Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Chapitre 11. Systèmes différentiels linéaires

Ce chapitre propose une application de la réduction des matrices carrées. Il utilise toutes les notions abordées en première année lors de la résolution d'équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2.
On commencera donc par **relire** celui-ci pour s'assurer d'une maîtrise totale des notions.
On propose un (courte) sélection d'exercices en fin de chapitre pour se ré-entraîner.

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

1 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

1.1 Définitions et écriture matricielle

Définition

On appelle **système différentiel linéaire à coefficients constants** tout système de la forme

$$(E) \qquad \begin{cases} x_1' = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ x_2' = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ x_n' = a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n \end{cases}$$

où

- $n \in \mathbb{N}^*$
- les $a_{i,j}$ sont des constantes réelles, appelées *coefficients* du système différentiel
- $x_1, \ldots, x_n$ désignent des fonctions inconnues, que l'on supposera être définies (et dérivables) sur $\mathbb{R}$ tout entier

☞ On peut réécrire le système différentiel (E) sous la forme

$$X' = AX$$

où $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Remarque

Ici, $X : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$. Ainsi, les solutions du système différentiel linéaire sont des applications à valeurs **vectorielles** (à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si l'on adopte le point de vue matriciel). On pourra également présenter les solutions sous la forme d'un vecteur ligne $(x_1, \ldots, x_n)$ si l'énoncé nous invite à le faire.

Définition

On appelle **point d'équilibre** ou **état d'équilibre** du système différentiel $X' = AX$ toute solution constituée de fonctions constantes. On a alors l'équivalence :

$$(x_1, \ldots, x_n) \text{ est un point d'équilibre} \iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Propriété

La matrice A est inversible si et seulement si l'unique point d'équilibre du système différentiel linéaire $X' = AX$ est le point $(0, \ldots, 0) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Définition

On appelle **trajectoire** du système différentiel $X' = AX$ tout ensemble de la forme

$$\{(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n \ : \ t \in \mathbb{R}\}$$

où $(x_1, \ldots, x_n)$ est une solution du système différentiel $X' = AX$.

Remarque

La trajectoire d'un équilibre est réduite à un point.

Définition

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une solution du système différentiel linéaire $X' = AX$. Soit $(\ell_1, \ldots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$.

On dit que la trajectoire $\{(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n \ : \ t \in \mathbb{R}\}$ **converge** vers $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\lim_{t \to +\infty} x_i(t) = \ell_i.$$

Si il n'existe pas de tel n-uplet $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$, alors on dit que la trajectoire **diverge**.

1.2 Résolution lorsque A est une matrice diagonale

Si la matrice A associé au système différentiel est diagonale, la résolution du système revient finalement à résoudre n équations différentielles linéaires et homogènes d'ordre 1.
Ce que l'on sait faire sans mal.
Plus précisément, notant $A = (a_{i,j})$, si $a_{i,j} = 0$ dès que $i \neq j$, on a

$$X' = AX \iff (\forall i \in [\![1, n]\!], \quad x_i' = a_{i,i} x_i) \iff \left(\forall i \in [\![1, n]\!], \ \exists \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad x_i : \ t \mapsto \lambda_i e^{a_{i,i} t}\right)$$

On voit alors dans ce cas que toutes les trajectoires convergent si et seulement si tous les éléments diagonaux de A (qui sont donc dans ce cas particulier ses valeurs propres) sont négatives ou nulles.
Ceci s'étend dans le cas où la matrice A est diagonalisable, l'idée est alors de se ramener, par changement de base, à un système différentiel diagonal.

Exercice 1. Résoudre le système différentiel et déterminer les trajectoires convergentes $\left\{\begin{array}{rcl} x_1' &=& -x_1 \\ x_2'+2x_2 &=& 0 \\ x_3'+3x_3 &=& 0 \end{array}\right.$

1.3 Résolution dans le cas où la matrice A est diagonalisable

Considérons une matrice A diagonalisable. Il existe donc une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$. Posons alors la fonction à valeurs vectorielles

$$Y \,:\, t \longmapsto PX(t).$$

La dérivation étant une opération linéaire, on comprend que $Y' = PX'$. Ainsi (mais il faudra le refaire dans chaque exercice)

$$\begin{aligned} X' = AX \quad &\iff \quad PX' = PAX \iff Y' = PAP^{-1}PX \\ &\iff \quad Y' = DY \end{aligned}$$

et on est ramené à résoudre un système différentiel diagonale.
On trouve alors Y comme dans le paragraphe ci-dessus et on revient à X en multipliant par P^{-1}.

