



Chapitre 4. Comparaisons de suites et de fonctions au voisinage d'un point. Développements limités.

1 Avant-propos

On ne revient pas dans ce chapitre sur les étapes classiques de l'étude d'une fonction (domaine de définition, continuité, dérivabilité, variations, convexité...) qu'il est naturellement nécessaire de bien maîtriser et pour lesquelles on renvoie aux chapitres du cours de première année.

Le but de ce chapitre est d'introduire des notations permettant de "comparer" c'est à dire d'étudier le *comportement* d'une fonction au **voisinage** d'un point (ou de l'infini) en regard d'une fonction considérée plus simple ou "classique" et bien connue, comme par exemple une fonction affine ou polynomiale.

Les comparaisons qui nous intéressent dans ce chapitre sont **locales** et ne servent donc, comme on le pourra le rappeler tout au long de ce chapitre, en aucun cas à obtenir des inégalités.

Dans toute la suite (pour alléger les énoncés et la lecture), le point a considéré (au *voisinage* duquel on va effectuer la comparaison) pourra être un nombre réel ou bien l'infini.

On note $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

On rappelle que la terminologie *au voisinage de* a signifie que l'on considère un intervalle (ouvert) contenant a , c'est à dire que lorsqu'on écrit x voisin (ou dans un voisinage) de a , signifie qu'il existe un intervalle de la forme $]a - \delta; a + \delta[$ contenant x et dans lequel a lieu l'égalité (par exemple le développement limité).

2 Comparaison de fonctions

2.1 Fonctions négligeables

Définition

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f et g deux fonctions définies au voisinage de a avec g ne s'annulant pas au voisinage de a . On dit que f est **négligeable devant g au voisinage de a** , ce que l'on note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

☞ Cette définition est équivalente au fait qu'il existe un intervalle ouvert J contenant a et une fonction ε définie sur J tels que

$$\begin{cases} \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \\ \forall x \in J, & f(x) = g(x)\varepsilon(x) \end{cases}$$

Notation

On écrit aussi parfois

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow a.$$

Exemple. On peut alors écrire les relations suivantes

$$(i) \quad x^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x), \quad (ii) \quad e^x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{2x}), \quad (iii) \quad \frac{1}{x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$$

À retenir!

☠ Il faut bien comprendre et garder à l'esprit que la négligeabilité en un point n'entraîne nullement la négligeabilité ailleurs. Il suffit de regarder l'exemple (i) ci-dessus

$$x^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x), \quad \text{mais} \quad x^2 \underset{x \rightarrow 2}{\neq} o(x) \quad \text{et} \quad x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\neq} o(x)$$

☠ On comprend l'importance de ne pas simplement écrire $f(x) = o(g(x))$ sans préciser le voisinage concerné!

Exercice 1. Déterminer d'éventuelles relations de négligeabilité entre les quantités $f(x)$ et $g(x)$ en a lorsque

- (1) $f(x) = x^3$, $g(x) = 1/(x-2)$ en $a = +\infty$;
- (2) $f(x) = x^3$, $g(x) = 1/(x-2)$ en $a = 2$;
- (3) $f(x) = x^3$, $g(x) = 1/(x-2)$ en $a = 1$;
- (4) $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = 1$ en $a = +\infty$.

À retenir!

Dire que la fonction f admet une limite ℓ en a peut se réécrire

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \ell + o(1).$$

Proposition 1. (Relations immédiates) Soient $0 < \alpha < \beta$ des paramètres fixés. Alors

(1)

$$x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\beta), \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^\beta} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right);$$

(2)

$$e^{\alpha x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{\beta x}), \quad \text{et} \quad e^{\beta x} \underset{x \rightarrow -\infty}{=} o(e^{\alpha x});$$

(3)

$$x^\beta \underset{x \rightarrow 0^+}{=} o(x^\alpha), \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^\alpha} \underset{x \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right).$$

Proposition 2. (Croissances comparées). Soient $\alpha, \beta > 0$ deux paramètres fixés. Alors,

(1)

$$(\ln(x))^\beta \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\alpha), \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^\alpha} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{(\ln(x))^\beta}\right);$$

(2)

$$x^\alpha \underset{x \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{(\ln(x))^\beta}\right), \quad \text{et} \quad (\ln(x))^\beta \underset{x \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right);$$

(3)

$$x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{\beta x}), \quad \text{et} \quad e^{-\beta x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right).$$

Exercice 2. Comparer, au voisinage de $+\infty$, les quantités $f(x) = 3^x$, $g(x) = \sqrt{x}$ et $h(x) = \ln(x)^{1/4}$.

