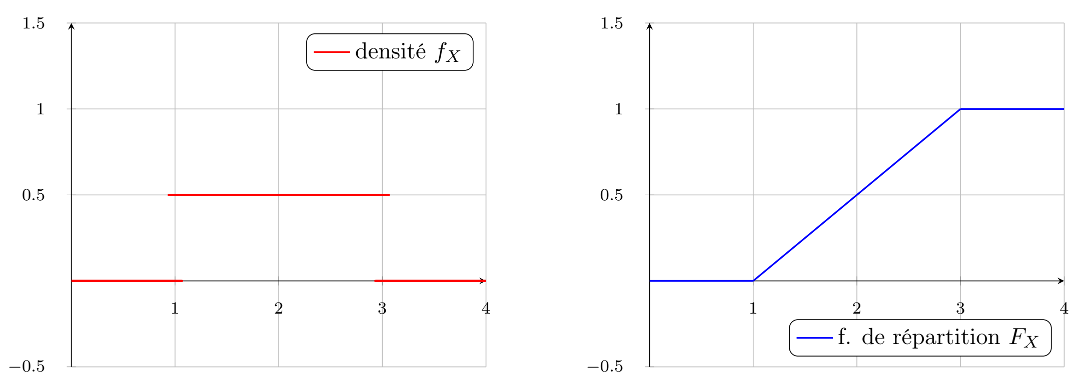
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{si } x \in [a\,;\,b] \\ 1, & \text{si } x > b. \end{cases}$$

☠ On ne confondra pas la loi uniforme continue et la loi uniforme discrète!

Illustration

☞ On représente ci-dessous une densité f_X et la fonction de répartition F_X de la loi uniforme

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([1;3]).$$



Exercice 12. À partir de 7 heures du matin, les bus passent toutes les quinze minutes à un arrêt précis. Un usager se présente à cet arrêt entre 7h et 7h30. On fait l'hypothèse que l'heure exacte de son arrivée, représentée par le nombre de minutes après 7h, est une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0; 30]$. Quelle est la probabilité que l'usager attende moins de cinq minutes le prochain bus?

Remarque

Il découle de la définition que si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0; 1])$ et si $p \in [0; 1]$ alors

$$P(X \leq p) = p.$$

En Python, la commande `random( )` (ou `rand( )`) de la bibliothèque `numpy.random` permet de simuler la loi uniforme sur $[0, 1]$ donc la variable X. Au vu de ce qui précède, c'est pour cela qu'on identifie en Python, un évènement quelconque de probabilité p à l'évènement $[X \leq p]$.

Propriété

Espérance et variance pour la loi uniforme.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a\,;\,b])$, alors X admet une espérance et une variance et

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Propriété

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1]) \iff Y = (b-a)X + a \hookrightarrow \mathcal{U}([a;b]).$$

3.2 Loi exponentielle

Définition

Une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle** de paramètre λ (où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$), notée $\mathcal{E}(\lambda)$, si une densité de X est la fonction f définie par

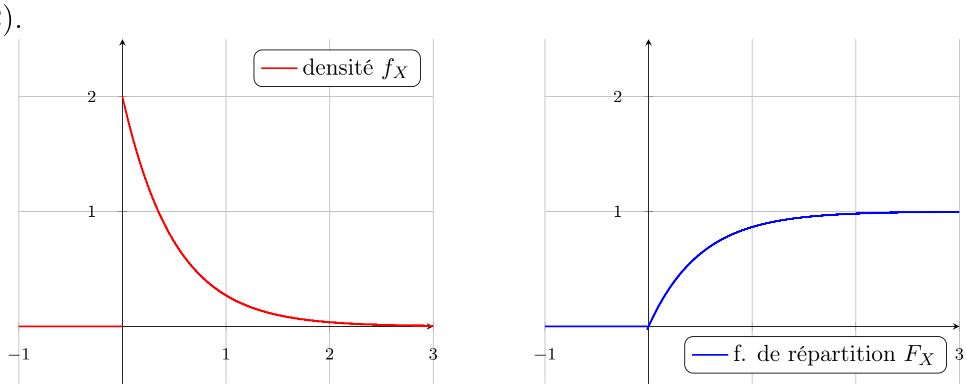
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{si } \ x \geq 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction de répartition d'une variable qui suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ est la fonction F définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{si } \ x \geq 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Illustration

☞ On représente ci-dessous une densité f_X ainsi que la fonction de répartition F_X d'une loi exponentielle $X \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$.



