Math ECG 2. 2023-2024

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Chapitre 12. Fonctions de deux variables réelles

Ce chapitre présente la notion de fonction numérique de deux variables réelles et a pour but de permettre la recherche d'*extrema* en faisant le lien avec la théorie de la réduction des matrices.

1 Généralités

Définition

On appelle fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ toute application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

qui à un couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ associe un réel noté $f(x,y)$. On dit alors que f est une fonction de deux variables (réelles).

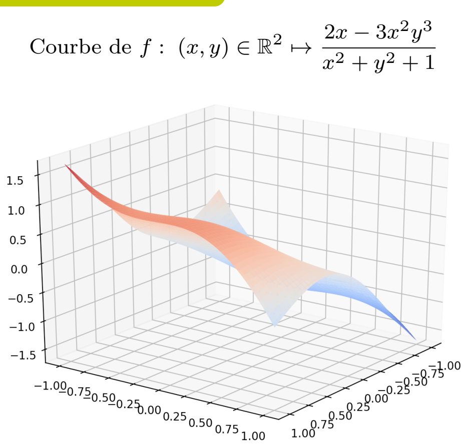
☞ Dans un premier temps, on définira les fonctions sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. Après avoir introduit la notion d'*ouvert* de $\mathbb{R}^2$ dans une section suivante, on pourra avoir des fonctions dont les domaines de définition sont plus restreints.

Exemple

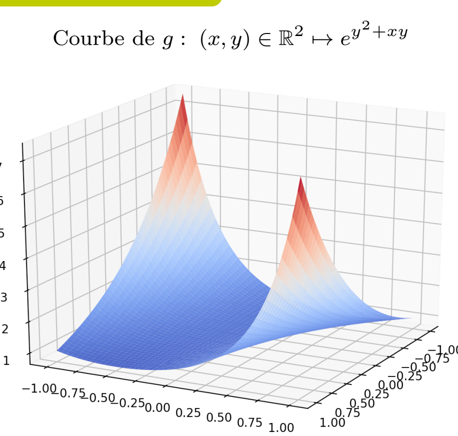
Les fonctions suivantes sont des fonctions de deux variables définies sur $\mathbb{R}^2$.

$$f:(x,y)\mapsto \frac{2x-3x^2y^3}{x^2+y^2+1}; \qquad g:(x,y)\mapsto e^{y^2+xy}; \qquad p:(x,y)\mapsto x$$

Affichage Python



Affichage Python



☞ Le code Python ci-dessous aura permis de représenter les courbes ci-dessus des fonctions f et g sur $[-1;1] \times [-1;1]$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from matplotlib.cm import coolwarm

ax = Axes3D(plt.figure())

X=np.linspace(-1, 1, 100)
Y=np.linspace(-1, 1, 100)

X,Y=np.meshgrid(X,Y)

def f(x,y):
    return (2*x-3*x**2*y**3)/(x**2+y**2+1)

def g(x,y):
    return np.exp(y**2+x*y)

f=np.vectorize(f)
g=np.vectorize(g)

Z=f(X,Y)