Propriété

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. On note

- $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les valeurs propres de A (non nécessairement distinctes, chaque valeur propre apparaît autant de fois que la dimension du sous-espace propre associé)
- $(U_1, \ldots, U_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, U_i est un vecteur propre associé à la valeur propre α_i.

Alors l'ensemble des solutions du système différentiel linéaire $X' = AX$ est

$$\begin{aligned} S_0 &= \left\{t \mapsto \lambda_1 e^{\alpha_1 t}U_1 + \cdots + \lambda_n e^{\alpha_n t}U_n \,:\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\right\} \\ &= \left\{t \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{\alpha_i t}U_i \,:\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(t \mapsto e^{\alpha_1 t}U_1, \ldots, t \mapsto e^{\alpha_n t}U_n\right) \end{aligned}$$

Remarque

Les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier et S_0 est un espace vectoriel.

À retenir!

☞ Résoudre le système différentiel $X' = AX$ dans le cas où A est diagonalisable revient à déterminer les valeurs propres de A et une base de chacun de ses sous-espaces propres. En concaténant chacune de ces bases, on obtient une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

Exercice 2. On considère le système différentiel linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1' &=& x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_2' &=& 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ x_3' &=& -x_1 - 2x_2 + x_3 \end{array}\right.$$

(1) Expliciter une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X' = AX$, où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
(2) Justifier que A est diagonalisable. Donner sans calcul une première valeur propre de A.
(3) Calculer $A^2(A - 6I)$. En déduire le spectre de A.
(4) Diagonaliser A.
(5) Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'expression de $X(t)$.

Définition

Problème de Cauchy pour un système différentiel linéaire.

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et soit $X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Résoudre le *problème de Cauchy*

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X^0 \end{cases},$$

c'est trouver les solutions du système différentiel linéaire $X' = AX$ qui vérifient la condition initiale $X(t_0) = X^0$, *i.e.*

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad x_i(t_0) = x_i^0$$

Remarque

On a exprimé le problème de Cauchy à un instant quelconque t_0 plutôt qu'en 0 pour gagner en généralité dans cette partie, mais la plupart du temps on choisit $t_0 = 0$ dans les exercices.

Propriété

Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et soit $X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère le problème de Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X^0 \end{cases}$$

Il existe une unique solution au problème de Cauchy (P).

Exercice 3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$.

Propriété

Spectre et convergence des trajectoires.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. On considère le système différentiel linéaire $X' = AX$.

- Si toutes les valeurs propres de A sont négatives ou nulles, alors toutes les trajectoires du système convergent vers un point d'équilibre et on dit que ces points d'équilibres sont **stables**.
- Si A possède au moins une valeur propre strictement positive, alors il existe des trajectoires divergentes.

1.4 Résolution guidée dans le cas où la matrice A n'est pas diagonalisable

Exercice 4. On considère le système différentiel linéaire

$$(E) \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & x & + & 2y & - & 2z \\ y' & = & -4x & - & 3y & + & 4z \\ z' & = & -2x & & & + & z \end{array}\right.$$

où x, y, z sont trois fonctions inconnues, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(1) Déterminer $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que X solution de (E) si et seulement si $X' = AX$.

(2) On introduit la matrice inversible P dont on admet que l'inverse est donnée par la matrice P^{-1} ci-après

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

  (a) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

  (b) On pose $Y = P^{-1}X$. Montrer que $X' = AX \iff Y' = TY$.

(3) (a) Résoudre l'équation différentielle $(E_1) : \varphi' = \varphi$.

  (b) Résoudre l'équation différentielle $(E_2) : \varphi' = -\varphi$.

  (c) Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto cte^{-t}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(E_3) : \varphi' = -\varphi + ce^{-t}$.

(4) On note $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et on suppose que $Y' = TY$.

Montrer que α est solution de (E_1), γ est solution de (E_2) et β est solution de (E_3) pour un réel c bien choisi.