Propriété

Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors X admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Exercice 13. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ (avec $\lambda > 0$). Montrer que $\lambda X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

Propriété

Loi exponentielle : une caractérisation.

Les variables aléatoires suivant une loi exponentielle (et la variable quasi-certaine nulle) sont les seules variables aléatoires à densité positives **sans mémoire**, c'est à dire vérifiant que, pour tout couple (t,h) de réels positifs,

$$P([X > t+h]) = P([X > t])P([X > h])$$

avec Python

On peut simuler une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre `lambda` à partir de la loi uniforme par *inversion* en tapant :

```
-1/lambda*np.log(1-rd.random( ))
```

(c'est un exercice classique à savoir refaire), ou bien à l'aide de la commande

```
rd.exponential(1/lambda)
```

.

3.3 Les lois normales

Grâce aux critères de convergence pour les intégrales rappelés au chapitre précédent, on peut montrer la convergence de l'intégrale suivante dont on ne peux par contre, avec le programme d'ECG, qu'admettre la valeur:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}.$$

Les lois normales (et notamment la loi normale centrée-réduite) jouent un rôle crucial en probabilités et statistiques. Nous en verrons tout l'intérêt avec le **théorème central limite**, énoncé au Chapitre 13 et objectif ultime de ce cours de mathématiques appliquées. On l'aura compris, il faut se familiariser avec la loi normale.

Loi normale centrée réduite

Définition

Une variable aléatoire X suit la **loi normale centrée réduite**, notée $\mathcal{N}(0,1)$, si une densité de X est la fonction φ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

La fonction de répartition d'une telle variable aléatoire est la fonction, notée Φ, définie par

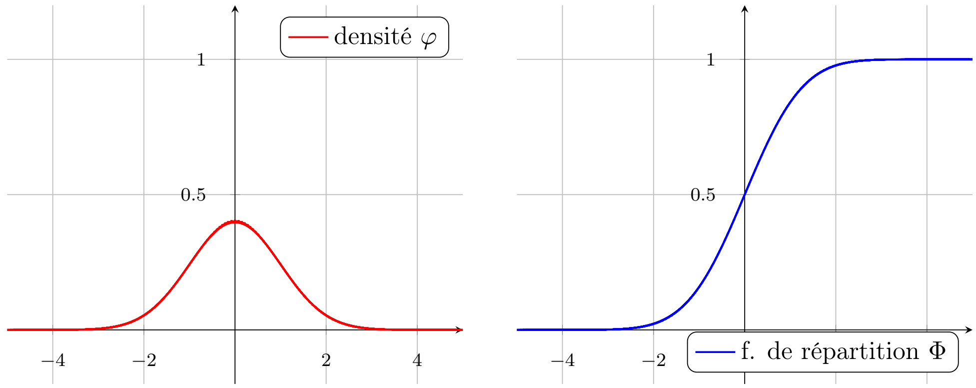
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t.$$

☞ On ne peut pas exprimer la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite à l'aide des fonctions usuelles.

☞ Les calculs explicites d'images par Φ se font alors avec la table de valeurs (voir Appendice) ou avec un ordinateur. Cependant, on peut déduire des propriétés de la gaussienne tout un tas de formule à savoir retrouver en un clin d'oeil.

Illustration

☞ On représente ci-dessous la densité φ ainsi que la fonction de répartition Φ d'une variable aléatoire de loi normale centrée réduite $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.



Propriété

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Par parité de notre densité, on déduit les résultats suivants, illustrés par les figures ci-après.

(i) La médiane et la moyenne coïncident :

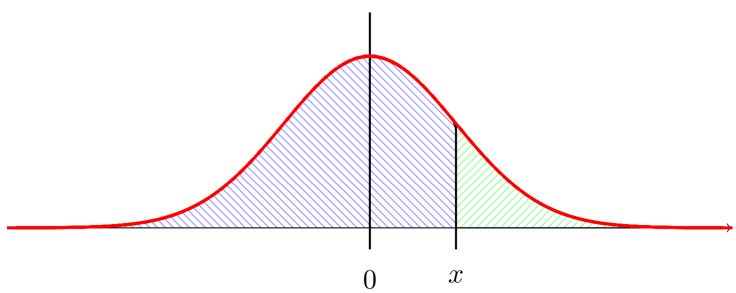
$$\Phi(0) = P(X \leq 0) = \frac{1}{2}.$$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}$,