ax.plot_surface(X,Y,Z, cmap=coolwarm)
plt.show()
```

On se pose alors, comme pour les fonctions d'une variable réelle, des questions de *régularité* (continuité, dérivabilité). Mais il faut pour cela donner un sens à la notion de limite ce qui nécessite l'introduction préalable de de la notion de *distance* sur $\mathbb{R}^2$.

Définition

Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points de $\mathbb{R}^2$. On appelle **distance de A à B** le réel, noté $d(A, B)$, égal à :

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

☞ Dans un repère orthonormal, le réel $d(A, B)$ correspond à la longueur du segment $[AB]$ et la formule précédente découle..... du théorème de Pythagore.

Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$.

- On dit que f **est continue en** (x_0, y_0) si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists r > 0 \quad \text{tels que} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad d\left((x,y),(x_0,y_0)\right) \leq r \Longrightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq \epsilon.$$

- On dit que f **est continue sur** $\mathbb{R}^2$ ssi f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.

☞ Parmi les premiers exemples de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$, on trouve les fonctions polynomiales et en particulier les fonctions coordonnées.

Propriété

Les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}^2$:

(1) Les fonctions polynomiales $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de la forme
$$f : (x,y) \mapsto x^i y^j, \quad \text{avec} \quad (i,j) \in \mathbb{N}^2$$

(2) Les **fonctions coordonnées** de la forme
$$(x,y) \mapsto x \qquad \text{et} \qquad (x,y) \mapsto y.$$

Propriété

Théorèmes généraux - continuité.

- La somme, le produit, le quotient dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- La composée d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $I \subset \mathbb{R}$ et d'une fonction continue sur I est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.

(1) Montrer que la fonction $f : (x,y) \to \dfrac{2x - 3x^2y^3}{x^2 + y^2 + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

(2) Montrer que la fonction $g : (x,y) \to ye^{-x^2-y}$. est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2 Représentation graphique des fonctions de deux variables

2.1 Courbe, surface

Définition

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. La courbe de f est une *surface* tracée dans l'espace correspondant à l'ensemble de points
$$\mathcal{C}_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y)\}.$$

☞ On peut voir les coordonnées x et y d'un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ comme la latitude et la longitude et $z = f(x,y)$ comme l'altitude de ce point. Bien que ce soit une surface en 3 dimensions, on arrive à la représenter dans le plan en jouant sur la perspective et en utilisant des couleurs (les variations de couleurs représentent les variations d'altitude).

Les commandes Python permettant la représentation en trois dimensions d'une courbe ne sont pas exigibles. Néanmoins, on pourrait demander d'interpréter la présence de points remarquables par observations de la figure.

2.2 Lignes de niveaux

Définition

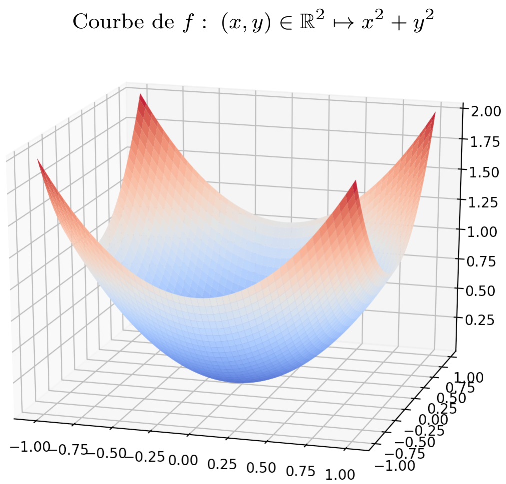
Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle **ligne de niveau** λ de f l'ensemble
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ f(x,y) = \lambda\}$$

☞ Si f est la fonction qui à la longitude et la latitude associe l'altitude, alors les lignes de niveau représentent les points qui sont à la même altitude : si on se promène sur une ligne de niveau, on ne monte pas et on ne descend pas : on reste au même niveau.

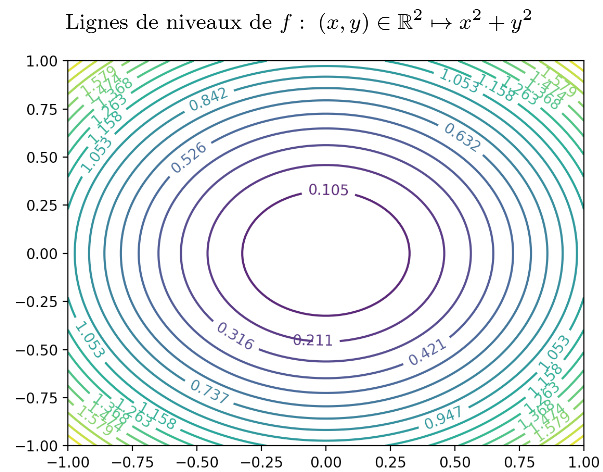
☞ Pour tracer les lignes de niveaux avec Python, il faut commencer par préciser la liste `L` des niveaux qu'on veut représenter puis on utiliser la commande

