Math ECG 2. 2023-2024

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Chapitre 14. Graphes probabilistes - Chaînes de Markov

1 Introduction

Les chaînes de Markov sont un exemple de suites (X_n) de variables aléatoires **non indépendantes**. Plus précisément, elles sont un peu l'analogue aléatoire des suites récurrentes d'ordre 1. Le futur (instant $n+1$) ne dépend que du présent (instant n), indépendamment du passé (instants $0, 1, ..., n-1$).

Les chaînes de Markov sont un objet essentiel des probabilités; elles sont utilisées en théorie des jeux, en physique, en informatique, en finance, sciences sociales, etc...

Leur étude et leur représentation fait apparaître des éléments de théorie des graphes et plus précisément des élément sur les graphes orientés pondérés, ou graphes probabilistes, notions qui seront brièvement présentées dans ce chapitre. On renvoie dans tous les cas au cours de première année sur les graphes pour toutes les généralités et définitions sur ces objets, à connaître!

On retrouvera également dans ce chapitre des notions d'algèbre linéaire; il est en effet souvent nécessaire de diagonaliser (ou réduire) la matrice de transition de la chaîne dans le but de calculer ses puissances.

2 Graphes probabilistes - Matrice(s) de transition

Définition

Un **graphe probabiliste** (d'ordre n) est un graphe orienté et pondéré dans lequel :

- Les n sommets du graphe s'appellent les **états** du système et sont numérotés de 1 à n;
- Les poids des arcs indiquent les probabilités de passage d'un état à l'autre, il est notamment parfois possible de rester sur le même état;
- La somme des poids des arcs issus d'un même sommet est égale à 1.

Définition

La **matrice de transition** d'un graphe probabiliste d'ordre n est la matrice $A = (p_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le terme $p_{i,j}$ représente le poids de l'arc allant du sommet i au sommet j, c'est à dire la probabilité de passer de l'état i à l'état j.

☞ La matrice de transition du graphe permet notamment de le représenter en Python.

Propriété

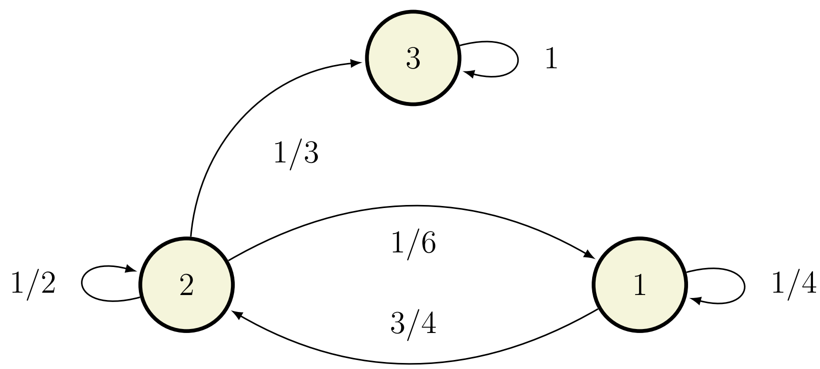
Il est clair que la somme de chaque ligne de la matrice de transition d'un graphe probabiliste est égale à 1:

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \qquad \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1.$$

Une telle matrice est dite *stochastique*.

Exemple

On représente un exemple de graphe probabiliste à trois sommets.



Sa matrice de transition est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On observe notamment qu'une fois sur l'état 3, on y reste (avec probabilité 1). Un tel état est dit *absorbant*.

3 Chaînes de Markov

Définition

Soit (X_k) une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et avec le même univers image $[\![1,n]\!]$, c'est à dire toutes à valeurs dans le même ensemble.
On dit que (X_k) est une **chaîne de Markov** si :
pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$ et tout $(i_0, i_1, ..., i_{k-1}) \in [\![1,n]\!] \times ... \times [\![1,n]\!]$, on a

$$P_{[X_k=i]\cap[X_{k-1}=i_{k-1}]\cap...\cap[X_0=i_0]}(X_{k+1}=j) = P_{X_k=i}(X_{k+1}=j).$$

dès lors que

$$P([X_k=i]\cap[X_{k-1}=i_{k-1}]\cap...\cap[X_0=i_0]) \neq 0.$$

À retenir!

Il faut comprendre la condition de la manière suivante : le futur (*i.e.* X_{k+1}) ne dépend que du présent (*i.e.* X_k) et pas du passé (*i.e.* $X_{k-1}, .., X_0$).

Définition

Considérons un graphe probabiliste d'ordre n de matrice de transition $A = (p_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle **chaine de Markov** associée à ce graphe la chaîne de Markov (X_k) dont l'univers image est l'ensemble des sommets du graphe ($i.e$ $[\![1,n]\!]$) et vérifiant, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P_{[X_k=i]}(X_{k+1} = j) = p_{i,j}$$

On dit que la chaîne est dans l'état $i \in [\![1,n]\!]$ à l'instant k si et seulement si $[X_k = i]$ est réalisé.

Les probabilités conditionnelles $p_{i,j}$ sont aussi appelées **probabilités de transition**.