(5) En déduire que si $X' = AX$, alors il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x(t) = (2\lambda_1 t + \lambda_2 - \lambda_1)e^{-t} \\ y(t) = 2\lambda_1 e^{-t} + \lambda_3 e^t \\ z(t) = (2\lambda_1 t + \lambda_2)e^{-t} + \lambda_3 e^t \end{cases}$$

(6) En déduire une solution de (E) non stationnaire qui converge vers l'unique état équilibre du système.

1.5 Lien entre système différentiel linéaire et équation différentielle linéaire d'ordre 2

On considère une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2

$$(E) \qquad y'' + ay' + by = 0$$

où $b \neq 0$. En posant

$$X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix},$$

on se ramène à un système différentiel linéaire, plus précisément, on obtient l'équivalence :

$$X \text{ solution de } (E) \Longleftrightarrow X' = AX.$$

Il est facile de déterminer le spectre de A. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } A &\Longleftrightarrow A - \lambda I \text{ non inversible} \\ &\Longleftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \\ &\Longleftrightarrow P(\lambda) = 0, \end{aligned}$$

où $P(X)$ est le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle (E).

Remarque

Cas où $P(X)$ admet deux racines distinctes r_1 et r_2.

Alors A possède deux valeurs propres distinctes r_1 et r_2 et donc A est diagonalisable. Notons

$$U_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$$

un vecteur propre de A associé à r_i. D'après le cours, les solutions générales de $X' = AX$ sont de la forme

$$X : t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} U_1 + \lambda_2 e^{r_2 t} U_2, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

En prenant la première coordonnée, on en déduit que les solutions générales de (E) sont de la forme

$$y : t \mapsto \lambda_1 u_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 u_2 e^{r_2 t}, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

et on a retrouvé la formule de première année à condition que $u_1 \neq 0$ et $u_2 \neq 0$.
On a $AU_1 = r_1 U_1$ donc

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ -bu_1 - av_1 \end{pmatrix} = r_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

Supposons que $u_1 = 0$. On trouve alors $v_1 = r_1 \times 0 = 0$ et donc $U_1 = 0$. Cela contredit le fait que U_1 est un vecteur propre.

☞ Dans le cas où $P(X)$ admet une racine double r_0, A possède une unique valeur propre et donc A n'est pas diagonalisable. Il faut *trigonaliser* A (voir l'exercice de la partie précédente) pour retrouver la formule de première année...

2 Sélection d'exercices - Travaux dirigés

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1 à coefficients constants suivantes.

(1) $y' = 2y$ (2) $y' - 3y = 0$ (3) $y' + 4y = 0$

Exercice 6. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

(1) $\begin{cases} y' + 10y = 0 \\ y(0) = 10 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y' - 7y = 0 \\ y(0) = -3 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} y' = 8y \\ y(0) = -1 \end{cases}$

Exercice 7. Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

(1) $y' + 2y = 3$ (2) $y' - y = t^2 + 1$ (3) $y' + y = te^t$

Exercice 8. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' - 3y = t\ln(t)e^{3t}$.

Exercice 9. Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

(1) $y'' - 3y' + 2y = 0$ (2) $y'' - 4y' + 4y = 0$ (3) $y'' - 2y = 0$

Exercice 10. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

(1) $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = -3 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} y'' - 2y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

Exercice 11. Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

(1) $y'' - 3y' + 2y = 1 + t$
(2) $y'' - 3y' + 2y = te^t$
(3) $y'' - 4y' + 4y = te^{2t}$
(4) $y'' - 4y' + 4y = (-1 + t)e^{-t}$
(5) $y'' - 2y = e^t$
(6) $y'' - 2y = 1 - 2t + 3t^2$

Exercice 12. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y''-y' = 0$ de deux manières différentes :

(1) En appliquant le théorème du cours sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2.
(2) En faisant un changement de fonction inconnue pour se ramener à une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Exercice 13. Soit $(a, b) \in]0, +\infty[^2$. On considère l'équation différentielle logistique (non linéaire)

(E) $$y' = ay - aby^2$$

(1) Déterminer les équilibres de l'équation logistique.
(2) Soit f une solution de (E) sur $[0, +\infty[$ qui ne s'annule pas (on admet qu'une telle solution existe).
  (a) On pose $z = \dfrac{1}{f}$. Montrer que z satisfait une équation différentielle linéaire puis montrer que, pour tout $t \geq 0$, $z(t) = b + (z(0) - b)e^{-at}$.
  (b) En déduire que, pour tout $t \geq 0$, $f(t) = \dfrac{f(0)}{bf(0) + (1 - bf(0))e^{-at}}$.
(3) Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$. Que remarque-t-on ?

