Math ECG 2. 2023-2024

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Chapitre 16. Espaces Vectoriels de dimension finie

Avant-propos

Dans les chapitres précédents d'algèbre linéaire, nous avons travaillé avec l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ voire avec $\mathcal{M}_{n,1}$. On va voir avec ce chapitre qu'on peut étendre la notion d'espace vectoriel à des ensembles que l'on équipe de certaines opérations et qui ont alors une certaine structure algébrique permettant le calcul.
Tout comme dans $\mathbb{R}^n$, on peut alors introduire la notion de combinaisons linéaires d'éléments ce qui permet de définir celle de base d'un (sous-)espace vectoriel. Enfin, ceci permet alors de tout représenter, quelque soit la nature initiale des objets, comme un vecteur colonne de coordonnées et ramener tout à du calcul matriciel.

1 $\mathbb{R}-$Espaces Vectoriels de dimension finie

Définition

Soient E un ensemble non vide muni des deux opérations discutées ci-avant et $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit que E est un **espace vectoriel de dimension** n si il existe une bijection Φ de E dans $\mathbb{R}^n$ telle que pour tous éléments $u, v \in E$ et tous réels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\Phi(\alpha u + \beta v) = \alpha\Phi(u) + \beta\Phi(v).$$

Une telle bijection est dite *linéaire*.

Remarque

La définition précédente signifie que la bijection Φ préserve les combinaisons linéaires.

Naturellement, il n'y a pas unicité de la bijection (lorsqu'elle existe): il y en a une infinité; il suffit d'envoyer une *base* de E sur une *base* de $\mathbb{R}^n$.

☞ Les éléments d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E sont appelés **vecteurs** (de E). Les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés des **scalaires**.

À retenir!

L'antécédent de $0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, ..., 0)$ par Φ s'appelle le **vecteur nul** de E, il est noté 0_E (ou parfois 0 pour alléger les notation). Attention à bien faire la distinction entre celui-ci et le scalaire (le réel) 0.

Il ne dépend pas de la bijection choisie (c'est nécessairement l'*élément neutre* de la loi interne +).

Les propriétés de la bijection Φ et les règles de calculs dans $\mathbb{R}^n$ permettent d'établir celles dans E.

Règle(s) de calcul

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(u, v) \in E^2$.

(1) $0 \cdot u = 0_E$ et $\lambda 0_E = 0_E$

(2) $\lambda u = 0_E \iff (\lambda = 0 \text{ ou } u = 0_E)$

(3) $\lambda(-u) = (-\lambda)u = -\lambda u$

(4) $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$

2 Espaces vectoriels de référence

2.1 L'espace $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

À retenir!

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (muni de l'opération $+$ d'addition de matrices et de l'opération $\cdot$ de multiplication d'une matrice par un scalaire) est un espace vectoriel de dimension np.

Son vecteur nul est la matrice nulle.

On voit par exemple en effet facilement que l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{np} \\ (a_{i,j}) & \longmapsto & (a_{1,1}, a_{1,2}, ..., a_{1,p}, a_{2,1}, ..., a_{n,1}, ..., a_{n,p}) \end{array}$$

est bijective et qu'elle préserve bien les combinaisons linéaires.

Exemple

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension 4,
$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension 9.

2.2 L'espace $\mathbb{R}_n[x]$

On rappelle que $\mathbb{R}_n[x]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré **inférieur ou égal** à n.

Rappel

On note souvent, pour $k \in \mathbb{N}$, X^k la **fonction** polynomiale

$$X^k : x \in \mathbb{R} \mapsto x^k.$$

C'est donc une fonction, qu'on va considérer ici comme un vecteur.
Elle est aussi notée e_k dans certains sujets

$$e_k : t \in \mathbb{R} \mapsto t^k.$$

À retenir!

L'ensemble $\mathbb{R}_n[x]$ (muni de l'opération $+$ d'addition de polynômes et de l'opération $\cdot$ de multiplication d'un polynôme par un scalaire) est un espace vectoriel de dimension $n + 1$.

Son vecteur nul est le polynôme nul (fonction polynomiale constante égale à 0).

On voit par exemple en effet facilement que l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0 & \longmapsto & (a_0, a_1, ..., a_n) \end{array}$$

est bijective et qu'elle préserve bien les combinaisons linéaires.