Exercice 3. (Substitution). Comparer, au voisinage de 0, les quantités $\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $\frac{1}{x^2}$.

Règle(s) de calcul

Soient f, g, h trois fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

(1) **Multiplication par une constante.** Si $\beta \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(\beta g(x))$.

(2) **Linéarité.** Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$ et $g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$, alors, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x)).$$

(3) **Transitivité.** Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ et $g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$ alors, $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$.

(4) **Multiplication par une fonction.** Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$, alors $f(x)g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)h(x))$.

À retenir!

☞ Le (1) de la proposition ci-dessus permet de voir qu'on peut "ignorer" les constantes dans un petit- o .

Par exemple, on écrira jamais $o(2x)$ ou $o(-x)$ mais $o(x)$.

☞ Le (4) de cette même proposition permet de voir qu'on peut "rentrer" les fonctions dans un petit- o ou bien "simplifier".

Par exemple,

$$x \cdot o(x^2) = o(x^3), \quad \frac{o(x^2)}{x^2} = o(1).$$

☞ Le (3) peut aussi s'écrire comme (au voisinage d'un même point) $o(o(f(x))) = o(f(x))$.

☞ On garde en tête que $o(\dots)$ est une notation qui peut désigner des quantités différentes.

Par exemple, il faut faire très attention à bien écrire (et on y réfléchira)

$$o(x) - o(x) = o(x).$$

Exercice 4. On considère, au voisinage de 0, deux quantités $f(x)$ et $g(x)$ vérifiant

$$f(x) = x^2 + o(x^2), \quad g(x) = -x^2 + x^3 + o(x^3).$$

(1) Que dire de $f(x) + g(x)$?

(2) Écrire le plus simplement possible $g(x) - 2xf(x)$ et $f\left(\frac{x}{2}\right) - g(x)$.

2.2 Fonctions équivalentes

Définition

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f et g deux fonctions définies au voisinage de a . On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a (g peut s'annuler en a).

On dit que f est **équivalente à g au voisinage de a** et on note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Exemple. Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = x - \ln(x)$. Alors, on peut écrire

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x, \quad \text{mais aussi} \quad f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x).$$

À retenir!

☠ Une fonction (non nulle) au voisinage de a n'est jamais équivalente à 0 au voisinage de a ! ☠

☠ Écrire qu'une quantité est équivalente à zéro n'a aucun sens ! ☠

À retenir!

☞ En revanche, pour $\ell \in \mathbb{R}^*$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ell.$$

Proposition 3. Tout polynôme est équivalent à son monôme de plus haut degré en $\pm\infty$.
Tout polynôme est équivalent à son monôme de plus bas degré en 0.

☞ Par exemple,

$$2x^7 - 18x^3 + 91 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2x^7, \quad \text{ou encore} \quad -12x^3 + 2x^2 + 5x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 5x.$$

À retenir!

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux quantités définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(x) + o(g(x)).$$

☞ La réciproque indique notamment qu'on peut négliger les termes négligeables dans une somme.
Ainsi :

$$f(x) + o(f(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x).$$

Exercice 5. Montrer que : $\frac{e^x}{2} - x^3 - \ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$.

☞ Dire que deux quantités sont équivalentes au voisinage de a ne veut pas dire que leur différence tend vers 0 en a , mais seulement qu'elles ont la même limite en a .

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \implies \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Mais,

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \not\implies \lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = 0.$$

Par exemple,

$$e^x + x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x + x^2 \quad \text{mais} \quad x - x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\not\sim} 0.$$

À retenir!

Un équivalent est plus précis qu'une limite : il précise la **vitesse de convergence** vers cette limite.

Règle(s) de calcul

. Soient f, g, h, k quatre fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

(1) **Multiplication, Quotient, Puissance.** On peut multiplier, diviser et élever à la puissance des équivalents:

(i)

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x), \quad g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} k(x) \implies f(x)g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)k(x).$$

(ii)

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x), \quad g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} k(x) \implies \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{h(x)}{k(x)}.$$

(iii)


$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x), \quad k \in \mathbb{N} \implies f(x)^k \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)^k.$$

(2) **Transitivité.** Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$ alors, $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$.

(3) **Symétrie.**

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \iff g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x).$$

À retenir!

 Si l'on peut multiplier, diviser ou élever à la puissance, **on ne peut pas additionner** des équivalents. Ce qu'on peut voir avec mille et uns contre-exemples, comme

$$f(x) = e^x + \ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x, \quad g(x) = -e^x + x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -e^x, \quad f(x) + g(x) = x^2 + \ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2.$$

 La symétrie (3) est naturellement faux pour les petits- o .

Exercice 6.

(1) Déterminer un équivalent de $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x^4 + 4x^2}$ en $+\infty$ puis en 0^+ .