☞ En particulier, on observe que dans cette définition, la loi d'évolution ne change pas avec le temps, la chaîne est dite *homogène*.

Définition

Soit (X_k) une chaîne de Markov associée à un graphe probabiliste d'ordre n et de matrice de transition $A = (p_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On appelle $k-$ième **état probabiliste de la chaîne** le vecteur ligne $V_k \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ définie par

$$V_k = \begin{pmatrix} P(X_k = 1) & P(X_k = 2) & \dots & P(X_k = n) \end{pmatrix}$$

En particulier, $V_0 = \begin{pmatrix} P(X_0 = 1) & P(X_0 = 2) & \dots & P(X_0 = n) \end{pmatrix}$ est appelé état (probabiliste) initial de la chaîne.

À retenir!

Le $k-$ième état probabiliste de la chaîne caractérise la loi de X_k; il s'agit d'une représentation de cette loi sous forme de vecteur ligne.

Exercice 1. Soient p, q deux réels de $]0;1[$ fixés. Un *zappeur compulsif* commence à regarder la télévision au moment 0 et hésite entre deux chaînes (la 1 et la 2). Au moment $k = 0$, il choisit la chaîne au hasard (de manière équiprobable) puis à chaque minute

- s'il est sur la chaîne 1, il change de chaîne avec probabilité p
- s'il est sur la chaîne 2, il change de chaîne avec probabilité q

On note X_k la variable aléatoire correspondant au numéro de la chaîne que regarde le téléspectateur après k minutes.

(1) Dessiner le graphe probabiliste auquel la chaîne (X_k) est associée et préciser la matrice de transition.
(2) Quel est la loi de X_0? Quel est alors l'état probabiliste initial ?
(3) Recopier et compléter la fonction Python afin qu'elle renvoie une simulation de X_k.

```
def simul_X(k, p, q) :
    x= ....
    for i in range(k):
        if x == .... :
            if rd.rand( ) <= p :
                ....
        else :
            if rd.rand( ) <= q :
                ....
    return x
```

Exercice 2. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

(1) Dessiner le graphe probabiliste dont A représente la matrice de transition.
(2) Que fait le programme suivant (aussi disponible *ici*) :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def mystere(A, k, i0) :
    x=i0-1
    n=len(A)
    for m in range(k):
        r=rd.random()
        i=x
        p=0
        for j in range(n):
            if p <= r and r< p+A[i, j] :
                x=j
            p=p+A[i,j]
    return x+1

A=np.array([[0, 0.2, 0.8], [0.3, 0.3, 0.4], [0.8, 0.1, 0.1]])
k=100
i0=2
S=np.zeros(3)
for m in range(1000):
    j=mystere(A, k, i0)
    S[j-1]+=1
S=[S[i]/1000 for i in range(3)]
plt.grid()
plt.bar([1,2,3], S)
plt.show()
```

4 Calcul du $k-$ième état probabiliste

Propriété

Soit (X_k) une chaîne de Markov de matrice de transition $A = (p_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Il découle de la formule des probabilités totales que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\sum_{i=1}^{n} p_{i,j} P(X_k = i) = P(X_{k+1} = j).$$

À retenir!

☞ La propriété précédente se réécrit sous forme matricielle, en faisant intervenir les états probabilistes de la chaîne.

En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a
$$V_{k+1} = V_k A,$$
où $V_k = \big(P(X_k = 1) \quad P(X_k = 2) \quad \ldots \quad P(X_k = n)\big)$.

Hors Programme mais...

Si (X_k) est une chaine de Markov de matrice de transition A et de $k-$ième état probabiliste V_k (et d'état probabiliste initial V_0), une récurrence combinée aux résultats précédents donne, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$V_k = V_0 A^k$$
☞ Il faudra savoir redémontrer toutes les étapes menant à cette formule.

Exercice 3. On reprend l'exercice du *zappeur compulsif* avec $p = 1/2$ et $q = 2/3$.

(1) Écrire la matrice de transition A.
(2) Recopier (ou *télécharger*) le programme suivant et l'exécuter avec différentes valeurs initiales. Qu'observe-t-on ?

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

def etat_prob(A, k, V0):
    return np.dot(V0, al.matrix_power(A, k))

A=np.array([[1/2, 1/2], [2/3, 1/3]])
V0=np.array([[1/2, 1/2]]) # on prendra d'autres valeurs initiales

for k in range(20):
    print(etat_prob(A, k, V0))
```

(3) Déterminer les valeurs propres de A. Pour chaque valeur propre, déterminer une base du sous-espace propre associé. En déduire l'existence d'une matrice inversible P et d'une matrice diagonale D telles que
$$A = PDP^{-1}$$
(*On choisira D de sorte que les coefficients diagonaux soient rangés dans l'ordre croissant.*)
(4) Expliciter la matrice A^k, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
(5) En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'expression du $k-$ième état probabiliste de la chaîne puis la loi de X_k.
(6) Montrer que (X_k) converge en loi vers une certaine loi Z que l'on précisera.
(7) Montrer que Z ne dépend pas de la loi de X_0.
(8) On note $\Pi = \big(P(Z = 1) \quad P(Z = 2)\big)$. Que dire que ${}^t\Pi$ pour ${}^tA$?