Exemple

$\mathbb{R}_0[x]$, ensemble des fonctions constantes, est un espace vectoriel de dimension 1,
$\mathbb{R}_1[x]$ ensemble des fonctions affines, est un espace vectoriel de dimension 2,
$\mathbb{R}_2[x]$ est un espace vectoriel de dimension 3.

2.3 Autres exemples

☞ Le cours de première année établit que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire (du premier ou deuxième ordre) homogène est un espace vectoriel.

Exemple

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. On considère l'équation différentielle

$$(E_1) \qquad\qquad y' + ay = 0$$

L'ensemble des solutions de (E_1) (muni de l'addition de fonctions et de la multiplication d'une fonction par un scalaire) est alors un espace vectoriel de dimension 1.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ fixés tels que le discriminant du polynôme $x^2 + ax + b$ soit positif ou nul. On considère l'équation différentielle

$$(E_2) \qquad\qquad y'' + ay' + by = 0$$

L'ensemble des solutions de (E_2) est alors un espace vectoriel de dimension 2.

En effet, une solution (E_1) est de la forme $t \mapsto \lambda e^{-at}$, on construit de manière très naturelle une bijection linéaire entre l'ensemble des solutions et $\mathbb{R}$ en posant

$$\Phi : \left(t \mapsto \lambda e^{-at}\right) \longmapsto \lambda$$

Pour (E_2), supposons que le discriminant de l'équation caractéristique soit strictement positif avec deux racines α_1 et α_2; une solution est alors de la forme $t \mapsto \lambda e^{-\alpha_1 t} + \mu e^{-\alpha_2 t}$ et dans ce cas on peut construire Φ en posant

$$\Phi : \left(t \mapsto \lambda e^{-\alpha_1 t} + \mu e^{-\alpha_2 t}\right) \longmapsto (\lambda, \mu)$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier que les deux applications Φ ci-dessus sont linéaires et bijectives.

☞ On verra dans ce qui suit qu'on peut écrire l'ensemble des solutions avec la notion de *sous-espace engendré* et l'écriture Vect().

3 Combinaisons Linéaires de vecteurs

Définition

Soient $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs d'un même espace vectoriel E. On dit qu'un vecteur $v \in E$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $u_1, \dots, u_p$ lorsqu'on peut trouver des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que

$$v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p.$$

Exercice 1. Dans chaque cas, le vecteur w est-il combinaison des vecteurs u et v?

(1) Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$w = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Dans $\mathbb{R}_3[x]$, $w = X^2 + 1$, $u = X^3 - X$ et $v = 2X$.

À retenir!

☞ Plutôt que dire qu'un vecteur v est combinaison linéaire d'un seul vecteur u, on dira plutôt que u et v sont **colinéaires**.
☞ Le vecteur nul est colinéaire à n'importe quel vecteur (pour tout $u \in E$, $0_E = 0 \cdot u$).

☠ Attention, la notion de colinéarité n'a toujours aucun sens dès lors qu'on parle d'un nombre de vecteurs strictement supérieur à 2.

4 Familles de vecteurs

☞ Une **famille de n vecteurs** de E est un $n-$uplet $(u_1, u_2, ..., u_n)$ où chaque u_i est un vecteur de E. En permutant l'ordre des vecteurs d'une famille de vecteurs, on a donc une autre famille de vecteurs. Comme on le verra avec la notion de *base* ci-après, l'ordre des vecteurs dans une famille est important.

Définition

Soit $(u_1, u_2, ..., u_k)$ une famille de k vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de cette famille est noté

$$\mathrm{Vect}(u_1, u_2, ..., u_k) = \{v \in E \ : \ v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_k u_k, \ \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}\}.$$

☠ Vect(...) est donc un **ensemble**. Écrire donc qu'un vecteur est égal à Vect(...) n'a toujours aucun sens.
☞ Toutes les règles de simplification dans un Vect(...) restent valides.

Exemple

On peut voir que, dans $\mathbb{R}_1[x]$,

$$\mathrm{Vect}(X-1, X+1, 2X+2) = \mathrm{Vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[x].$$

4.1 Familles libres, familles génératrices, bases

Toutes les définitions ci-dessous, que l'on reproduit, sont les mêmes que précédemment.