(2) Déterminer un équivalent de $g(x) = \ln(x)(2x^2 + e^{-x})^2$ en $+\infty$.

Exercice 7. Utiliser des équivalents pour déterminer les limites suivantes.

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x^3 - \ln(x); \quad (ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - \ln(x)}{\sqrt{e^x + x^3}}; \quad (iii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + x^3)}{\ln(x)}.$$

Proposition 4. Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction dérivable en a telle que $f'(a) \neq 0$. Alors

$$f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f'(a)(x - a).$$

La proposition précédente permet d'obtenir les équivalents classiques suivants.

À connaître sur le bout des doigts

Équivalents classiques au voisinage de 0.

$$e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x \quad (\alpha \neq 0).$$

☞ La relation $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$ donne avec $\alpha = \frac{1}{2}$ l'équivalent très utile $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$.

À retenir!

☠ Revenant aux règles de calcul de la Proposition ??, on ne peut pas **composer** les équivalents. Par exemple, on fera attention au fait que

$$x+1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x, \quad e^{x+1} \not\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x.$$

En effet,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1}}{e^x} = e \neq 1.$$

On a cependant un résultat, énoncé ci-dessous, qui permet de ramener un équivalent en un point quelconque (y compris l'infini) en un équivalent en 0.

Proposition 5. Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et f, g, h trois fonctions telles que

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x), \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow b} h(x) = a.$$

Alors,

$$f(h(x)) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(h(x)).$$

☞ Par exemple, comme $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, que $x-1 \rightarrow 0$, lorsque $x \rightarrow 1$ et que $1/x \rightarrow 0$, lorsque $x \rightarrow +\infty$, on peut obtenir les équivalents usuels et utiles suivants:

$$\ln(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x-1, \quad \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Exercice 8. Montrer que : $t^{\frac{1}{i}} - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t}$.

Exercice 9. Déterminer très rigoureusement des équivalents en $+\infty$, $-\infty$ et en 0 de $\ln(x^2 + 1)$.

3 Développements Limités

3.1 Définition

Définition

On dit que f admet un **développement limité (DL) d'ordre 1 au voisinage de** $x_0 \in \mathbb{R}$ s'il existe deux réels $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tels que, au voisinage de x_0 ,

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0).$$

En particulier, On dit que f **admet un développement limité (DL) d'ordre 1 au voisinage de** 0 s'il existe $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ tels que, au voisinage de 0,

$$f(x) = a_0 + a_1x + o(x).$$

☞ Une fonction admettant un DL à l'ordre 1 en x_0 est *localement assimilable* à une fonction affine.


Définition


On dit que f admet un développement limité (DL) d'ordre 2 au voisinage de x_0 s'il existe $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tels que, au voisinage de x_0 ,

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

En particulier, On dit que f admet un développement limité (DL) d'ordre 2 au voisinage de 0 s'il existe $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tels que, au voisinage de 0,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2).$$

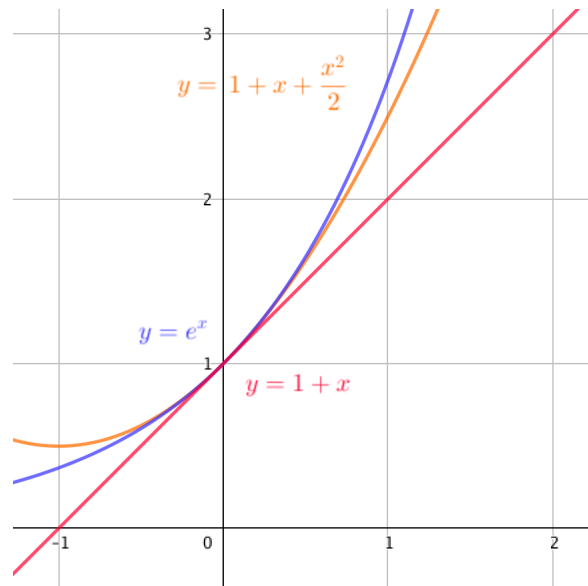
 Les égalités définissant les DL ne sont, naturellement, valables que localement (au voisinage de x_0).

 De manière analogue à la remarque ci-dessus, une fonction admettant un DL à l'ordre 2 en x_0 est *localement assimilable* à un polynôme du second degré.

 On appelle parfois *partie régulière* de f la partie polynomiale du développement limité de f lorsque celle-ci en admet un.

Illustration

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les parties régulières des DL d'ordres 1 et 2 de la fonction exponentielle en zéro, illustrant la remarque précédente sur l'approximation locale (ici en 0).