5 États stables

Définition

Soit (X_k) une chaine de Markov à n états, de matrice de transition $A = (p_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $\Pi \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ un vecteur ligne définissant une loi de probabilité sur $[\![1, n]\!]$ (*i.e.* dont tous les coefficients sont des éléments de $[0; 1]$ avec une somme égale à 1).

On dit que Π est un **état stable** de la chaîne de Markov (X_k) si $\Pi A = \Pi$.
Auquel cas, on dit aussi que la loi de probabilité associée à Π est la **loi stationnaire** de la chaîne.

Remarque

Si il existe un k_0 pour lequel X_{k_0} suit la soit de Π (c'est à dire pour lequel $V_{k_0} = \Pi$), alors, une récurrence immédiate permet de voir que, pour tout $k \geq k_0$, on a $V_k = \Pi$.
☞ La loi stationne bien.

Propriété

Soit (X_k) une chaine de Markov à n états, de matrice de transition $A = (p_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si $\Pi = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, alors

$$\Pi \text{ est un état stable de la chaîne} \iff \begin{cases} {}^t\Pi \text{ est vecteur propre de } {}^tA \text{ associé à la valeur propre 1} \\ \\ \Pi \text{ définit une loi de probabilité sur } [\![1, n]\!] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} {}^tA \cdot {}^t\Pi = {}^t\Pi \\ \\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ \pi_i \geq 0 \\ \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1 \end{cases}$$

☞ Attention, bien que 1 soit toujours valeur propre de ${}^tA$, il n'est pas clair qu'on puisse toujours trouver un vecteur propre associé dont toutes les composantes soient positives (qu'on *normalise* pour obtenir une loi de probabilité).

Théorème

Soit (X_k) une chaine de Markov à n états, de matrice de transition $A = (p_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si (X_k) converge en loi vers une variable aléatoire Z, alors, nécessairement, le vecteur ligne

$$\Pi = \begin{pmatrix} P(Z = 1) & P(Z = 2) & \dots & P(Z = n) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$$

est un état stable de la chaîne.

À retenir!

Attention! La chaîne peut admettre un état stable **sans qu'il y ait** convergence en loi, mais s'il y a convergence c'est vers l'état stable.

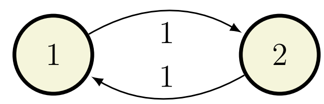
☞ Un résultat, complètement hors programme, affirme qu'une chaîne de Markov admet toujours un état stable. La preuve est délicate. Dans les exercices, on montrera, au cas par cas, que cet état existe.

Un cas particulier : chaîne à deux états

On s'intéresse pour conclure ce chapitre au cas particulier d'une chaîne de Markov (X_k) à deux états[1].

- **Cas n°1**. Deux états *absorbants*.
  Auquel cas la chaîne est presque sûrement constante égale à sa valeur initiale. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k = X_0$.

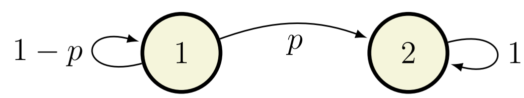
- **Cas n°2**. Deux états "*répulsifs*"
  On voit dans ce cas qu'il faut distinguer deux cas selon la parité de k : après un nombre pair de *déplacements*, on est revenu à l'état initial. Après un nombre impair, on est forcément sur l'autre.



  Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$X_k = \begin{cases} X_0, & \text{si } k \text{ est pair} \\ 3 - X_0, & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

- **Cas n°3a**. Un seul état absorbant (pas d'état répulsif).
  Soit $p \in]0;1[$. Assez intuitivement, on peut penser que (X_k) va converger en loi vers une loi certaine égale à la valeur de l'état absorbant. On observe d'ailleurs que l'état stable de la chaîne est ici $\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.



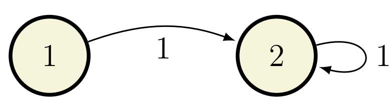
  En effet, on voit que $(P(X_n = 1))$ est une suite géométrique de raison $1 - p$, ce qui permet d'écrire

$$P(X_n = 1) = (1-p)^n P(X_0 = 1) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

  et

$$P(X_n = 2) = 1 - P(X_n = 1) = 1 - (1-p)^n P(X_0 = 1) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

- **Cas n°3b**. Un état absorbant et un état répulsif
  Il est clair que (X_n) est constante à partir de $n = 1$ et est égale à la valeur de l'état absorbant.



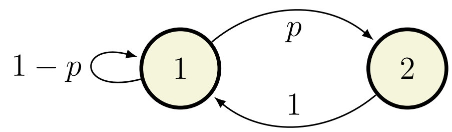
  On a

$$\begin{aligned} P(X_1 = 2) &= P_{X_0=1}(X_1 = 2)P(X_0 = 1) + P_{X_0=2}(X_1 = 2)P(X_0 = 2) \\ &= P(X_0 = 1) + P(X_0 = 2) \\ &= 1. \end{aligned}$$

  Une récurrence immédiate donne, pour tout $k \geq 1$, $P(X_k = 2) = 1$.