```
plt.contour(X,Y,Z, L)
```

Affichage Python



Affichage Python



☞ On voit par exemple ci-dessus qu'autour de $(0,0)$, les lignes de niveaux ont tendance à se resserrer au fur et à mesure que le niveau diminue, cela traduit qu'il y a un minimum local en $(0;0)$, ce qui est cohérent avec l'autre figure.

3 Calcul différentiel

On considère dans cette partie une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$.

3.1 Dérivées partielles d'ordre 1

Définition

- On dit que f **admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à** x **au point** $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ si et seulement si la fonction réelle $f_x : t \to f(t,y_0)$ est dérivable en x_0.
  On note alors cette dérivée partielle en (x_0,y_0) : $\partial_1(f)(x_0,y_0)$.

- On dit que f **admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à** y **au point** $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ si et seulement si la fonction réelle $f_y : t \to f(x_0,t)$ est dérivable en y_0.
  On note alors cette dérivée partielle en (x_0,y_0) : $\partial_2(f)(x_0,y_0)$.

Définition

- Si f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x en tout point de $\mathbb{R}^2$, alors la fonction de deux variables $\partial_1(f)(x,y)$ s'appelle la fonction dérivée partielle d'ordre 1 de f par rapport à x.
- Si f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à y en tout point de $\mathbb{R}^2$, alors la fonction $\partial_2(f)(x,y)$ s'appelle la fonction dérivée partielle d'ordre 1 de f par rapport à y.

Remarque

- La notion de dérivée partielle correspond à la notion de dérivation par rapport à une des variables en fixant les autres, c'est-à-dire en les considérant *comme des constantes.* Les règles de dérivation découlent alors directement des règles de dérivation des fonctions à une variable.

- On pourra parfois rencontrer (dans des vieux sujets) les notations $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ (à ne pas utiliser).

Définition

On appelle **gradient** de f au point (x, y) le vecteur colonne de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ suivant :

$$\nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1(f)(x,y) \\ \partial_2(f)(x,y) \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = ye^{-x^2-y}$.

(1) Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 et les calculer.
(2) Déterminer le gradient de la fonction f au point $(1, 2)$.

3.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition

Si les fonctions $\partial_1(f)$ et $\partial_2(f)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$, on dit que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Propriété

Toute fonction polynomiale est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Propriété

Théorèmes généraux - caractère $\mathcal{C}^1$.

- La somme, le produit, le quotient dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
- La composée d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $I \subset \mathbb{R}$ et d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Montrer que la fonction f de l'Exercice 2 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

3.3 Développement limité d'ordre 1

Comme pour des fonctions d'une variable réelle, on peut vouloir donner des approximations polynomiales locales des fonctions de deux variables, *via* la notion de développement limité. Le résultat suivant fait office de définition et de théorème.

Propriété

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Alors, f admet un **développement limité d'ordre 1** en tout point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$. Ce développement limité est unique. Plus précisément, il existe une fonction de deux variables ε (qui dépend du point (x_0, y_0)) continue en $(0,0)$, vérifiant $\varepsilon(0,0) = 0$ et telle que, pour tout (h,k) "proche" de $(0,0)$,

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) &= f(x_0,y_0) + {}^t\nabla(f)(x_0,y_0) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \left(\sqrt{h^2+k^2}\right) \varepsilon(h,k) \\ &= f(x_0,y_0) + {}^t\nabla(f)(x_0,y_0) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o\left(d((h,k), 0_{\mathbb{R}^2})\right). \end{aligned}$$

Exemple

Soit $f\ (x,y) \mapsto ye^x + e^{2y} + x^2$. Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On peut alors écrire le développement limité de f à l'ordre 1 en $(0,0)$. Pour (x,y) proche de $(0,0)$,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + {}^t\nabla(f)(0,0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \varepsilon(x,y) \\ &= 1 + \begin{pmatrix} 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \varepsilon(x,y) \\ &= 1 + 3y + \left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \varepsilon(x,y) \end{aligned}$$