Théorème 1. Si f admet un développement limité au voisinage de x_0 alors ce développement limité est unique.

Théorème 2. (Formule de Taylor-Young)

(i) Soit f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Alors f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de x_0 donné par :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

(ii) Soit f est une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un intervalle I et $x_0 \in I$.

Alors f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de x_0 donné par :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

À retenir!

Le théorème de Taylor-Young permet notamment de voir que si une fonction f est de classe \mathcal{C}^1 au voisinage d'un point a , la partie principale du DL à l'ordre 1 est donnée par l'équation de la **tangente** à la courbe en a .

À connaître sur le bout des doigts

On utilise le plus souvent **Taylor-Young** dans le cas particulier où $x_0 = 0$ ce qui donne respectivement:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x) \quad \text{et} \quad f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2).$$

Exercice 10. En utilisant la formule de Taylor-Young, déterminer un réel α non nul tel que :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2 + x^2 \epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0.$$

Exercice 11. Montrer que la fonction f définie ci-dessous est de classe \mathcal{C}^2 au voisinage de 0 et y préciser son développement limité à l'ordre 2, où

$$f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt.$$

3.2 Développements limités des fonctions usuelles**À connaître sur le bout des doigts**

DL usuels au voisinage de 0. On a, **au voisinage de 0**,

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + o(x^2) \\ \ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + o(x^2) \quad (\alpha \in \mathbb{R}^*). \end{aligned}$$

Exercice 12. Dédurre du résultat précédent les DL à l'ordre 2 en 0 de $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$ et $\sqrt{1-x}$.

Question type de sujet de concours

Montrer que la fonction f ci-dessous est (continue, dérivable et) de classe \mathcal{C}^1 en 0, où

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

À retenir!

☞ Les opérations d'addition et de composition qui sont interdites pour les équivalents sont possibles avec les développements limités. Par exemple, on a

$$\begin{aligned}\ln(1+x) - \ln(1-x) &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \left(-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &= 2x + o(x^2)\end{aligned}$$

Ou encore

$$\begin{aligned}e^{\frac{x^2}{2}} &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{(x^2/2)^2}{2} + o\left(\left(\frac{x^2}{2}\right)^2\right) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2).\end{aligned}$$

Exercice 13. Déterminer les DL à l'ordre 2 en 0 de

$$(i) \frac{\ln(1+x)}{x}, \quad (ii) e^x \ln(1+x), \quad (iii) \ln(1 + \ln(1+x)).$$

À retenir!

☞ Lorsqu'un calcul d'équivalent ou de limite n'aboutit pas, il faut penser à utiliser des développements limités.

Exercice 14.

- (1) Déterminer l'équivalent au voisinage de 0 de la fonction $f(x) = \ln(1+x) - x$.
- (2) Déterminer la limite en 0 de la fonction

$$g(x) = \frac{e^x - xe^x - 1}{2x^2}.$$

3.3 Application : Position d'une courbe par rapport à une tangente

Proposition 6. Soit f une fonction définie en 0 et admettant un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0:

$$f(x) = a + bx + cx^2 + o(x^2).$$

Alors :

- (i) $a = f(0)$;
- (ii) f est dérivable en 0 et $b = f'(0)$;
- (iii) L'équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0 est : $y = a + bx$.
- (iv) Si $c \neq 0$, comme $f(x) - (a + bx) = cx^2 + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} cx^2$, la position (locale) de la courbe par rapport à la tangente est donnée par le signe cx^2 donc par le signe de c .

Exercice 15. Soit f la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par $f(x) = e^{-x}\sqrt{1+x}$.

- (1) Calculer le développement limité d'ordre 2 en 0 de f .
- (2) En déduire l'équation de la tangente en 0 ainsi que la position de la courbe par rapport à la tangente.

Hors Programme mais...

Seuls les définitions, formules et résultats sur les développements limités jusqu'à l'ordre 2 sont au programme en ECG math. appli.

Néanmoins, en introduisant dans l'énoncé la définition et le résultat, certains sujets s'autorisent à faire manipuler les développements limités à des ordres supérieurs (parfois nécessaires pour lever les indéterminations dans les limites).

C'est le cas par exemple du sujet **EDHEC 2018**. Afin d'anticiper toute déconvenue, on donne la formule de Taylor-Young à un ordre quelconque, en 0, naturellement **non exigible**.

Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^n au voisinage de 0 (où $n \in \mathbb{N}$), alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n),$$

où $f^{(k)}(0)$ désigne la dérivée k -ième de f , évaluée en 0.