[1]Attention, toutes ces observations sont à redémontrer

- **Cas n°4a**. Un état répulsif et aucun état absorbant.
  Soient $p \in]0;1[$. L'état stable de la chaîne est $\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+p} & \frac{p}{1+p} \end{pmatrix}$ et il y a toujours convergence, peu importe l'état initial.

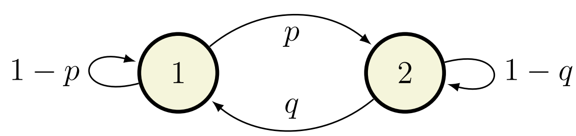


On peut voir (c'est un exercice qui arrive plus bas) que, pour tout $n \geq 2$,

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{1+p} + \left(\frac{p}{1+p}P(X_0 = 1) - \frac{1}{1+p}P(X_0 = 2)\right)(-p)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+p}$$

$$P(X_n = 2) = \frac{p}{1+p} - \left(\frac{p}{1+p}P(X_0 = 1) - \frac{1}{1+p}P(X_0 = 2)\right)(-p)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{p}{1+p}.$$

- **Cas n°4b**. Le *zappeur compulsif*.
  Soient $p, q \in]0;1[$. L'état stable de la chaîne est $\Pi = \begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \end{pmatrix}$ et il y a convergence, peu importe les valeurs initiales.



En effet, on peut alors montrer (voir exercice ci-dessous) que

$$P(X_n = 1) = (1-(p+q))^n \left(P(X_0 = 1) - \frac{q}{p+q}\right) + \frac{q}{p+q} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{q}{p+q}$$

et

$$P(X_n = 2) = (1-(p+q))^n \left(P(X_0 = 2) - \frac{p}{p+q}\right) + \frac{p}{p+q} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{p}{p+q}.$$

Exercice 4. On se place dans le cas du *zappeur compulsif* ci-dessus et on note A la matrice de transition.

(1) Montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si

$$\lambda^2 - (2-(p+q))\lambda + (1-p)(1-q) - pq = 0$$

(2) Déterminer alors le spectre de A. Montrer que l'état stable de la chaîne est $\Pi = \begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \end{pmatrix}$.

(3) Montrer que la suite $(P(X_n = 1))$ est arithmético-géométrique. Conclure.

Exercice 5. On se place dans le cas d'un état répulsif et aucun état absorbant (cas n°4a ci-dessus).

(1) Montrer que $(P(X_n = 1))$ est une suite à récurrence linéaire d'ordre 2.

(2) Vérifier que $P(X_1 = 1) = (1-p)P(X_0 = 1) + P(X_0 = 2)$.

(3) En déduire, pour $n \geq 2$, l'expression du terme général de $P(X_n = 1)$.

6 Sélection d'exercices - Travaux dirigés

Exercice 6. (Extrait - après réécriture - de **DS n°5**, Février 2022)

Une personne commande son dîner en ligne une fois par semaine, sur trois plateformes différentes numérotées de 1 à 3 de manière aléatoire selon le protocole suivant:

- La première semaine, chaque plateforme a la même probabilité d'être choisie;
- La plateforme 1 étant la meilleure mais la plus chère, elle ne commande jamais deux fois de suite sur celle-ci;
- Si elle commande une certaine semaine *via* la plateforme 1, elle commandera la semaine suivante sur 2 ou 3 avec autant de chance;
- Si elle commande une certaine semaine *via* 2 ou 3, il y a une chance sur deux qu'elle change de plateforme la semaine suivante et dans ce cas, autant de chance de choisir une des deux autres.

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, X_n la variable aléatoire qui prend pour valeur le numéro de la plateforme choisie lors de la $n-$ième commande. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, V_n le $n-$ième état probabiliste de la chaîne, c'est à dire le vecteur ligne de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ défini par $V_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

(1) (a) Quelle est la loi de X_1? Préciser son espérance et sa variance.
(b) Proposer une instruction Python permettant de simuler X_1.

(2) Représenter le graphe ainsi que la matrice de transition A associés à la *chaîne* (X_n).
(3) Justifier soigneusement, en citant les résultats utilisés, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$V_{n+1} = V_n A.$$

(4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $V_n = V_1 A^{n-1}$.

(5) (a) Vérifier que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de ${}^tA$. On précisera la valeur propre associée.
(b) Les commandes

```python
import numpy as np
import numpy.linalg as al

A=np.array([[0, 1/2, 1/2], [1/4, 1/2, 1/4], [1/4, 1/4, 1/2]])
B=A.transpose()
C=16*al.matrix_power(B, 2)-np.eye(3)
print(np.dot(C, B-np.eye(3)))
```

renvoient

Affichage Python

```
> > >
[[0., 0., 0.],
[0., 0., 0.],
[0., 0., 0.]]
```

En déduire deux autres valeurs propres possibles de ${}^tA$.