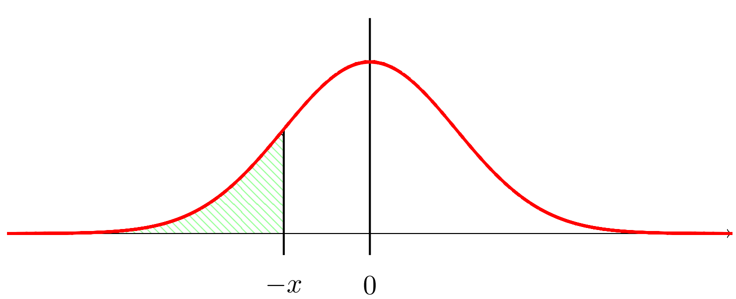
$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$P(|X| \leq x) = 2\Phi(x) - 1.$$



$= \Phi(x)$ et $= 1 - \Phi(x)$



$= \Phi(-x)$

Exercice 14. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Déterminer, à l'aide de la table de la loi normale centrée réduite fournie en appendice, $x > 0$ tel que $P(-x \leq X \leq x) \simeq 0,95$.

Propriété

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors X admet une espérance et une variance et on a

$$E(X) = 0 \qquad \text{et} \qquad V(X) = 1.$$

3.4 Loi normale ou loi de Laplace-Gauss

Définition

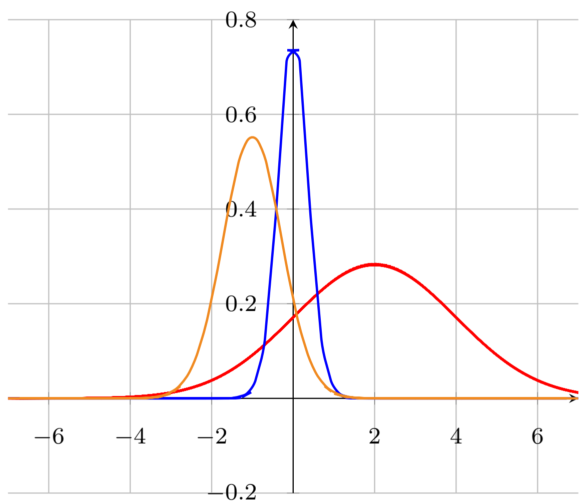
Une variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres (μ, σ^2), notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (où $\sigma > 0$), si une densité de X est la fonction $\varphi_{\mu,\sigma}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Illustration

☞ Évolution des allures des gaussiennes selon les paramètres.

$\varphi_{-1,1/2}$ $\varphi_{0,1/4}$ $\varphi_{2,4}$.



Propriété

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors X admet une espérance et une variance et on a

$$E(X) = \mu \qquad \text{et} \qquad V(X) = \sigma^2 \quad \text{donc} \;\; \sigma(X) = \sigma.$$

À connaître sur le bout des doigts

☞ Toute variable aléatoire suivant une loi normale peut se ramener par une transformation affine à la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff X^* = \frac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Exercice 15. Pour cette exercice, on utilisera la table de la loi normale centrée réduite, fournie en appendice.

(1) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(8,4)$. Donner des valeurs approchées pour
$$P(X<7,5),\ P(X>8,5),\ P(6,5<X<10),\ P(X>6|X>5).$$
(2) Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale. Déterminer l'espérance et la variance de X sachant que
$$P(X<-1)\simeq 0,05 \quad \text{et} \quad P(X>3)\simeq 0,12.$$

Exercice 16. (D'après **ECRICOME 2009**)

Sur une ligne de bus, une enquête a permis de révéler que le retard (ou l'avance) sur l'horaire officiel du bus à une station donnée, peut être représenté(e) par une variable aléatoire réelle, notée X, exprimée en minutes, qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$.

On admet de plus que la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes est égale à $p = 0.8413$ et que l'espérance de X est de 5 minutes.

(1) Déterminer la valeur de σ en utilisant la table jointe en annexe.
(2) Quelle est la probabilité que le retard soit supérieur à 9 minutes ?
(3) Sachant que le retard est supérieur à 3 minutes, quelle est la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes ? (On exprimera cette probabilité à l'aide de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, puis on utilisera la table jointe en appendice).