3.4 Dérivées partielles d'ordre 2

Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ et admettant des dérivées partielles d'ordre 1. Si les fonctions dérivées partielles

$$(x,y) \mapsto \partial_1(f)(x,y) \qquad \text{et} \qquad (x,y) \mapsto \partial_2(f)(x,y)$$

admettent également des dérivées partielles d'ordre 1, on dit que f admet des dérivées partielles d'ordre 2. On note alors

$$\begin{aligned} \partial^2_{1,1}(f) &= \partial_1\left(\partial_1(f)\right) \qquad & \partial^2_{2,2}(f) &= \partial_2\left(\partial_2(f)\right) \\ \partial^2_{1,2}(f) &= \partial_1\left(\partial_2(f)\right) \qquad & \partial^2_{2,1}(f) &= \partial_2\left(\partial_1(f)\right) \end{aligned}$$

Remarque

Comme précédemment, on rencontrera parfois les notations

$$\partial^2_{1,1}(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \partial^2_{2,2}(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \partial^2_{1,2}(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \partial^2_{2,1}(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Définition

Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et si ses dérivées partielles $\partial_1(f)$ et $\partial_2(f)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, alors on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f de l'Exercice 2. Est-elle de classe $\mathcal{C}^2$?

☞ Naturellement, toute fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Propriété

Toute fonction polynomiale est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Propriété

Théorèmes généraux - caractère $\mathcal{C}^2$.

- La somme, le produit, le quotient dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
- La composée d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $I \subset \mathbb{R}$ et d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

En toute généralité, l'ordre dans lequel on effectue les dérivées partielles est important. Le théorème suivant, central dans cette théorie, affirme qu'en cas de fonction régulière (de classe $\mathcal{C}^2$), c'est la même chose.

Propriété

Théorème de Schwarz.

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ alors

$$\partial^2_{1,2}(f) = \partial^2_{2,1}(f).$$

Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. La **matrice hessienne** de f au point (x,y) est la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivante

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(f)(x,y) & \partial^2_{1,2}(f)(x,y) \\ \partial^2_{2,1}(f)(x,y) & \partial^2_{2,2}(f)(x,y) \end{pmatrix}.$$

Remarque

☞ Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors, $\partial^2_{1,2}(f) = \partial^2_{2,1}(f)$ d'après le théorème de Schwarz donc la matrice hessienne de f est une matrice **symétrique** et donc **diagonalisable**.

Exercice 5. Déterminer la matrice hessienne de la fonction f de l'Exercice 2 au point $(1,2)$.

4 Un peu de topologie de $\mathbb{R}^2$

Afin de parler de la notion d'*extremum*, il est nécessaire de préciser quelques notions de *topologie* sur les parties de $\mathbb{R}^2$ sur lesquelles on va rechercher ces extrema.

4.1 Parties ouvertes, parties fermées, parties bornées

Définition

Soit r un réel strictement positif et $A(x_A, y_A)$ un point de $\mathbb{R}^2$.

- On appelle **boule ouverte de centre** A **et de rayon** r l'ensemble $\mathcal{B}_o(A,r)$ défini par
$$\mathcal{B}_o(A,r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \ : \ d(M,A) < r\};$$
- On appelle **boule fermée de centre** A **et de rayon** r l'ensemble $\mathcal{B}_f(A,r)$ défini par :
$$\mathcal{B}_f(A,r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \ : \ d(M,A) \leq r\}.$$

Définition

Soit U une partie non vide de $\mathbb{R}^2$.

- Une partie U de $\mathbb{R}^2$ est dite **ouverte** si et seulement si pour tout point $M \in U$, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_o(M, r) \subset U$, soit si e seulement si, pour tout $M \in U$ il existe une boule ouverte de centre A incluse dans U.
- Une partie F de $\mathbb{R}^2$ est dite **fermée** si et seulement si son complémentaire $\overline{F}$ est une partie ouverte.

Remarque

L'énoncé précisera toujours la nature de la partie U étudiée (ouverte ou fermée). Voici quelques exemples.