(c) Vérifier que les deux valeurs précédentes sont bien valeurs propres de ${}^tA$, puis exhiber, en rédigeant soigneusement, une matrice D diagonale (dont les éléments diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant) et une matrice P inversible telles que

$${}^tA = PDP^{-1}.$$

(d) Inverser P.
(e) Calculer explicitement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice $({}^tA)^n$ puis A^n et en déduire la loi de X_n.
(f) Conclure que (X_n) converge en loi vers une variable Z que l'on explicitera. Établir un lien avec le vecteur V.

Exercice 7. (Extrait de **DS n°2**, Automne 2021)

On considère la matrice M définie par :

$$M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) (a) La matrice M est-elle inversible ?
(b) Montrer que M admet trois valeurs propres $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ que l'on précisera. Expliciter trois vecteurs U_1, U_2, U_3 tels que, pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, $E_{\lambda_i}(M) = \mathrm{Vect}(U_i)$.

(c) Justifier que la famille (U_1, U_2, U_3) forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(d) Déterminer les coordonnées (α, β, γ), dans la base (U_1, U_2, U_3), du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne.
- si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne.

Pour tout entier i supérieur ou égal à 1, on note B_i (respectivement R_i) l'événement "on obtient une boule blanche (respectivement une boule rouge) lors du $i^{ème}$ tirage".

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note X_n le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du $n^{ème}$ tirage et on pose $X_0 = 2$. On admet que (X_n) est une chaîne de Markov à 3 états (notés ici 0, 1 et 2) et on note V_n son $n-$ième état probabiliste.

On note enfin T_1 le numéro du tirage où l'on extrait pour la première fois une boule blanche et T_2 le numéro du tirage où l'on extrait la dernière boule blanche.

(2) (a) Représenter le graphe probabiliste auquel la chaîne (X_n) est associée et préciser la matrice de transition A de celui-ci. Exprimer A en fonction de M.

(b) Justifier rigoureusement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_{n+1} = V_n A$.

(c) Montrer que, pour tout entier naturel n, l

$$V_n = \alpha\, {}^tU_1 + \beta \left(\frac{1}{2}\right)^n {}^tU_2 + \gamma \left(\frac{1}{3}\right)^n {}^tU_3,$$

où α, β, γ sont les réels trouvés à la Question (1d).
(d) Donner la loi de la variable X_n .

(3) Calculer $E(X_n)$, espérance de X_n , ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.
(4) Reconnaître la loi de T_1.
(5) Écrire les événements $[T_2 = 2]$ et $[T_2 = 3]$ à l'aide de certains des événements B_i et en déduire les valeurs des probabilités $P[T_2 = 2]$ et $P[T_2 = 3]$.

(6) (a) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, écrire l'événement $[T_2 = n]$ en fonction des événements $[X_{n-1} = 1]$ et $[X_n = 0]$.
(b) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$P\left[T_2 = n\right] = 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$$

(c) Monter que la variable aléatoire T_2 admet une espérance et calculer $E(T_2)$.

Exercice 8. (D'après **EDHEC 2017**)

Les sommets d'un carré sont numérotés 1,2,3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.

Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Au départ, c'est-à-dire à l'instant 0, le mobile se trouve sur le sommet 1.
- Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant n. D'après les deux points précédents, on a donc $X_0 = 1$.

(1) Donner la loi de X_1, ainsi que l'espérance de la variable aléatoire X_1.

On admet pour la suite que la loi de X_2 est donnée par

$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{3} \quad P(X_2 = 2) = P(X_2 = 3) = P(X_2 = 4) = \frac{2}{9}.$$

(2) Pour tout entier supérieur ou égal à 2, donner, en justifiant, l'ensemble des valeurs prises par X_n.

(3) (a) Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}\left(P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)\right).$$

(b) Vérifier que cette relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.
(c) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1$ et en déduire l'égalité, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}.$$

(d) Établir alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X_n = 1) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

(4) (a) En procédant comme à la question précédente, montrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}\left(P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)\right).$$

(b) En déduire une relation entre $P(X_{n+1} = 2)$ et $P(X_n = 2)$.
(c) Montrer enfin que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X_n = 2) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

(5) On admet enfin que pour tout entier naturel n, on a

$$P(X_{n+1} = 3) = -\frac{1}{3}P(X_n = 3) + \frac{1}{3}\ ; \quad \text{et} \quad P(X_{n+1} = 4) = -\frac{1}{3}P(X_n = 4) + \frac{1}{3}.$$

En déduire sans calcul que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

(6) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'espérance $E(X_n)$ de la variable aléatoire X_n.

(7) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la matrice ligne de $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$

$$U_n = \big(P(X_n) = 1 \quad P(X_n = 2) \quad P(X_n = 3) \quad P(X_n = 4)\big)$$

(a) Montrer, grâce à certains résultats obtenus ci-avant, que, si l'on pose

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+1} = U_n A.$$

(b) Établir par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 A^n$.

(c) En déduire la première ligne de A^n.

(8) Expliquer comment choisir la position du mobile au départ pour trouver les trois autres lignes de la matrice A^n, puis écrire ces trois lignes.