Définition

Une famille $(u_1, u_2, ..., u_k)$ de vecteurs de E est dite **libre** si la seule *liaison* entre les vecteurs est celle dont tous les coefficients sont nuls. Plus précisément, $(u_1, u_2, ..., u_k)$ est libre si et seulement si

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_k u_k = 0_E) \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0.$$

☞ Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.
☞ Lorsqu'une famille est libre, on dit aussi que ses vecteurs sont **linéairement indépendants**.

À retenir!

☞ Si un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres, alors la famille est liée.

☞ Toute famille contenant le vecteur nul est liée.

☞ Une famille ne contenant qu'un seul vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.

☞ Si la famille ne contient que deux vecteurs (**et seulement dans ce cas**), la famille est libre si et seulement si les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

☠ Attention, ce n'est pas parce que des vecteurs sont deux à deux non colinéaires que la famille est libre. Par exemple, on voit facilement, dans $\mathbb{R}^2$, que la famille $((1,0);(0,1);(1,1))$ est liée.

Exercice 2.

(1) La famille $\left(1+X+X^2,\ 3+X+5X^2,\ 2+X+3X^2\right)$ est-elle libre ou liée dans $\mathbb{R}[x]$?

(2) La famille (J, J^2) est-elle libre ou liée dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, où $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Hors Programme mais...

Soit $(P_1, P_2, ..., P_k)$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$ à *degrés echelonnés*, c'est à dire telle que

$$\deg P_1 < \deg P_2 < ... < \deg P_k.$$

Alors, la famille est libre.

☞ Le système qui découle de l'équation de liaison est lui même échelonné, homogène et de Cramer. Sa résolution est immédiate. Mais naturellement, il faudra systématiquement rédiger toutes les étapes.

Remarque

Si $(u_1, u_2, ..., u_k)$ est une famille libre de E, considérant une bijection linéaire Φ entre E et $\mathbb{R}^n$, on peut voir que la famille $(\Phi(u_1), ..., \Phi(u_k))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$ impliquant en particulier une inégalité entre k et n:

$$[(u_1, ..., u_k) \text{ libre dans } E \text{ avec } \dim(E) = n] \Longrightarrow k \leq n.$$

À retenir!

Une famille qui a "trop" de vecteurs (un nombre strictement supérieur à la dimension de l'espace) ne peut donc pas être libre.

Définition

Soient E un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel (de dimension n) et $\mathcal{F} = (u_1, u_2, ..., u_k)$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathcal{F}$ est une **famille génératrice de** E si et seulement si

$$E = \text{Vect}(u_1, u_2, ..., u_k).$$

À retenir!

☞ Dire que la famille $\mathcal{F}$ est génératrice de E revient à dire que la famille $\mathcal{F}$ **engendre** l'espace vectoriel E. C'est à dire que **tout** vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille:

$$\forall v \in E,\ \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}, \quad v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i.$$

☞ Tout espace vectoriel admet **une infinité** de familles génératrices.

☞ Afin de déterminer si une famille $(u_1, ..., u_n)$ est génératrice de E, on prend un vecteur v **quelconque** de F et on essaie de trouver des coefficients $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n.$$

Si (et seulement si) le système correspondant est compatible, alors la famille est bien génératrice de E. Les coefficients obtenus ne sont en revanche pas nécessairement uniques.

Exercice 3.

(1) Montrer que la famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[x]$.

(2) Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(3) Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right)$ n'est pas génératrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Remarque

Considérant Φ une bijection de E sur $\mathbb{R}^n$. On montre facilement que $(u_1, u_2, ..., u_k)$ est une famille génératrice de E si et seulement si la famille $(\Phi(u_1), ..., \Phi(u_k))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$. Il suit donc que

$$[(u_1, ..., u_k) \text{ génératrice de } E \text{ avec } \dim(E) = n] \Longrightarrow k \geq n.$$

À retenir!

Une famille qui n'a "pas assez" de vecteurs (un nombre strictement inférieur à la dimension de l'espace) ne peut donc pas être génératrice de E.