- Toute boule ouverte de $\mathbb{R}^2$, tout ensemble de la forme $]a, b[\times]c, d[$ sont de parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$.
- Toute boule fermée de $\mathbb{R}^2$, tout ensemble de la forme $[a, b] \times [c, d]$ sont de parties fermées de $\mathbb{R}^2$.

Définition

Une partie Ω de $\mathbb{R}^2$ est dite **bornée** si et seulement si il existe $R > 0$ tel que pour tout $M \in \Omega$, $d(M, O) \leq R$ (où O est le point $(0, 0)$), c'est-à-dire que Ω est inclus dans la boule fermée de centre O et de rayon R.

Exemple

- Toute boule ouverte de $\mathbb{R}^2$ (resp. fermées) est une partie ouverte (resp. fermées) et bornée de R^2.
- Tout ensemble de la forme $]a, b[\times]c, d[$ sont de parties bornées de $\mathbb{R}^2$.
- Tout ensemble de la forme $[a, b] \times [c, d]$ sont de parties bornées de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6.

(1) Représenter graphiquement les domaines ouverts suivants

$$U_1 =]0; 1[\times]0; 1[, \quad U_2 =]0; 1[\times\mathbb{R}, \quad U_3 = \mathbb{R}\times]0; +\infty[.$$

(2) Représenter graphiquement le domaine ouvert

$$U_4 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0 \text{ et } x < y\right\}$$

et le domaine fermé

$$F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : \ x + y \leq 1\right\}.$$

5 Recherche d'extrema

5.1 Extremum local

Définition

Soit f une fonction définie sur un **ouvert** U et soit (x_0, y_0) un point de U.

- On dit que f admet un **minimum local en** (x_0, y_0) s'il existe $r > 0$ tel que
$$\forall (x, y) \in \mathcal{B}((x_0, y_0), r) \cap U, \quad f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$
- On dit que f admet un **maximum local en** (x_0, y_0) s'il existe $r > 0$ tel que
$$\forall (x, y) \in \mathcal{B}((x_0, y_0), r) \cap U, \quad f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$
- On dit que f admet **un extremum local en** (x_0, y_0) lorsque f admet soit un minimum soit un maximum local en ce point.

5.2 Point critique

Définition

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un **ouvert** U. On dit que $(x_0, y_0) \in U$ est un **point critique** de f si et seulement si
$$\nabla(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{donc ssi} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \partial_1(f)(x_0, y_0) = 0 \\ \partial_2(f)(x_0, y_0) = 0 \end{array} \right.$$

Propriété

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un **ouvert** U. Si f admet un extremum (local) en $(x_0, y_0) \in U$, alors (x_0, y_0) est un point critique de f.

☞ Le théorème précédent donne une condition **nécessaire** à l'existence d'un extemum local. **Attention**, la réciproque est fausse; il peut exister des points critiques de f qui ne sont pas des extremums locaux.

Exercice 7. Soit la fonction f définie par $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 2xy - 4y$. Déterminer le ou les points critiques de f.

5.3 Condition suffisante d'existence d'un extremum local

Propriété

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un **ouvert** U et soit (x_0, y_0) un **point critique** de f. Avec les notations précédentes, on a

- Si les valeurs propres de la matrice hessienne $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont **strictement positives**, alors f admet un **minimum local** en (x_0, y_0).
- Si les valeurs propres de la matrice hessienne $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont **strictement négatives**, alors f admet un **maximum local** en (x_0, y_0).
- Si les valeurs propres de la matrice hessienne $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont **non nulles et de signes opposés**, alors f n'admet pas d'extremum local en (x_0, y_0). *On parle de point col (ou point selle).*
- Si 0 est valeur propre de la matrice hessienne $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$, alors **on ne peut rien dire**.

À retenir!

☞ Lorsqu'on cherche les *extrema* d'une fonction f:

- On commence tout d'abord par chercher les points critiques de f.
- Pour chaque point critique, il faudra vérifier si c'est un extremum ou non.

Exercice 8. Soit $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$. Déterminer, si ils existent, les extremums locaux de f et préciser leurs natures.

5.4 Extremum global

Définition

Soit f une fonction définie sur une partie U de $\mathbb{R}^2$ et soit (x_0, y_0) un point de U.

- On dit que f admet un **minimum global en** (x_0, y_0) si :
$$\forall (x,y) \in U, \quad f(x,y) \geq f(x_0, y_0).$$
- On dit que f admet un **maximum global en** (x_0, y_0) si :