Propriété

Stabilité des lois normales.

(i) Toute transformation affine de X est encore une loi normale. Plus précisément, si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$, alors
$$Y = aX+b \hookrightarrow \mathcal{N}(am+b, a^2\sigma^2).$$
(ii) La somme de deux lois normales indépendantes est encore une loi normale. Plus précisément, si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1,\sigma_1^2)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2,\sigma_2^2)$ sont **indépendantes**, alors
$$Z = X+Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2).$$
(iii) Plus généralement, si $(X_1, X_2, ..., X_n)$ suite de v.a.i.i.d de loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$, alors
$$S_n = X_1+X_2+...+X_n \hookrightarrow \mathcal{N}(nm, n\sigma^2).$$

avec Python

On peut simuler une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres `mu` et `sigma`^{2} à l'aide de la commande `rd.normal(mu, sigma)`.

4 Compléments: indépendance de variables aléatoires à densité.

Certain.e.s résultats ou définitions déjà introduit.e.s dans le Chapitre 6 sur les couples de variables discrètes peuvent également avoir un sens dans le cadre de variables aléatoires continues.

Définition

On dit que deux variables aléatoires à densité X et Y sont **indépendantes** si et seulement si, pour tous intervalles I et J

$$P([X \in I] \cap [Y \in J]) = P([X \in I]) \times P([Y \in J]).$$

On dit qu'une famille $(X_1, ..., X_n)$ de variables aléatoires à densité est **mutuellement indépendantes** si, pour tous intervalles $I_1, ..., I_n$ et toute bijection $\sigma : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$, on a

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad P\left(\bigcap_{j=1}^{k} [X_{\sigma(j)} \in I_j]\right) = \prod_{j=1}^{k} P(X_{\sigma(j)} \in I_j).$$

Propriété

Lemme des coalitions.

- Si X et Y sont deux variables aléatoires à densité indépendante et si f et g sont deux fonctions numériques définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.
- Soient $X_1, ..., X_n$ mutuellement indépendantes et soit $p \in [\![2, n-1]\!]$. Alors toute variable aléatoire fonction des variables $X_1, \cdots, X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des variables $X_{p+1}, \cdots, X_n$.

Propriété

Variance et indépendance.

- Si X et Y sont deux variables aléatoires à densité indépendantes admettant une variance, alors $X + Y$ aussi, et on a :
$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$
- Si les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, et admettent une variance, alors la variable $X_1 + \cdots + X_n$ admet une variance et on a :
$$V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n).$$

5 Sélection d'exercices - Travaux dirigés

Exercice 17. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-|x|}, & \text{si } -\ln(2) \leq x \leq \ln(2) \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

(1) Etudier les variations de f et tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé.
(2) Montrer que f est une densité de probabilité.
(3) Soit X une variable aléatoire réelle admettant f comme densité.
  (a) Déterminer la fonction de répartition F de X.
  (b) Montrer que X admet une espérance et calculer l'espérance de X.
(4) On pose $Y = |X|$.
Déterminer la fonction de répartition G de Y. Montrer que Y est une variable à densité et déterminer une densité g de Y.

Exercice 18.

(1) Montrer la convergence et déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2} \mathrm{d}x$.

(2) On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{2\,(1+|x|)^2}.$$

  (a) Montrer que f est paire.
  (b) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ admettant f comme densité. On note F la fonction de répartition de X.

(3) On pose $Y = \ln(1+|X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.
  (a) Déterminer $Y(\Omega)$
  (b) Exprimer la fonction de répartition G de Y à l'aide de F.
  (c) En déduire que Y admet pour densité la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2e^x f(e^x - 1), & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

  (d) Montrer enfin que Y suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.

Exercice 19. Un joueur lance trois fléchettes dans une cible circulaire de centre O et de rayon 1. Pour $1 \leq i \leq 3$, on note X_i la variable aléatoire égale à la distance du point d'impact de centre O de la $i^{\text{ème}}$ fléchette.

Ces trois variables aléatoires X_1, X_2, X_3 de même loi, indépendantes, sont des variables à densité dont une densité f est définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } \ x \in [0;1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Le joueur gagne si la distance la plus proche du centre O se trouve à une distance inférieure à $\dfrac{1}{5}$ de ce centre.

Enfin, on note M la variable aléatoire représentant la plus petite des trois distances X_1, X_2, X_3.