Définition

Soit E un espace vectoriel de dimension n. La famille $(u_1, u_2, ..., u_n)$ de vecteurs de E forme une **base** de E si et seulement si tout vecteur de E se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs u_i:

$$\forall\, v \in E,\ \exists!\ (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i.$$

De manière équivalente, la famille forme une base de E si et seulement si elle est à la fois **libre et génératrice** de E.

On appelle alors le $n-$uplet $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ les **coordonnées** de v dans la base $(u_1, u_2, ..., u_n)$.

Exercice 4. Montrer que les familles $\mathcal{F}$ ci-dessous forment des bases des espaces vectoriels E précisés.

(1) $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$ dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

À retenir!

Pour chacun des espaces vectoriels usuels suivants, la famille de vecteurs notée ici $\mathcal{B}$ forme une base, appelée **base canonique** de l'espace.

(1) **Base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.** $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, ..., E_{1,n}, E_{2,1}, ..., E_{n,n})$, où

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad ..., \quad E_{n,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) **Base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.** $\mathcal{B} = \big(1, X, X^2, ..., X^n\big)$, aussi notée $(e_0, e_1, ..., e_n)$.

☞ Ces bases sont dites **canoniques** dans le sens où elles apparaissent comme des bases *naturelles* de l'espace vectoriel considéré: les coordonnées d'un vecteur dans la base canonique ne sont autres que les *composantes* (ou paramètres) de ce vecteur. Par exemple,

- Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = xE_{1,1} + yE_{1,2} + zE_{2,1} + tE_{2,2}$$

Propriété

Un espace vectoriel (de dimension n) admet une infinité de bases.
Toutes ces bases ont le même cardinal : elles sont toutes formées de n vecteurs.

Propriété

Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, ..., u_k)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n. Si $k = n$, alors

$$\mathcal{F} \text{ est une base de E} \iff \mathcal{F} \text{ est libre} \iff \mathcal{F} \text{ est génératrice de E.}$$

☞ Ce résultat est **très pratique**. Lorsque la dimension de l'espace est connue, on choisit en général de montrer seulement le caractère libre ou générateur pour montrer qu'une famille forme une base au lieu d'avoir à vérifier les deux!

Exercice 5.

(1) Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, où

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(2) Montrer que la famille $(1, X-1, X^2-1)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

Changement de base

Tout comme on a pu le voir dans les chapitres précédents, si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases d'un espace vectoriel E de dimension n, la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ est la matrice (inversible) dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimées dans $\mathcal{B}$.

Exercice 6. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

(1) $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

(2) $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}' = (-X^2 + 2X + 1, X + 1, X^2 + 2)$.

(3) $\mathcal{B} = (1, X-2, X^2 - 3X + 3)$ et $\mathcal{B}'$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

5 Sous-espaces vectoriels

Considérant une famille $(u_1, ..., u_k)$ de vecteurs de E, si celle-ci est libre, l'application

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & \mathrm{Vect}(u_1,...,u_k) & \longrightarrow & \mathbb{R}^k \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i & \longmapsto & (\lambda_1,...,\lambda_k) \end{array}$$

est clairement bijective et linéaire. Ainsi, $\mathrm{Vect}(u_1, ..., u_k)$ est un espace vectoriel de dimension k.

Si la famille n'est pas libre, l'application ci-dessus n'est plus bijective. Dans ce cas, on peut extraire une *sous-famille* $(u_{n_1}, ..., u_{n_p})$ (avec $n_p \leq k$) qui soit libre et telle que

$$F = \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_k) = \mathrm{Vect}(u_{n_1}, ..., u_{n_p})$$

de sorte qu'on peut ensuite construire une bijection linéaire Ψ entre F et $\mathbb{R}^{n_p}$. Ceci permet d'énoncer le résultat suivant.

Propriété

Soit $(u_1, u_2, ..., u_k)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E, de dimension n. Alors, l'ensemble

$$F = \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_k)$$

est un espace vectoriel. Comme c'est un sous-ensemble de E, on dit que c'est un sous-espace vectoriel de E; on l'appelle le **sous-espace vectoriel engendré** par la famille $(u_1, u_2, ..., u_k)$.