Exercice 14. On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x_1' &= x_2 + x_3 \\ x_2' &= -x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_3' &= x_1 + x_3 \end{cases}$$

(1) Expliciter une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X' = AX$, où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
(2) Calculer $A^3 - 3A^2$. En déduire le spectre de A.
(3) Diagonaliser A.
(4) Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'expression de $X(t)$.

Exercice 15. On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes de même loi $\mathcal{U}(\{-1; 1\})$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ (que l'on ne cherchera pas à expliciter) et on pose, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) & X_2(\omega) \\ X_2(\omega) & X_1(\omega) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

(1) Justifier que, pour tout $\omega \in \Omega$, $M(\omega)$ est une matrice diagonalisable. Est-elle inversible ?

(2) Montrer que, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\mathrm{Sp}(M(\omega)) = \{X_1(\omega) + X_2(\omega);\ X_1(\omega) - X_2(\omega)\}.$$

(3) Déterminer une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$P^{-1}M(\omega)P = D(\omega)$$

où $D(\omega)$ est une matrice diagonale à expliciter.

(4) On considère le système différentiel linéaire à coefficients *aléatoires*

$$(\mathcal{S}) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} y_1' & = & X_1 y_1 + X_2 y_2 \\ y_2' & = & X_2 y_1 + X_1 y_1 \end{array} \right.$$

Remarquons que pour tout $\omega \in \Omega$, on obtient un système différentiel linéaire à coefficients constants. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$. On admet que $Y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que, pour tout $\omega \in \Omega$, Y est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si $Y' = M(\omega)Y$.

(b) Soit $\omega \in \Omega$ fixé.
  (i) Quels sont les états d'équilibre du système?
  (ii) Déterminer, pour tout $\omega \in \Omega$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$.

(c) Calculer la probabilité que toutes les trajectoires soient convergentes.

3 Un exercice type concours - Ecricome 2023, sujet zéro

Partie 1

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et doit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base canonique est A.

(1) Déterminer le rang de $A - 6I$.
En déduire une valeur propre de A et la dimension du sous-espace propre associé.

(2) Soit $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U = AV - 2V$.
Montrer que U est un vecteur propre de A et déterminer la valeur propre associée.

(3) Posons $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
(b) Donner la matrice B de f dans cette base.
(c) Montrer alors qu'il existe une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$ et expliciter P. On ne cherchera pas P^{-1}.

(4) La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable?

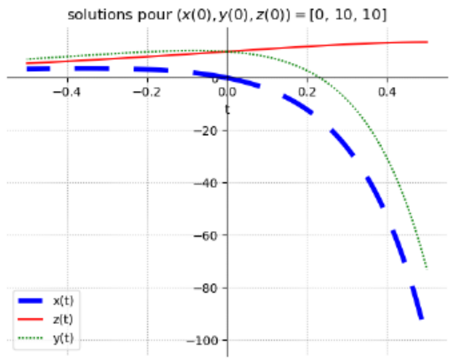
Partie 2

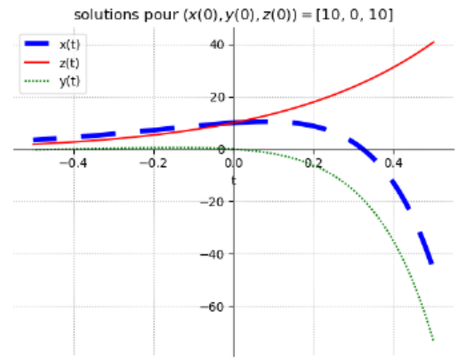
On considère le système différentiel suivant

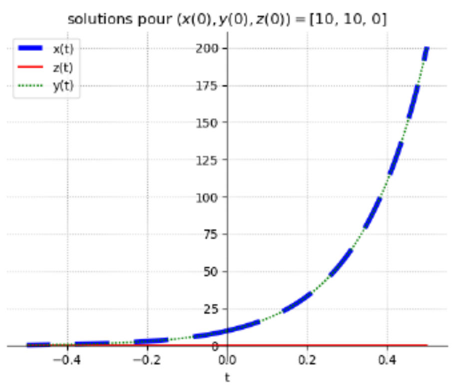
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} x'(t) &= 5x(t) + y(t) - 4z(t) \\ y'(t) &= 3x(t) + 3y(t) - 4z(t) \\ z'(t) &= x(t) - y(t) + z(t) \end{cases}$$