$$\forall (x,y) \in U, \quad f(x,y) \leq f(x_0, y_0).$$
- On dit que f admet **un extremum global en** (x_0, y_0) lorsque f admet soit un minimum soit un maximum global en ce point.

Propriété

Soit f une fonction continue sur une partie F fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$. Alors f est bornée et atteint ses bornes sur F. Ainsi, f admet un maximum et un minimum global sur F.

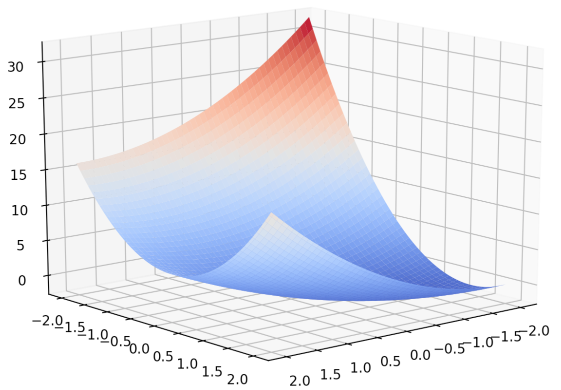
Remarque

- Si f admet extremum global en (x_0, y_0), alors c'est également un extremum local donc (x_0, y_0) est un point critique de f.
- Pour savoir si un extremum local en (x_0, y_0) est également un extremum global, il faut comparer $f(x,y)$ et $f(x_0, y_0)$ pour tout $(x,y) \in U$. Cette étape est souvent guidée par l'énoncé.

5.5 Quelques illustrations

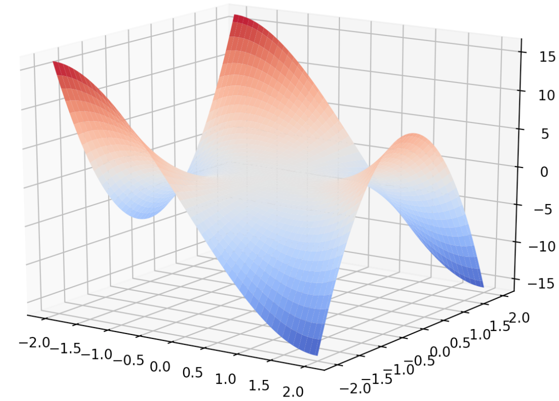
Affichage Python

$$f(x,y) = x^2 + 3y^2 + 2xy - 4y$$



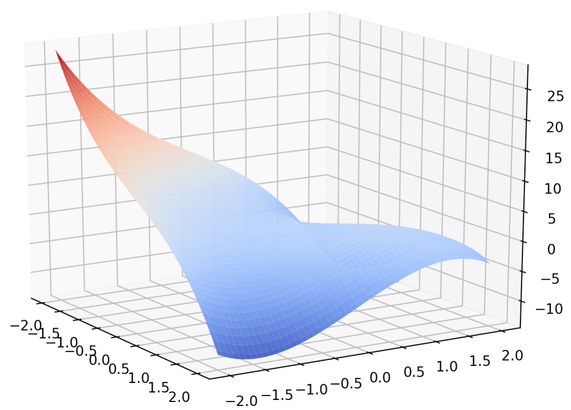
Affichage Python

$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2.$$



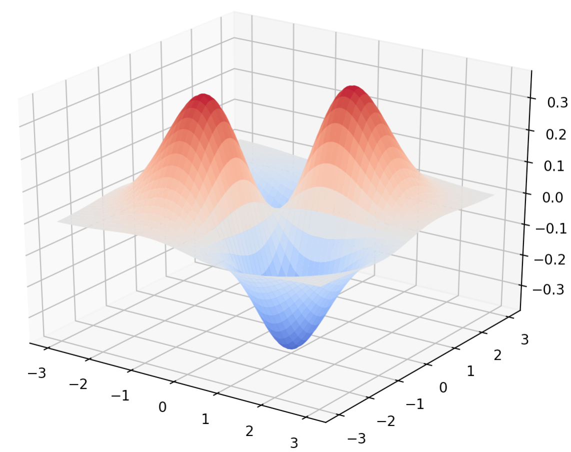
Affichage Python

$$f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$$



Affichage Python

$$f(x,y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$



6 Sélection d'exercices - Travaux dirigés

Exercice 9. (D'après **EML 2006**) On note $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$F(x,y) = (x-1)(y-2)(x+y-6).$$

(1) Montrer que $(4,2)$ et $(2,3)$ sont des points critiques de F.
(2) Est-ce que F présente un extremum local au point $(4,2)$? au point $(2,3)$?

Exercice 10. Déterminer les extremums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = xy(x+y-1)$.

Exercice 11. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = 9x^2 + 8xy + 3y^2 + x - 2y$.

(1) Montrer que f admet un seul extremum sur $\mathbb{R}^2$. Quelle est sa nature?
(2) Calculer $f(-1/2, 1)$ puis retrouver le résultat de la question précédente en développant l'expression

$$3\left(y + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2.$$

(3) Cet extremum est-il global ?

Exercice 12. Soit la fonction f définie par : $f(x,y) = x\left((\ln(x))^2 + y^2\right)$.

(1) Préciser le domaine de définition de f et le représenter. *On admet que ce domaine est ouvert.*
(2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur ce domaine.
(3) Montrer que f admet un seul extremum local. Préciser sa nature et sa valeur.
(4) Cet extremum est-il global ?

Exercice 13. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = xye^{-(x^2+y^2)}$.

(1) Calculer $\partial_1(f)$ et $\partial_2(f)$
(2) Déterminer les points critiques de f et indiquer si ces points correspondent à un minimum ou un maximum.

Exercice 14. (D'après **EML 2015**) Dans cet exercice on pourra utiliser l'encadrement suivant : $2 < e < 3$.

(1) On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \varphi(x) = x^2e^x - 1$.
   (a) Dresser le tableau de variations de φ, en précisant les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$ et sa valeur en 0.
   (b) Établir que l'équation $e^x = \dfrac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et que α appartient à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2};1\right[$.

On considère l'ouvert $U =]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ et l'application de classe $\mathcal{C}^2$ suivante :

$$g = U \longrightarrow \mathbb{R}, (x,y) \longmapsto g(x,y) = \frac{1}{x} + e^x - y^2e^y$$

(2) Représenter graphiquement l'ensemble U.
(3) Calculer, pour tout (x,y) de U, les dérivées partielles premières de g en (x,y).
(4) Montrer que g admet deux points critiques et deux seulement, et que ceux-ci sont $(\alpha,0)$ et $(\alpha,-2)$, où α est le réel défini à la Question 2.
(5) Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha,0)$?
(6) Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha,-2)$?
(7) Est-ce que g admet un extremum global sur U?

Exercice 15. (D'après **ECRICOME 2007**) On considère, sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, la fonction g définie par

$$g(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y).$$

(1) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de g sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
(2) Montrer que g admet un extremum local sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ dont on précisera la nature et la valeur.
(3) On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right).$$

   (a) Montrer que pour tout $t > 0$, on a : $f(t) \geq 1$.
   (b) Vérifier que