F admet une infinité de bases, qui ont toutes le même cardinal, qui correspond à la dimension de F. Cette dimension s'appelle aussi le **rang** de la famille $(u_1, ..., u_k)$: c'est le cardinal de toute famille libre qui engendre le même espace. C'est aussi la taille "optimale" d'une sous-famille libre qui reste génératrice.

À retenir!

☞ Une famille $(u_1, ..., u_k)$ libre est naturellement de rang k. Elle forme une base du sous-espace qu'elle engendre.

Exercice 7. Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ci-dessous

$$\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Définition

Un sous-ensemble F d'un espace vectoriel E est appelé **sous-espace vectoriel de** E, s'il peut s'écrire comme sous-espace vectoriel engendré par une certaine famille de vecteurs de E.

Une famille $(u_1, ..., u_k)$ de vecteurs de E est dite **génératrice de** F si on peut écrire

$$F = \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_k).$$

Une famille $(v_1, ..., v_p)$ de vecteurs de E est appelée **base de** F si elle est à la fois libre (dans E) et génératrice de F. Toutes les bases de F ont le même cardinal, ce nombre s'appelle la **dimension** de F.

Exercice 8. (Extrait de **ECRICOME 2009**) Montrer que l'ensemble E ci-dessous est un espace vectoriel, où

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \; : \; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

À retenir!

Lorsqu'on demande de trouver la dimension d'un sous-espace, il faut s'assurer d'abord que la famille génératrice exhibée est bien libre.

Propriété

Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors
$$\dim(F) \leq \dim(E).$$
De plus,
$$(F \subset E \text{ et } \dim(E) = \dim(F)) \Longrightarrow E = F$$

Exercice 9. Montrer que les sous-ensemble suivant sont bien des sous-espaces vectoriels, donner une base et préciser leur dimension.

(1) $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x - 2y + z = 0\right\}$.
(2) $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] : \ P(1) = P(0) = 0\}$.
(3) $H = \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \ {}^tM = M\right\}$.

Propriété

Soit E un espace vectoriel. Les sous-espaces vectoriels de E sont exactement les parties F de E telles que les trois conditions suivantes sont vérifiées
(i) F est **non vide**;
(ii) F est **stable par addition**: pour tous $u, v \in F$, $u + v \in F$;
(iii) F est **stable par multiplication par un scalaire**: pour tout $u \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u \in F$.

À retenir!

On peut donc montrer qu'une partie non vide F d'un espace vectoriel E est un (sous-) espace vectoriel en montrant qu'elle est **stable** par combinaison linéaire
$$\forall u, v \in F, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \qquad \lambda u + \mu v \in F.$$
☞ En trouvant un contre-exemple à cette stabilité, on montre donc que le sous-ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel.

Exercice 10. On considère une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ fixée.
L'ensemble $\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \ M^3 - 3M = 2I\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Une question de la session 2022

Les questions suivantes proviennent du sujet **ECRICOME** (Exercice 1, Partie 1, Questions 1 et 2).
Soit F le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ constitué des matrices M de la forme
$$M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$
où a, b sont des réels.
Soit G le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ constitué des matrices M vérifiant $M^2 = M$.

(1) F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, déterminer une base de F et sa dimension.
(2) G est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, déterminer une base de G et sa dimension.

6 Applications linéaires. Matrices.

Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels (de dimension finie).
On dit qu'une application $\varphi : E \to F$ est **linéaire** si

(i) Pour tous $u, v \in E$, $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$;
(ii) Pour tout $u \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)$.

Lorsque $E = F$ (et uniquement dans ce cas), on dit que φ est un **endomorphisme**.

Naturellement, toutes les autres définitions (noyau, image, rang) et propriétés restent les mêmes que dans le cas de $\mathbb{R}^n$.

Définition

La matrice de φ dans les bases $\mathcal{B}_E = (u_i)$ et $\mathcal{B}_F = (v_j)$ est la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ dont les colonnes sont constituées des coordonnées dans la base $\mathcal{B}_F$ des vecteurs $\varphi(e_i)$ (pour $1 \le i \le p$). Plus précisément,

$$A = \mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = (a_{i,j})_{1\le i\le n,\ 1\le j\le p}$$

où, pour tout $1 \le j \le p$,

$$\varphi(u_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} v_i.$$

Lorsque $E = F$, alors la matrice A est simplement notée $\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_E)$.