(1) Vérifier que f est une densité de probabilité et déterminer la fonction de répartition F de X_i.
(2) Déterminer l'espérance de X_i.

(3) Exprimer l'événement $[M > t]$ à l'aide des événements $[X_1 > t], [X_2 > t], [X_3 > t]$ pour tout réel t.
(4) Déterminer la fonction de répartition F_M de M et montrer que M est une variable à densité et en donner une densité notée f_M.
(5) Quelle est la probabilité de l'événement $G =$"le joueur gagne la partie"?

Exercice 20. Trois personnes, notées A, B et C entrent simultanément dans une agence bancaire disposant de deux guichets. Les clients A et B occupent simultanément à l?instant 0 les deux guichets tandis que C attend que l'un des deux guichets se libère pour se faire servir.

On suppose que les durées de passage au guichet des trois personnes A, B et C sont mesurées en heures et on suppose que ce sont des variables aléatoires indépendantes, notées respectivement X, Y et Z et suivant toutes la loi uniforme sur $[0;1[$.

On suppose également que la durée du changement de personne à un guichet est négligeable. On pose $U = \min(X, Y)$ et on admet que U est une variable aléatoire. On note T le temps total passé par C dans l'agence bancaire.

(1) Montrer que la fonction de répartition F_U de U est définie par

$$F_U(x) = \left\{ \begin{array}{rl} 0, & \text{si } x < 0 \\ 2x - x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{si } x > 1 \end{array} \right.$$

(2) En déduire que U est une variable aléatoire à densité et donner une densité de U.
(3) Déterminer l'espérance de U.
(4) Exprimer T en fonction de certaines variables précédentes puis en déduire $E(T)$.

Exercice 21. (D'après **ECRICOME 2016**)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 0, \\ xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{array} \right.$

(1) **Étude de la fonction** g.
  (a) Montrer que g est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ?
  (b) Donner le tableau de variations de g sur $[0, +\infty[$ (on précisera la limite de g en $+\infty$).
  (c) Étudier la convexité de g sur $]0, +\infty[$.
  (d) Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

(2) **Étude de variables aléatoires**.
  (a) Montrer que la fonction g est une densité de probabilité.

  On note Y une variable aléatoire dont une densité est la fonction g, et dont la fonction de répartition est notée G.

  (a) Sans calcul, justifier que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
  (b) Montrer que pour tout réel x,

$$G(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x}(1 + x) & \text{si } x \geqslant 0. \end{array} \right.$$

  (c) Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance, que l'on calculera.

(3) On considère la variable aléatoire $Z = e^Y$.
  (a) Déterminer la fonction de répartition notée H de la variable aléatoire Z.
  (b) En déduire que Z est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Z.
  (c) La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?

Exercice 22. On considère la fonction f définie pour tout x réel par

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x|, & \text{si } x \in [-1;1] \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [-1;1] \end{cases}$$

(1) Représenter l'allure de la courbe de f.

(2) (a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. En déduire sans calcul $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.
(b) Vérifier que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

On considère dorénavant une variable aléatoire X admettant f comme densité.

(2) (a) Établir l'existence de l'espérance de X, puis donner sa valeur.
(b) Établir l'existence de la variance de X, puis donner sa valeur.

(3) Montrer que la fonction de répartition de X, notée F_X , est définie par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{1}{2} + x + \dfrac{x^2}{2}, & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2}, & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité. On note F_Y sa fonction de répartition.

(4) (a) Donner la valeur de $F_Y(x)$ lorsque x est strictement négatif.
(b) Pour tout réel x positif ou nul, exprimer $F_Y(x)$ à l'aide de la fonction F_X.
(c) En déduire qu'une densité de Y est la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} 2(1-x), & \text{si } x \in [0;1] \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [0;1] \end{cases}$$

(d) Montrer que Y possède une espérance et une variance et les déterminer.

(5) On considère deux variables aléatoires U et V, elles aussi définies sur $(\Omega; \mathcal{A}; P)$, indépendantes et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0;1]$.
On pose $I = \min(U, V)$. On **admet** que I est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur $(\Omega; \mathcal{A}; P)$ et on note F_I la fonction de répartition de I.