Exercice 9. (Réécriture d'un vieux sujet **HEC 2003**, posé sous le nom **DS n°3B**, Hiver 2020).

On dispose de deux jetons A et B que l'on peut placer dans deux cases C_1 et C_2, et d'un dispositif permettant de tirer au hasard et de manière équiprobable, l'une des lettre a, b ou c. Au début de l'expérience, les deux jetons sont placés dans C_1. On procède alors à une série de tirages indépendants de l'une des trois lettres a, b ou c.

À la suite de chaque tirage, on effectue l'opération suivante
- Si on tire la lettre a, on change le jeton A de case;
- Si on tire la lettre b, on change le jeton B de case;
- Si on tire la lettre c, les positions des deux jetons restent inchangées.

(1) **Partie I - Étude du mouvement du jeton** A

On introduit les variables X_n (respectivement Y_n) qui valent 1 si à l'issue de la $n-$ième expérience, le jeton A (resp. le jeton B) est dans la case C_1 et 2 si il est dans la case C_2. Naturellement, $X_0 = Y_0 = 1$.

(a) On introduit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(i) Justifier que M est diagonalisable.

(ii) Déterminer les valeurs propres de M et une matrice $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.

(iii) En déduire l'expression de M^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) (i) Déterminer la loi de X_1.

(ii) À l'aide d'un système complet d'évènements à préciser, déterminer ensuite une matrice Q telle que

$$\big(P(X_{n+1} = 0) \quad P(X_{n+1} = 1)\big) = \big(P(X_n = 0) \quad P(X_n = 1)\big)\, Q.$$

(iii) Expliciter Q^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(iv) En déduire la loi de X_n.

(2) **Partie II - Étude du mouvement du couple de jetons** (A, B)

On considère maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire W_n définie par $W_0 = 1$ et, à l'issue de la $n-$ième expérience décrite précédemment :

- Si A et B sont tous deux dans C_1, alors $W_n = 1$;
- Si A se trouve dans C_1 et B dans C_2, alors $W_n = 2$;
- Si A se trouve dans C_2 et B dans C_1, alors $W_n = 3$;
- Si A et B sont tous deux dans C_2, $W_n = 4$.

(a) Déterminer la loi de W_1.

(b) On admet que (W_n) est une chaîne de Markov à 4 états et on note V_n son $n-$ième état probabiliste. Représenter le graphe et la matrice de transition A auxquels elle est associée. On a notamment, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$V_{n+1} = V_n A.$$

(c) Montrer que 1 est valeur propre de ${}^tA$. Déterminer un vecteur propre de ${}^tA$, associé à la valeur propre 1 dont la somme des composantes est égale à 1.

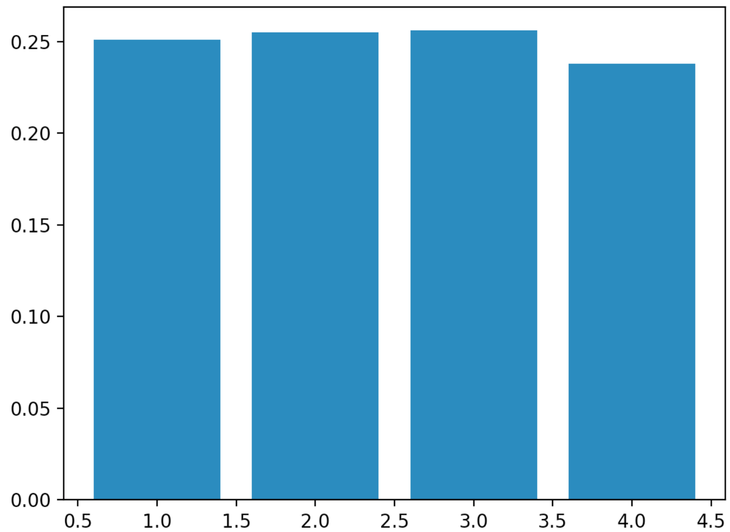
(d) Compléter la fonction Python pour qu'elle renvoie une simulation de W_n

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_W(n) :
    A=np.array(.....................................)
    w=0
    n=len(A)
    for m in range(k):
        r=rd.random()
        i=w
        p=0
        for j in range(n):
            if p <= r and r< p+A[i, j] :
                w= .........
            p=p+A[i,j]
    return w+1
```

(e) On écrit le script suivant dont les résultats d'exécution sont affichés ci-dessous