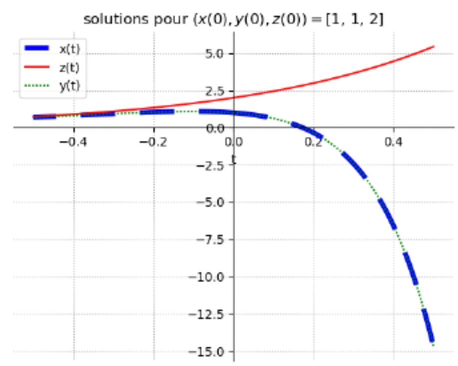
où x, y, z sont trois fonctions inconnues de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On note, pour tout réel t, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

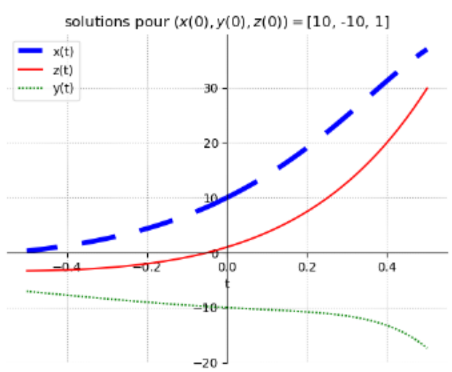
(5) À l'aide de Python, on obtient le tracé suivant des solutions du système, en faisant varier $x(0), y(0), z(0)$. Que peut-on conjecturer lorsque $x(0) = y(0)$?

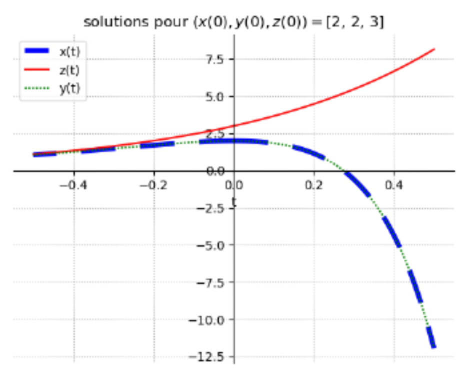












(6) Montrer que, pour tout réel t, $X'(t) = AX(t)$.

(7) On note, pour tout réel t, $Y(t) = P^{-1}X(t)$. On admet que, pour tout réel t, on a $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$.
Montrer que, pour tout réel t, $Y'(t) = BY(t)$.

(8) (a) Donner les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_1) \qquad \varphi'(t) = 6\varphi(t).$$

(b) Donner les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_2) \qquad \varphi'(t) = 2\varphi(t).$$

(c) Soit $c \in \mathbb{R}$.
Montrer que la fonction $t \mapsto cte^{2t}$ est solution de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_3) \qquad \varphi'(t) = 2\varphi(t) + ce^{2t}.$$

Déterminer toutes les solutions de $(\mathcal{E}_3)$.

(9) En notant, pour tout réel t, $Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$, montrer que γ est solution de $(\mathcal{E}_1)$, que β est solution de $(\mathcal{E}_2)$ et α est solution de $(\mathcal{E}_3)$ pour un réel c bien choisi.

(10) Montrer qu'il existe trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & 2(\lambda_1 + \lambda_1 t + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ y(t) & = & 2(\lambda_1 t + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ z(t) & = & (2\lambda_1 t + \lambda_1 + 2\lambda_2)e^{2t} \end{array} \right.$$

(11) En déduire, en notant $x_0 = x(0), y_0 = y(0), z_0 = z(0)$ que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \left((x_0 - y_0)t + z_0 + \dfrac{1}{2}(x_0 - y_0)\right) e^{2t} + \left(\dfrac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0\right) e^{6t} \\ \\ y(t) & = & \left((x_0 - y_0)t + z_0 + \dfrac{1}{2}(y_0 - x_0)\right) e^{2t} + \left(\dfrac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0\right) e^{6t} \\ \\ z(t) & = & ((x_0 - y_0)t + z_0)\, e^{2t} \end{array} \right.$$

(12) Justifier la conjecture faite à la Question 5.