$$g(x,y) = 1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1\left(\frac{x}{y}\right).$$

   (c) En déduire que l'extremum local est un extremum global de g sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 16. (D'après **EDHEC 2010**) On considère la fonction f définie, pour tout couple (x, y) de l'ouvert $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, par

$$f(x, y) = (x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

(1) Montrer que, pour tout couple (x, y) de $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, on a

$$f(x, y) = 2 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \qquad \text{et} \qquad f(x, y) = \frac{(x + y)^2}{xy}.$$

(2) Montrer que f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.
(3) Montrer que f possède une infinité de points critiques et les déterminer.
(4) Déterminer les dérivées partielles secondes de f et vérifier que ces dernières ne permettent pas de conclure à l'existence d'un extremum local de f sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.
(5) (a) Comparer les réels $(x + y)^2$ et $4xy$.
(b) En déduire que f admet sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ un minimum global en tous ses points critiques et donner sa valeur.
(6) Soit g la fonction définie pour tout (x, y) de $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, par

$$g(x, y) = 2\ln(x + y) - \ln x - \ln y.$$

Montrer que

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[, \ g(x, y) \geq 2\ln 2.$$

Exercice 17. (D'après **EDHEC 2005**) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ f\,(x, y) = x\,e^{x\left(y^2+1\right)}.$$

(1) Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
(2) (a) Déterminer les dérivées partielles premières de f
(b) En déduire que le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local est $A = (-1, 0)$.
(3) (a) Déterminer les dérivées partielles secondes de f.
(b) Montrer qu'effectivement, f présente un extremum local en A. En préciser la nature et la valeur.
(4) (a) Montrer que: $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ f\,(x, y) \geq x\,e^x$.
(b) En étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g\,(x) = x\,e^x$, conclure que l'extremum trouvé à la question 2b) est un extremum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 18. (D'après **EDHEC 2015**)
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 2xy + 24.$$

(1) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
(2) (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 puis déterminer le seul point critique (a, b) de f.
(b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f et écrire la matrice hessienne $\nabla^2(f)(a, b)$ de f en son point critique.
(c) Déterminer les valeurs propres de $\nabla^2(f)(a, b)$ et en déduire que f admet un extremum local m au point (a, b) dont on précisera la nature (minimum ou maximum) et la valeur.
(3) Le but de cette question est de montrer qu'en fait cet extremum est global.
(a) Compléter le membre de droite de l'égalité suivante

$$2x^2 + 2xy + 12x = 2\left(x + \frac{y}{2} + 3\right)^2 - \ldots$$

(b) Compléter de même l'égalité : $\dfrac{y^2}{2} - 2y + 6 = \dfrac{1}{2}(y - 2)^2 + \ldots$
(c) En déduire une autre écriture de $f(x, y)$ montrant que l'extremum trouvé plus haut est global.

Exercice 19. (D'après **EML 2011**).
On considère les fonctions

$$f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto (x+\ln(x))e^{x-1} \quad \text{et} \quad F :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(1) Étudier f.

(2) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$, exprimer $F'(x)$ à l'aide de $f(x)$.

On considère l'application de classe $\mathcal{C}^2$

$$G :]0;+\infty[^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto G(x,y) = F(x) + F(y) - 2e^{\frac{x+y}{2}}.$$

(3) Pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$, exprimer les dérivées partielles premières $\partial_1(G)(x,y)$ et $\partial_2(G)(x,y)$ à l'aide de $f(x)$, $f(y)$ et $e^{(x+y)/2}$.

(4) (a) Montrer que f est bijective.
(b) Établir que, pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$, (x,y) est un point critique de G si et seulement si

$$x = y \quad \text{et} \quad x + \ln x = e.$$

(5) Montrer que l'équation $x + \ln x = e$ d'inconnue $x \in]0;+\infty[$ admet une unique solution, que l'on notera α, et montrer que : $1 < \alpha < e$.

(6) En déduire que G admet comme unique point critique le point (α,α) et montrer que la matrice Hessienne de G au point (α,α) s'écrit :