☞ On constate (sans surprise) par exemple que la partie régulière du développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction exponentielle (qui en admet bien un - elle est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}) n'est rien d'autre que la somme partielle de rang n de la série exponentielle

$$e^x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

On trouve dans certaines annales des propositions cachées de démonstration de la formule de Taylor-Young. En fait, il est proposé de démontrer la *formule de Taylor avec reste intégral*. Ceci se fait par récurrence.

Exercice 16. Soient f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0; 1[$ et $x \in]0; 1[$. Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt,$$

où $f^{(0)} = f$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}$ désigne la dérivée k -ième de f .
(On pourra s'aider d'une intégration par parties.)

3.4 Avec Python

On peut par exemple *estimer* les écarts entre une fonction et la partie régulière de son développement limité. On propose ci-dessous un exemple avec la fonction exponentielle.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def factorielle(n):
    s=1
    for k in range(2, n+1):
        s*=k
    return s

def exp_taylor(x, n):
    y=1
    for k in range(1, n+1):
        y+=x**k/factorielle(k)
    return y
```

```

x=input('x=?')
N=input('N=?')
error=np.zeros(N-1)

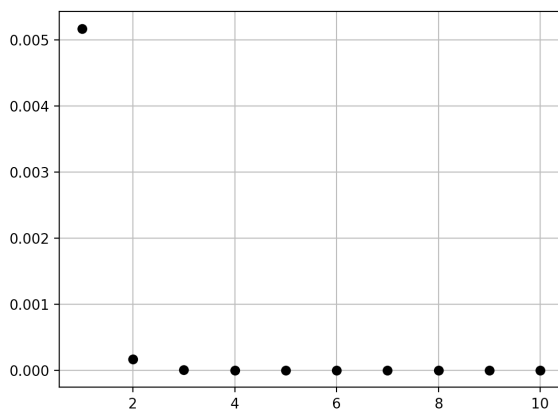
for i in range(1,N):
    e_approx = exp_taylor(x,i)
    e_exp = np.exp(x)
    error[i-1] = np.abs(e_approx - e_exp)

plt.grid()
plt.plot(list(range(1, N)), error, 'ko')
plt.show()
plt.close()

```

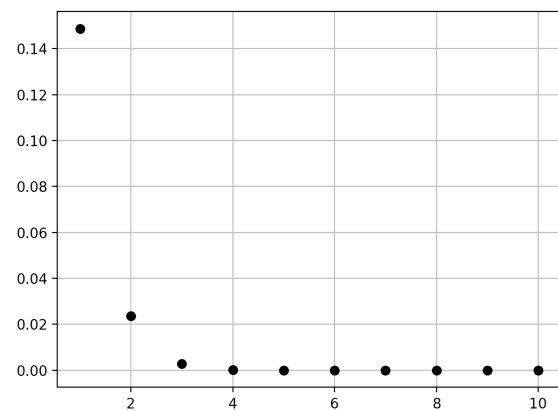
Affichage Python

x=0.1
N=11



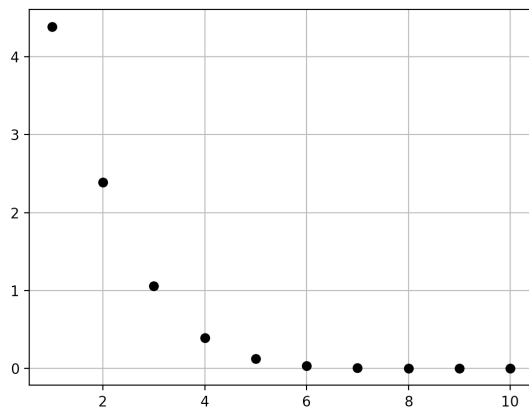
Affichage Python

x=0.5
N=11



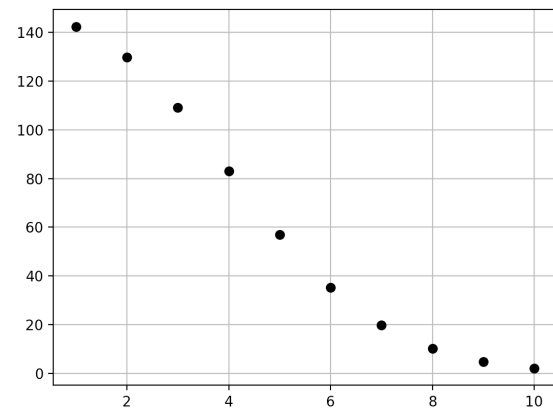
Affichage Python

x=2
N=11



Affichage Python

x=2
N=11



On observe que pour des valeurs x loin de 0, l'erreur (surtout pour un ordre faible) est grande!

Hors Programme mais...

La commande `series` de la bibliothèque `sympy` permet d'obtenir le développement limité (par défaut à l'ordre 5 et en 0) d'une fonction. C'est naturellement non exigible mais cela peut servir à vérifier ses calculs à la maison!

Par exemple, on peut obtenir (on pourra d'ailleurs le faire "à la main" de deux façons différentes)

$$\sqrt{1 + \ln(1+x)} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{3}{8}x^2 + \frac{17}{48}x^3 + o(x^3).$$

Ce qu'on "vérifie" avec Python:

```
from sympy import series
x = symbols('x') # la variable x peut être utilisée pour des calculs.
print(series(sqrt(1+log(1+x)), x))
```

Affichage Python

```
>>>
1 + x/2 - 3*x**2/8 + 17*x**3/48 - 143*x**4/384 +
1609*x**5/3840 + O(x**6)
```

4 Comparaison de suites

☞ Naturellement, on ne peut comparer deux suites que pour n tendant vers $+\infty$.

Définition

(Suite négligeable devant une autre suite) Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) (en $+\infty$), et on note $u_n = o(v_n)$ si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

À retenir!

☞ La notation du petit- o permet notamment de préciser le comportement **asymptotique** d'une suite via des développements de plus en plus précis. *Par exemple*, considérons la suite (u_n) définie par

$$u_n = n^2 - \ln(n) + e - \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

On peut alors écrire (pour $n \rightarrow +\infty$)

$$\begin{aligned} u_n &= n^2 + o(n^2) \\ &= n^2 - \ln(n) + o(\ln(n)) \\ &= n^2 - \ln(n) + e + o(1) \\ &= n^2 - \ln(n) + e - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Définition

(Suites équivalentes) Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) (en $+\infty$), et on note $u_n \sim v_n$ si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

À connaître sur le bout des doigts

Caractérisation de l'équivalence par les petits- o :

$$u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n) \quad (n \rightarrow +\infty)$$

☞ La réciproque indique qu'on peut négliger les termes négligeables dans une somme. Ainsi

$$u_n + o(u_n) \sim u_n.$$

Théorème 3. (Équivalents et limites) Si les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes, alors elles sont de même nature, c'est-à-dire

- Si $u_n \sim v_n$ et si (v_n) converge vers ℓ , alors (u_n) converge également vers ℓ .
- Si $u_n \sim v_n$ et si (v_n) diverge vers $\pm\infty$, alors (u_n) diverge également vers $\pm\infty$.

☞ Les règles de calculs sur les équivalents vus sur les fonctions s'appliquent aux suites.

☠ On ne peut toujours pas ni sommer ni composer les équivalents en général. De plus, deux suites ayant même limite ne sont pas forcément équivalentes.

Proposition 7. (Utilisation des équivalents) Soient $u = (u_n)_{n \geq 0}$ une suite **de limite nulle**. Alors :

- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
- $\ln(1 + u_n) \sim u_n$
- $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ pour $\alpha \neq 0$

Exercice 17.

- (1) Déterminer un équivalent, pour $n \rightarrow +\infty$, de $\ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$.
- (2) Déterminer un équivalent, pour $n \rightarrow +\infty$, de $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1$.
- (3) (a) Que serait tenté.e de proposer un.e étudiant.e n'ayant pas bien écouté ni lu ce qui précède comme équivalent pour

$$u_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 + \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)?$$

Serait-ce correct?

- (b) Déterminer, à l'aide de DL usuels à l'ordre 2 en 0, un équivalent à la suite u_n .

À retenir!

☞ Le **théorème des gendarmes** peut permettre d'obtenir un équivalent.

Si une suite est encadrée par deux autres suites toutes deux équivalentes, alors toutes les quantités sont équivalentes.

Question type de sujet de concours

On considère la suite (S_n) définie, pour $n \geq 1$, par $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

(1) Montrer que, pour tout $k \geq 2$, on a

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}$$

(2) Obtenir alors l'encadrement suivant, pour tout $n \geq 1$

$$\ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln(n)$$

(3) En déduire alors que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n), \quad n \rightarrow +\infty.$$

(4) Donner alors la nature de la série $\sum(1/k)$. De quelle réciproque cette série est LE contre-exemple à avoir en tête toute au long de l'année sa vie ?

On peut aussi montrer (ce que font plusieurs sujets, mais il reste un peu de travail) qu'en fait, il existe une constante γ telle que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Une question d'une annale récente

La question ci-dessous provient du sujet **ECRICOME 2022** (Exercice 2, Partie 1, Question 3).

Montrer que

$$\exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right) - x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x \ln(x).$$

5 Planche d'exercices - Travaux Dirigés

Exercice 18. Calculer les limites des fonctions suivantes aux points indiqués.

- | | |
|---|---|
| (1) $\frac{\ln x + x - 1}{x + e^{-x}}$ en 0^+ et en $+\infty$. | (11) $x^{\frac{1}{x}}$ en 0^+ et en $+\infty$. |
| (2) $\ln(e^{-x} + x^{-2})$ en $+\infty$. | (12) $\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}$ en 0. |
| (3) $\frac{(1 - e^x)^2}{x \ln(1+x)}$ en 0 | (13) $x e^{-x^2}$ en $+\infty$. |
| (4) $\frac{x e^x + 1}{e^x + 1}$ en $+\infty$, et en $-\infty$. | (14) $\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ en 0. |
| (5) $x^2 e^{-\sqrt{x}}$ en $+\infty$. | (15) $(1+x)^{1/x}$ en 0. |
| (6) $e^x - x e^{1/x}$ en 0^+ et en 0^- . | (16) $\frac{\ln(1+x) - x}{2x^2}$ en 0. |
| (7) $\frac{x \ln x + \ln x}{\sqrt{x+1}}$ en 0^+ et en $+\infty$. | (17) $\frac{\ln(1+x^3)}{\ln(x)}$ en 0 et en $+\infty$. |
| (8) $\ln(1 + \sqrt{x}) - x^2$ en $+\infty$. | (18) $(x+1) \ln(\sqrt{x})$ en 0^+ . |
| (9) $\frac{1}{e^{-x} - 1} - \frac{1}{x}$ en 0. | (19) $\frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{2x}$ en 0. |
| (10) $x^\alpha \ln(x+1) - x^\alpha \ln(x)$, ($\alpha \in \mathbb{R}$) en $+\infty$. | |

Exercice 19. À l'aide d'équivalences, obtenir les limites des quantités suivantes

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{2x} - 1)}{x - \ln(x) + 2}, \quad (ii) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+2) - \ln(n)}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}, \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x + x^2}.$$

Exercice 20. Trouver une relation, et la justifier, de *négligeabilité*, en $+\infty$, entre les quantités

$$\frac{1}{\sqrt{x}e^x}, \quad \text{et} \quad e^{-2x} \left(1 - e^{-x^2/2}\right)^5.$$

Exercice 21. (Extrait DS n°1, 2020-2021)

(1) Obtenir le développement limité à l'ordre 2 en 0 de

$$(i) \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad (ii) \sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x}.$$

(2) En déduire la valeur de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)}{\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x} - 2}.$$

Exercice 22.

(1) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a : $e^{-x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a