À retenir!

$$\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} \varphi(u_1) & & \varphi(u_p) \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{coordonnée selon } v_1 \\ \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } v_n \end{array} \end{array}$$

Exercice 11. Déterminer la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = {}^tM$.
☞ On aura remarqué que la matrice qui représente cette application linéaire agissant sur un espace de matrices de taille 2 est une matrice de taille ...4.

À retenir!

La représentation matricielle d'une application linéaire permet de ramener tout problème (linéaire) à un problème de calcul matriciel (qui peut faire intervenir la réduction de la matrice en question).
En revanche, une fois les calculs matriciels effectués, on reviendra toujours aux objets de départ.

Exercice 12. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[x]$ et on s'intéresse à l'application d définie sur E par $d(P) = P'$.

(1) Montrer que d est un endomorphisme de E.
(2) Déterminer la matrice de d, notée Δ, dans la base canonique de E.
(3) Déterminer le noyau et l'image de d.

7 Sélection d'exercices - Travaux dirigés

Exercice 13. Les familles suivantes sont-elles libres ou liées? Préciser leur rang.

(1) $\big(X^2;\ X^2+X+1\big)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
(2) $\big(X^2;\ X^2-X;\ X^2+X\big)$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
(3) $\big(X^2, X(X-2);\ (X-2)^2\big)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

(4) $\left(\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 0 & -3\end{pmatrix}\right)$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(5) $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3 & 6\\ 0 & -3\end{pmatrix}\right)$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 14. On considère les trois polynômes

$$P_0(X)=(X+1)(X-1),\quad P_1(X)=(X-2)(X+1),\quad \text{et}\quad P_2(X)=(X-1)(X-2).$$

(1) Montrer que la famille (P_0,P_1,P_2) est libre.
(2) En déduire que celle-ci forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Préciser alors les coordonnées de X dans cette base.

Exercice 15. Justifier que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels en déterminant une famille génératrice.

$$A=\left\{P=aX^2+(b-2a)X+a-b+c,\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\};\quad B=\{P\in\mathbb{R}_3[X]\mid P(0)=P(1)=0\}.$$

$$C=\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\ :\ \begin{cases}-x+2y=y+6z\\ y+3z=-2x\end{cases}\right\};\quad D=\left\{\begin{pmatrix}x+z & 2x-y & z\\ y-x & z+2y & x+z\\ 0 & 2x & x-z\end{pmatrix},\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}$$

Exercice 16. On considère le sous-ensemble H de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $H=\left\{M=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\ :\ a+d=0\right\}$.
Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Expliciter une base de H et préciser sa dimension.

Exercice 17. On introduit les fonctions (définies sur $\mathbb{R}$)

$$f_1:\ t\mapsto e^{-t},\qquad f_2:\ t\mapsto e^{-2t},\qquad g_1:\ t\mapsto te^{-t},\qquad g_2:\ t\mapsto te^{-2t}$$

et on considère les espaces vectoriels

$$E=\mathrm{Vect}(f_1,f_2,g_1,g_2),\quad F_1=\mathrm{Vect}(f_1,f_2),\quad F_2=\mathrm{Vect}(f_1,g_1),\quad \text{et}\quad F_3=\mathrm{Vect}(f_2,g_2).$$

(1) Montrer que la famille (f_1,f_2,g_1,g_2) est libre.
(2) Quelles sont alors les dimensions des quatre espaces vectoriels ci-dessous? De quelles équations différentielles linéaires sont-ils les ensembles de solutions?

Exercice 18. Soient a, b et c des réels. On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes:

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad J=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{F}=\left\{M=\begin{pmatrix}a & b & c\\ b & a+c & b\\ c & b & a\end{pmatrix}\ :\ a,b,c\in\mathbb{R}\right\}.$$

(1) Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel.
(2) Exprimer A^2 comme combinaison linéaire de I, A et J puis montrer que : $\mathcal{F}=\mathrm{Vect}\left(I,A,A^2\right)$.
(3) La famille $\left(I,A,A^2\right)$ est-elle libre ?

Exercice 19. Soient $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et $F=\{M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}):\ AM=MA\}$.