$$H = \nabla^2(G)(\alpha,\alpha) = \begin{pmatrix} f'(\alpha) - \dfrac{e^\alpha}{2} & -\dfrac{e^\alpha}{2} \\ -\dfrac{e^\alpha}{2} & f'(\alpha) - \dfrac{e^\alpha}{2} \end{pmatrix} = f'(\alpha)I_2 - \frac{e^\alpha}{2}M$$

où

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(7) (a) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ et X un vecteur propre de M associé à λ. Montrer que

$$HX = \left(f'(\alpha) - \frac{e^\alpha}{2}\lambda\right) X$$

et en déduire que

$$\mathrm{Sp}(H) = \{f'(\alpha), f'(\alpha) - e^\alpha\}.$$

(b) Montrer que $f'(\alpha) > e^\alpha$.
(c) En déduire que G admet un extremum local et préciser sa nature.

Exercice 20. (Extrait de **CB4**, Avril 2019) Le but de l'exercice est l'étude des extremums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

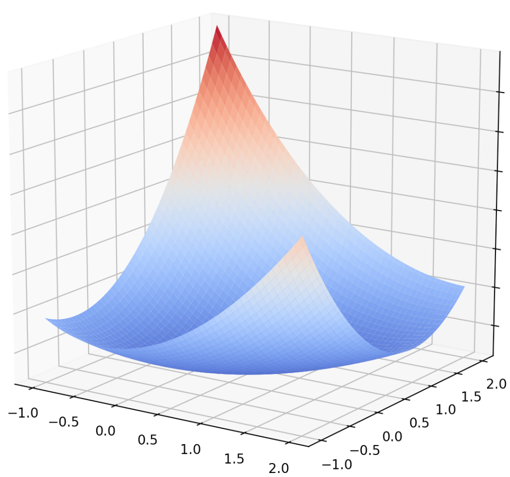
$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}.$$

Partie I : Détermination d'extrema de f

(1) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
(2) Établir que l'équation $e^{-x} = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet une solution et une seule.
(3) On a obtenu les deux figures suivantes par un script Python

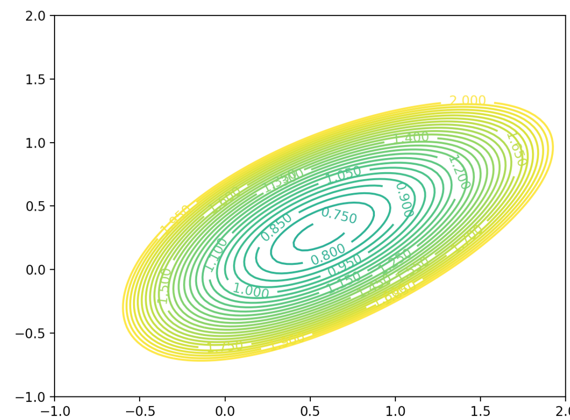
Affichage Python

Figure 1



Affichage Python

Figure 2



(a) Que représentent ces deux graphiques?
(b) Quelles conjectures peut-on émettre sur d'éventuel(s) extremum(s) de f ?

(4) Montrer que (x,y) est point critique de f si et seulement si

$$x - e^{-x} = 0 \quad \text{et} \quad y = \frac{x}{2}$$

(5) En déduire que f admet un unique point critique que l'on notera (x_0, y_0).
(6) Montrer que f admet un extremum en (x_0, y_0). Est-ce un minimum ou un maximum ?

Partie II : Etude d'une fonction g

(7) On introduit la fonction g, définie sur $[0; +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}.$$

(a) Montrer que l'équation $g(x) = x$, d'inconnue $x \in [0, +\infty[$, admet une solution et une seule, que celle-ci est x_0. Montrer de plus que

$$\frac{1}{2} < x_0 < 1.$$

(b) Former le tableau des variations de g et tracer sa courbe représentative.

Partie III : Etude d'une suite récurrente (u_n)

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0, \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = g(u_n).$$

(8) Établir que la suite (u_n) est croissante et converge vers x_0.

(9) (a) Montrer que

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right], \qquad |g'(x)| \leq 0,125.$$

On donne

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 0,025, \quad \text{et} \quad g'(1) \simeq -0,124.$$

(b) Établir

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |u_n - x_0| \leq (0,125)^{n-1} \cdot 0,5.$$

(c) Écrire un programme Python qui calcule et affiche une valeur approchée de x_0 à 10^{-8} près.

(10) Montrer que

$$f(x_0, y_0) = \frac{x_0^2}{2} + x_0$$

et en déduire une valeur approchée décimale à 10^{-7} près de $f(x_0, y_0)$.

Exercice 21. (Extrait de **ECRICOME 2020**) Pour tout entier naturel non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \geq 0,\ f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} \mathrm{d}t$$

(1) Démontrer que la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et que, pour tout $x > 0$, $f_n'(x) = \dfrac{x^{2n} - 1}{x + 1}$.

(2) Étudier les variations de f_n.

(3) Démontrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, et calculer sa dérivée seconde.
En déduire que f_n est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

(4) (a) Démontrer : $\forall t \geq 1,\ t^{2n} - 1 \ \geq\ n\,(t^2 - 1)$.
(b) Montrer alors : $\forall x \geq 1,\ f_n(x) \ \geq\ f_n(1) + \dfrac{n}{2}\,(x - 1)^2$.
(c) En déduire la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

(5) Calculer $f_n(0)$, puis démontrer : $f_n(1) < 0$.

(6) Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, et que cette solution est strictement supérieure à 1.
On note x_n cette solution.

Dans toute la suite de l'exercice, on s'intéresse à la fonction G_n définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$G_n : (x, y) \mapsto f_n(x) \times f_n(y)$$

(7) Justifier que la fonction G_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et calculer ses dérivées partielles premières.
(8) Déterminer l'ensemble des points critiques de G_n.
(9) Calculer la matrice hessienne de G_n au point (x_n, x_n) puis au point $(1, 1)$.
(10) La fonction G_n admet-elle un extremum local en (x_n, x_n) ? Si oui, donner la nature de cet extremum.
(11) La fonction G_n admet-elle un extremum local en $(1, 1)$? Si oui, donner la nature de cet extremum.