(a) Expliciter $F_I(x)$ pour tout réel x.
(b) En déduire que I suit la même loi que Y.
(c) Compléter la déclaration de fonction Python suivante pour qu'elle simule la loi de Y .

```
def simul_Y( ) :
    U=...........
    V=...........
    if ............. :
        return ....
    else :
        return ....
```

Exercice 23. (D'après **EDHEC 2003**)
Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

(1) Montrer que la fonction f_n définie ci-dessous est une densité de probabilité

$$f_n(x) = \begin{cases} nx^{n-1}, & \text{si } x \in [0;1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

(2) On considère une variable aléatoire X_n réelle dont une densité de probabilité est f_n. On dit alors que X_n suit une *loi monôme* d'ordre n.

   (a) Reconnaître la loi de X_1.
   (b) Dans le cas où n est supérieur ou égal à 2, déterminer la fonction de répartition F_n de X_n, ainsi que son espérance $E(X_n)$ et sa variance $V(X_n)$.

(3) On considère deux variables aléatoires U_n et V_n définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la loi monôme d'ordre n $(n \geqslant 2)$ et indépendantes, c'est-à-dire qu'elles vérifient en particulier l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(U_n \leqslant x \cap V_n \leqslant x) = P(U_n \leqslant x)\, P(V_n \leqslant x).$$

On pose $M_n = \max(U_n, V_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   (a) Montrer que M_n est une variable à densité. Vérifier que M_n suit une loi monôme dont on donnera l'ordre, puis déterminer sans calcul $E(M_n)$.
   (b) On pose $T_n = \min(U_n, V_n)$. Exprimer $M_n + T_n$ en fonction de U_n et V_n, puis en déduire, sans calcul d'intégrale, la valeur de $E(T_n)$.

Exercice 24. Soient m et σ deux réels. On dit que X suit une loi *log-normale* de paramètres (m, σ^2) si $Y = \ln(X)$ suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On supposera dans la suite $m = 0$ et $\sigma = 1$.

(1) Exprimer la fonction de répartition de X à l'aide de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite.
(2) Calculer sa densité.
(3) Montrer que $E(X) = \sqrt{e}$.

Exercice 25. (Partie entière d'une loi exponentielle - D'après **EDHEC 2002**)

Pour tout nombre réel x, on note $[x]$ la partie entière de x, c'est-à-dire l'unique nombre entier vérifiant : $[x] \leqslant x < [x] + 1$.
Soit X la variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ $(\lambda > 0)$.
On pose $Y = [X]$, Y est donc la partie entière de X et on a : $\forall k \in \mathbb{Z} \quad (Y = k) = (k \leqslant X < k + 1)$

(1) (a) Montrer que Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.
   (b) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, calculer $P(Y = k - 1)$.
   (c) En déduire que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
   (d) Donner l'espérance et la variance de $Y + 1$. En déduire l'espérance et la variance de Y.

(2) On pose $Z = X - Y$.
   (a) Déterminer $Z(\Omega)$.
   (b) En utilisant le système complet d'événements $(Y = k)_{k \in \mathbb{N}}$, montrer que :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad P(Z \leqslant x) = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}$$

   (c) En déduire une densité f de Z.
   (d) Déterminer l'espérance $E(Z)$ de Z. Ce résultat était-il prévisible ?

Exercice 26. (D'après **EDHEC 2018**) Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} e^{-x^2/2a}, & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0, & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

(1) Montrer que la fonction f est une densité. *Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X de densité f.*

(2) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

(3) On considère la variable aléatoire Y définie par : $Y = \dfrac{X^2}{2a}$.
  (a) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.
  (b) Écrire une fonction Python prenant en argument a et renvoyant une simulation de la variable aléatoire X.

(4) (a) Vérifier que la fonction g, qui à tout réel x associe $x^2 e^{-x^2/2a}$, est paire.
  (b) Rappeler l'expression intégrale ainsi que la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale de paramètres 0 et a.
  (c) En déduire que X admet une espérance et la déterminer.

(5) (a) Rappeler l'espérance de Y puis montrer que X possède un moment d'ordre 2 et le calculer.
  (b) En déduire que la variance de X est donnée par :

$$V(X) = \frac{(4-\pi)a}{2}$$

Exercice 27. Soient $X_0, X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires (indépendantes) suivant une même loi uniforme sur $[0;1]$. Pour $k \in [\![0;n]\!]$, on note

$$U_k = \min(X_0, X_1, ..., X_k).$$

Montrer que U_k est une variable à densité que l'on déterminera.

6 Appendice: Table de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Phi(t)(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000