$$\frac{(\ln(1+x))^n}{1+x^2} = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

(3) En anticipant sur les résultats du Chapitre *Intégrales impropres*, conjecturer sur la nature de certaines intégrales.

Exercice 23. Soit $f : x \mapsto \ln(e^x - e^{-x}) - x$.

(1) Déterminer l'ensemble de définition de f .

(2) Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition puis calculer sa dérivée.

(3) Dresser le tableau de variations de f , limites comprises.

(4) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 24. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} x \ln(x^2) - 2x, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(1) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .

(2) Montrer que f est impaire.

(3) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}^* et calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$.

(4) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

(5) Dresser le tableau de variations de f , limites comprises puis tracer une allure de sa courbe représentative.

Exercice 25. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(1) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .

(2) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

(3) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}^* et calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$.

(4) Montrer que pour tout réel x , on a : $e^{-x} \geq 1 - x$.

(5) Dresser le tableau de variations de f , limites comprises puis tracer une allure de sa courbe représentative.

Exercice 26. Soit f la fonction définie sur $[-1; +\infty[\setminus \{0\}$ par

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}.$$

- (1) Déterminer le développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 puis en déduire le développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage de 0.
- (2) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
- (3) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

Exercice 27.

- (1) Déterminer un équivalent puis la limite de : $u_n = \sqrt{n+1} [\ln(n+1) - \ln(n)]$.
- (2) Déterminer la limite de : $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
- (3) Déterminer un équivalent de : $w_n = n \ln \left(1 - \frac{2}{n}\right) + 2$.

Exercice 28. (Loi binomiale et loi de Poisson).

On considère une suite (X_n) de variables aléatoires telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{n}\right)$.

- (1) Rappeler $X_n(\Omega)$ ainsi que $P(X_n = k)$ pour tout $k \in X_n(\Omega)$.
- (2) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé,

$$\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

- (3) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = e^{-1} \frac{1}{k!}.$$

- (4) Interpréter.

Exercice 29. Déterminer un équivalent d'une suite (u_n) vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(n) + \frac{1}{2^n} \leq u_n \leq \ln(n) + \frac{1}{n}.$$

Exercice 30. (D'après **ESCP 2014**, voie T). On considère la suite (u_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_0 = 1, \quad \text{et, pour } n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^1 (\ln(1+t))^n dt.$$

- (1) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq u_n \leq (\ln(2))^n.$$

- (b) En déduire la limite de la suite (u_n) .

- (2) (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2(\ln(2))^{n+1} - (n+1)u_n.$$

- (b) En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)u_n \leq 2(\ln(2))^{n+1}$.

- (c) Montrer que (u_n) est décroissante.

- (d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)u_n \geq 2(\ln(2))^{n+1}$.

- (e) Conclure que

$$u_n \sim \frac{2(\ln(2))^{n+1}}{n}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Exercice 31. (Extrait **DS1, 2018-2019**, Question de cours)

- (1) Montrer que la fonction f définie ci après se prolonge par continuité sur $] -1; +\infty[$, puis déterminer son développement limité à l'ordre 2 en 0, où

$$\forall x \in] -1; +\infty[\setminus \{0\}, \quad f(x) = \frac{1 - e^{x^2}}{\ln(1+x)}.$$

En déduire la dérivabilité en 0, l'équation de la tangente en ce point et la position relative de celle-ci par rapport à la courbe de f .

- (2) Montrer, à l'aide de développements limités usuels en 0, que

$$\sqrt{1 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 + \frac{1}{2n} - \frac{3}{8n^2}.$$

Exercice 32. (Extrait DS1, 2018-2019, Exercice 1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par

$$f_n(x) = \frac{1}{e^x + 1} + nx.$$

- (1) Justifier que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
- (2) Déterminer un équivalent de $f_n(x)$ en $+\infty$, puis un équivalent en $-\infty$. En déduire les limites de $f_n(x)$ aux extrémités de son ensemble de définition ainsi que l'existence de deux asymptotes à la courbe représentative de f_n , dont on précisera les équations.
- (3) Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion A_n et préciser l'équation de la tangente en ce point.
- (4) Quel est le développement limité à l'ordre 2 de $f_n(x)$ au point d'inflexion?

On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 pour toute fonction f de classe \mathcal{C}^3 au voisinage de 0

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3).$$

- (5) Expliciter les développements limités en 0 à l'ordre 3 de e^x et de $\frac{1}{1+x}$.
- (6) En constatant que

$$\frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{e^x - 1}{2}\right)},$$

et en utilisant les deux développements limités précédents, obtenir le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f_n(x)$.

- (7) Représenter graphiquement sur un même graphique orthonormé la courbe représentative de f_1 , sa tangente au point d'inflexion et ses asymptotes.
- (8) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution, notée u_n .
- (9) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $-\frac{1}{n} < u_n < 0$. En déduire la limite de (u_n) .
- (10) En revenant à la définition de u_n , montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$.

Exercice 33. (Extrait de DS n°1, 2020-2021) On définit les fonctions ch et sh par

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

- (1) Exprimer la dérivées des fonctions ch et sh en fonction de ch et sh.
Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) > 0$.
Calculer $\operatorname{sh}(0)$ et déterminer le signe de $\operatorname{sh}(x)$.
- (2) Soit u_0 un réel fixé strictement supérieur à 1. Déduire de la question précédente qu'il existe un unique réel $\alpha \geq 0$ tel que $\operatorname{ch}(\alpha) = u_0$.

(3) On considère le programme Python suivant