(1) Montrer que F est un espace vectoriel.
(2) Déterminer une base $\mathcal{B}$ de F ainsi que la dimension de F.
(3) (a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A^n\in F$.
 (b) Après avoir vérifié que la famille ci-dessous formait une base de F, déterminer les coordonnées de A^n dans celle-ci.

$$\left(I,\ \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right)$$

(4) Soit $G=\{M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}):\ {}^tAM=M{}^tA\}$.
 (a) Montrer que $M\in G\Leftrightarrow {}^tM\in F$.
 (b) En déduire une base de G ainsi que sa dimension.

Exercice 20. (*) Pour $0 \leq k \leq n$, on note $P_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$. Le but de l'exercice est de démontrer que la famille $(P_0, ..., P_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

(1) Quel est le terme de plus bas degré de P_k ?
(2) On suppose que la famille $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est liée.
  (a) Justifier qu'il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ tel que
$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i(X) = 0.$$
  (b) Justifier que l'ensemble $A = \{k \in [\![0; n]\!] : \ \lambda_k \neq 0\}$ défini ci-dessous est non vide,
  (c) On pose alors $k_0 = \min\{k \in A\}$. Quel est le terme de degré k_0 dans $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i(X)$?
  (d) Conclure.

Exercice 21. (**DM n°2**, Automne 2022)
On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dites *antisymétriques*, c'est à dire que
$$\mathcal{A}_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \ {}^tM = -M\},$$
où ${}^tM$ désigne la transposée de M. On rappelle à ce propos que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors
$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB, \qquad \text{et} \qquad {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA.$$

(1) Montrer que $\mathcal{A}_n$ est un espace vectoriel.
(2) Monter que, pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et toute matrice $M \in \mathcal{A}_n$, on a ${}^tBMB \in \mathcal{A}_n$.
(3) Dans le cas $n = 3$, déterminer une base, puis la dimension, de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
(4) Soit $M \in \mathcal{A}_3$. Montrer qu'il existe un réel α à préciser, qui dépend des coordonnées de M dans la base explicitée ci-avant, tel que $M^3 = \alpha M$. En déduire, par l'absurde, que M n'est pas inversible.

Exercice 22. On note (J_1, J_2, J_3, J_4) la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit f l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par
$$f : \ M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \longmapsto M + (a+d)I_2.$$

(1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(2) Déterminer la matrice A de f dans la base (J_1, J_2, J_3, J_4).
(3) (a) Montrer que $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I_2)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
  (b) Déterminer la matrice D de f dans cette base.
(4) Montrer que f est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 23. (D'après **EDHEC 2017**) On note $E = \mathbb{R}_2[x]$ et on rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E, les fonctions e_0, e_1 e_2 étant définies par :
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e_0(t) = 1 \quad e_1(t) = t \quad e_2(t) = t^2.$$
On considère l'application φ qui, à toute fonction P de E, associe la fonction, notée $\varphi(P)$, définie par:
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (\varphi(P))(x) = \int_0^1 P(x+t)\, dt$$

(1) (a) Montrer que φ est linéaire.
  (b) Déterminer $(\varphi(e_0))(x)$, $(\varphi(e_1))(x)$ et $(\varphi(e_2))(x)$ en fonction de x, puis écrire $\varphi(e_0)$, $\varphi(e_1)$ et $\varphi(e_2)$ comme combinaison linéaire de e_0, e_1 et e_2.
  (c) Déduire des questions précédentes que φ est un endomorphisme de E.

(2) (a) Écrire la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2).
  (b) Justifier que φ est un automorphisme de E.

(3) (a) Montrer qu'il existe une suite (u_n) dont on exhibera la premier terme et la relation de récurrence telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
  (b) En déduire, par sommation, l'expression de u_n pour tout entier n puis écrire A^n sous forme de tableau matriciel.

Exercice 24.

(1) (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\varphi : P(X) \mapsto (1-X^2)P''(X) - 3XP'(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
(b) Calculer $\varphi(1)$. L'endomorphisme φ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?

(2) Dans cette question, on prend $n = 3$.
(a) Donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
(b) Déterminer une base de $\operatorname{Im}(\varphi)$ et une base de $\operatorname{Ker}(\varphi)$.