```
import matplotlib.pyplot as plt

S=np.zeros(4)
for m in range(1000):
    j=simul_W(100)
    S[j-1]+=1
S=[S[i]/1000 for i in range(4)]
plt.bar([1,2,3, 4], S)
plt.show()
```

Affichage Python



Interpréter ce résultat. Quel est le lien avec la Question (2c) ?

Exercice 10. (D'après **HEC 2008**, déjà posé dans **DM n°7**, Hiver 2021).

Dans tout l'exercice N désigne un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2, et p un réel fixé de l'intervalle $]0,1[$ et $q = 1 - p$. Soit n un entier naturel quelconque.

Dans une population de N individus, on s'intéresse à la propagation d'un certain virus.

Chaque jour, on distingue dans cette population trois catégories d'individus : en premier lieu, les individus sains, c'est-à-dire ceux qui ne sont pas porteurs du virus, ensuite les individus qui viennent d'être contaminés et qui sont inoffensifs pour les autres, et enfin, les individus contaminés par le virus et qui sont contagieux.

Ces trois catégories évoluent jour après jour selon le modèle suivant :

- chaque jour n, chaque individu sain peut être contaminé par n'importe lequel des individus contagieux ce jour avec la même probabilité p, ces contaminations éventuelles étant indépendantes les unes des autres;
- un individu contaminé le jour n devient contagieux le jour $n+1$;
- chaque individu contagieux le jour n redevient sain le jour $n+1$.

On note alors X_n le nombre aléatoire d'individus contagieux le jour n. On remarquera que si, pour un certain entier naturel i, on a $X_i = 0$, alors on a aussi $X_{i+1} = 0$.

On va dans cet exercice[2] ne traiter que le cas $N = 3$ et $p = 1/3$.

[2] Dans le sujet original dont cet exercice est extrait, on traitait également le cas général

On considère les matrices S et R suivantes :

$$S = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 & 9 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que la matrice R est inversible et calculer son inverse R^{-1}.

(2) (a) Montrer que les réels -1, 0, 5 et 9 sont des valeurs propres de S.
(b) Calculer le produit matriciel $R^{-1}SR$.
(c) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$ l'expression de la matrice S^n.

(3) Soit n un entier fixé de $\mathbb{N}$.
(a) Déterminer la loi de probabilité conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $[X_n = 0]$.
(b) Déterminer la loi de probabilité conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $[X_n = 3]$.
(c) Vérifier que la loi de probabilité conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $[X_n = 1]$. (resp $[X_n = 2]$) est la loi binomiale de paramètres $\left(2, \frac{1}{3}\right)$ (resp. $\left(1, \frac{5}{9}\right)$).
(d) Représenter le graphe de la chaîne de Markov (X_n) (dont les états sont 0, 1, 2 et 3).

(e) On introduit l'*espérance conditionnelle*, notée $E\left(X_{n+1} | X_n = i\right)$, qui correspond à l'espérance de la loi de probabilité conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $[X_n = i]$.

Déterminer les valeurs respectives de $E\left(X_{n+1} | X_n = 1\right)$ et $E\left(X_{n+1} | X_n = 2\right)$.

(4) On suppose, **uniquement dans cette question**, que $X_0 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(3, \frac{1}{3}\right)$.
(a) Déterminer la loi de X_1 et calculer $E\left(X_1\right)$.
(b) Vérifier la formule suivante :

$$E\left(X_1\right) = \sum_{i=0}^{3} E\left(X_1 | X_0 = i\right) P\left([X_0 = i]\right).$$

(5) On introduit alors le vecteur ligne U_n, correspondant au $n-$ième état probabiliste de la chaîne, défini par

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & w_n & t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P\left([X_n = 0]\right) & P\left([X_n = 1]\right) & P\left([X_n = 2]\right) & P\left([X_n = 3]\right) \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer une relation entre u_n, v_n, w_n et t_n.
(b) A l'aide de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[X_n = i] : 0 \leq i \leq 3\}$, déterminer une matrice M indépendante de n, telle que

$$U_{n+1} = U_n M.$$

(c) Exprimer M en fonction de S.
(d) Quel est l'état stable de la chaîne de Markov (X_n)?
(e) Donner l'expression des réels u_n, et v_n en fonction de n, v_0 et w_0.

(6) On pose

$$F = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [X_n = 0].$$

(a) Que signifie l'événement F ?
(b) Montrer la convergence de la chaîne vers l'état stable, peu importe la loi suivie par X_0. Interpréter.

Une annale de DS

Partie 1 - Réduction et puissances d'une matrice 3×3

Dans cette première partie, on considère les matrices $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - \frac{1}{3}I$.

(1) Déterminer le rang de B. En déduire une valeur propre immédiate de B.

(2) Écrire un programme Python d'en-tête `def poly_mat(P, M) :` qui, prenant en argument une liste `P=[`a_0`, `a_1`, ..., `a_n`]` et une matrice carrée M renvoie la matrice

$$a_0 I + a_1 M + \dots + a_n M^n.$$

(3) On suppose la fonction précédente écrite correctement. À l'aide des instructions ci-dessous et de leur résultat d'exécution présenté ci-contre, déterminer un polynôme annulateur de B.