Exercice 25. (**DS n°3B**, Automne 2022). On considère les fonctions e_1, e_2, e_3 et e_4 définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$e_1(x) = x, \quad e_2(x) = x^2, \quad e_3(x) = x\ln(x) \quad \text{et} \quad e_4(x) = x^2\ln(x)$$

et on note E l'espace vectoriel engendré par e_1, e_2, e_3 et e_4

$$E = \operatorname{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4).$$

Ainsi, E est un espace vectoriel dont les vecteurs sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$, son vecteur nul 0_E est la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

(1) Le but de cette question est de montrer que la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre. Pour cela, on considère quatre réels a, b, c et d tels que

$$ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 = 0_E,$$

c'est à dire que, **pour tout** $x \in \mathbb{R}$,

$$ax + bx^2 + cx\ln(x) + dx^2\ln(x) = 0 \qquad (\star)$$

(a) Avec un choix judicieux de x dans la relation $(\star)$, montrer que $a + b = 0$.
(b) Établir que, pour tout $x > 1$,

$$\frac{a}{x\ln(x)} + \frac{b}{\ln(x)} + \frac{c}{x} + d = 0.$$

En déduire que $d = 0$.
(c) Utiliser le même type de raisonnement pour montrer que $b = 0$.
(d) Montrer finalement que $a = b = c = d = 0$.

(2) Expliciter une base et préciser la dimension de E.

(3) On note u l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $g = u(f)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g(x) = u(f)(x) = xf'(x).$$

(a) Montrer que u est une application linéaire.
(b) Déterminer $u(e_1), u(e_2), u(e_3)$ et $u(e_4)$.
(c) En déduire que u est un endomorphisme de E.

(4) (a) Donner la matrice A de u dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4).
(b) Montrer que u est un automorphisme de E.
(c) Montrer que

$$\dim(\operatorname{Ker}(A - I)) = \dim(\operatorname{Ker}(A - 2I)) = 1.$$

(5) En écrivant $A = D + N$ où D est une matrice diagonale et N une matrice telle que $N^2 = 0$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 26. (Base de matrices diagonalisables). Le but de cet exercice est de construire une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ composée uniquement de matrices diagonalisables.
On note la base canonique $\mathcal{B} = (E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$$

et on pose

$$M_{i,j} = \begin{cases} D + E_{i,j}, & \text{si } i \neq j \\ E_{i,i}, & \text{si } i = j \end{cases}$$

(1) Que peut-on dire de $M_{i,j}$ si $i = j$?
(2) Justifier que chaque matrice $M_{i,j}$ est diagonalisable.
(3) On cherche à montrer que la famille $\mathcal{B}' = (M_{i,j} :\ (i,j) \in [\![1;n]\!]^2)$ forme une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
  (a) Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que
  $$B = A - \sum_{i\neq j} a_{i,j} M_{i,j}$$
  est une matrice diagonale.
  (b) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une famille génératrice.
  (c) Conclure.

(4) Comment pourrait-on trouver d'autres telles bases ?

Exercice 27. (D'après **HEC 2007**)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Δ_n l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$ associe le polynôme

$$\Delta_n(P) = P(X+1) - P(X).$$

On pose

$$P_0 = 1, \quad P_1 = X, \quad P_2 = \frac{1}{2}X(X-1) \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![3,n]\!], \quad P_k = \frac{1}{k!}X(X-1)\dots(X-k+1).$$

On rappelle le résultat suivant

Rappel

Tout polynôme admettant une infinité de racines est identiquement nul.

(1) Justifier que Δ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

(2) (a) Montrer que $(P_0,\dots,P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
  (b) Vérifier que :
  $$\Delta_n(P_0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1,n]\!], \quad \Delta_n(P_k) = P_{k-1}.$$
  (c) En déduire que $\operatorname{Im}(\Delta_n) = \mathbb{R}_{n-1}[x]$ puis préciser $\operatorname{rg}(\Delta_n)$.
  (d) En déduire que $\operatorname{Ker}(\Delta_n)$ est l'ensemble $\mathbb{R}_0[x]$ des polynômes constants.
  (e) L'application Δ_n est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$?

(3) Dans le cas particulier où $n = 3$, écrire la matrice M de Δ_3 relativement à la base (P_0, P_1, P_2, P_3).