```
import numpy as np

B=np.array([[0, 1/3, 1/3], [2/3, 0, 0], [2/3, 0, 0]])
P=[0, -4, 0, 9]
print(poly_mat(P, B))
```

Affichage Python

```
> > >
[[0., 0., 0.]
[0., 0., 0.]
[0., 0., 0.]]
```

(4) Déterminer une matrice diagonale D de dernière ligne nulle et une matrice inversible P de première ligne $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ telles que $B = PDP^{-1}$.

(5) Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $B^j = PD^jP^{-1}$.

(6) Expliciter la matrice P^{-1}.

(7) Établir que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a :

$$A^k = P\left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} D^j\right) P^{-1}.$$

(8) Expliciter, pour $k \in \mathbb{N}^*$, la première ligne de A^k.

Partie 2 - Une chaîne de Markov à trois états

Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. Un tirage consiste à extraire au hasard une boule de l'urne puis à la remettre dans l'urne pour le tirage suivant.

On définit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante.

- Pour tout entier naturel k non nul, X_k est définie *après* le $k-$ieme tirage.
- On procède au premier tirage et X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue à ce tirage.

- Après le $k-$ieme tirage ($k \in \mathbb{N}^*$) :
  - soit X_k a pris la valeur 1, dans ce cas on procède au $(k+1)-$ieme tirage et X_{k+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce $(k+1)-$ieme tirage.
  - soit X_k a pris la valeur j, différente de 1. Dans ce cas on procède également au $(k+1)-$ieme tirage et X_{k+1} prend la valeur j si la boule tirée porte le numéro j et la valeur 1 sinon.

(9) Reconnaître la loi de X_1.

(10) Simulation informatique de l'expérience aléatoire décrite dans cette partie.

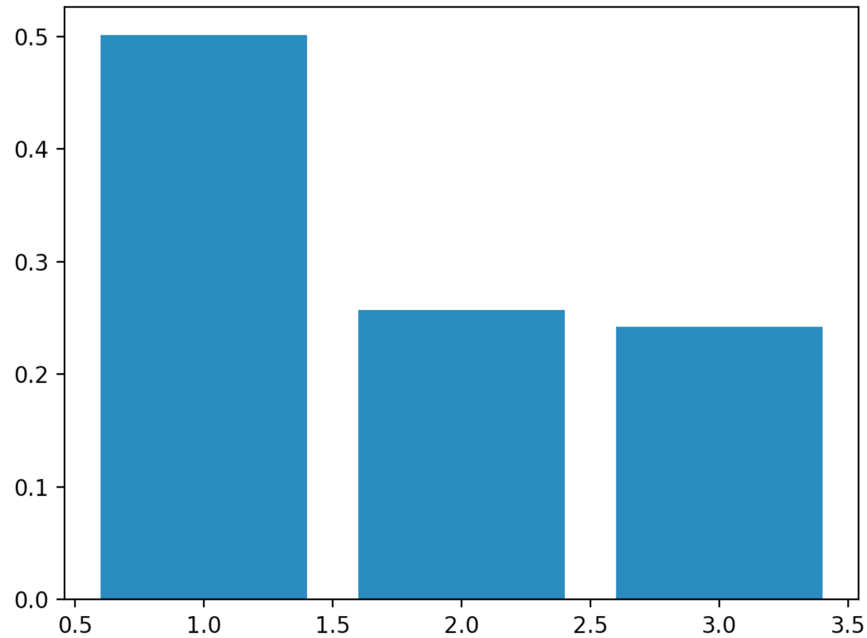
Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cette partie et pour qu'il affiche la valeur de la variable X_k, l'entier k étant entré au clavier par l'utilisateur.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X(k) :
    x= ......
    for i in range(k-1) :
        tirage = rd.randint(1,4)
        if x == 1 :
            x= ......
        else :
            if tirage != x :
                x = ....
    return x
```

(11) On ajoute les commandes suivantes. Expliquer précisément ce qu'elles font. On joint la figure obtenue après leur exécution. Que peut-on conjecturer ?

```
import matplotlib.pyplot as plt

n=50
freq_etats=np.zeros(3)
for k in range(1000):
freq_etats[simul_X(n)-1]+=1
freq_etats = freq_etats/1000
plt.bar([1,2,3], freq_etats)
plt.show()
```

Affichage Python



(12) On note U_k la matrice à 1 ligne et 3 colonnes dont l'élément de la $j-$ieme colonne est $P(X_k = j)$ (c'est à dire le $k-$ième état probabiliste de la chaîne (X_k)).

(a) Déterminer les probabilités $P_{[X_k=i]}(X_{k+1} = j)$, pour tout couple (i, j) de $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$.

(b) Représenter le graphe probabiliste à trois états associé à la chaîne de Markov (X_k).

(c) On admet que $\{[X_k = i] : \ i \in [\![1; 3]\!]\}$ est un système complet d'évènements.
Vérifier rigoureusement, grâce à la formule des probabilités totales, que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on a $U_{k+1} = U_k A$, où A est la matrice de la Partie 1.

(d) Déterminer l'état stable $\Pi \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ de la chaîne. Commenter.

(e) Montrer qu'en posant $U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $U_k = U_0 A^k$.

(f) Montrer que la loi de X_k est donnée, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, par

$$P(X_k = 1) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) \quad \text{et} \quad P(X_k = 2) = P(X_k = 3) = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right).$$

(g) Montrer que (X_k) converge en loi vers une variable aléatoire X dont on donnera la loi.

(h) Calculer l'espérance $E(X_k)$ de X_k.