```
import numpy as np

u0=3/2

def ch(x):
    return (np.exp(x)+np.exp(-x))/2

a=0
b=2
c=(a+b)/2
while b-a > 10**(-3):
    if (ch(a)-u0)*(ch(c)-u0) < 0:
        b=c
    else:
        a=c
        c=(a+b)/2
print(c)
```

- (a) Que fait ce programme? Comment s'appelle ce type de programme?
 (b) Pourquoi a-t-on pris $b = 2$?

On considère la suite (u_n) de premier terme u_0 et définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n + 1}{2}}.$$

- (4) (a) Vérifier que (u_n) est bien définie.
 (b) Étudier les variations de $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{2}}$.
 (c) Résoudre

$$\sqrt{\frac{1+x}{2}} = x, \quad \sqrt{\frac{1+x}{2}} > x.$$

- (d) En déduire le sens de variations de (u_n) .
 (e) Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite.

(5) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2 \left(\operatorname{ch} \left(\frac{x}{2} \right) \right)^2 - 1 = \operatorname{ch}(x).$$

(6) En déduire, par récurrence, que pour tout entier n

$$u_n = \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha}{2^n} \right).$$

(7) Montrer que

$$\operatorname{ch}(x) - 1 = 2 \left(\operatorname{sh} \left(\frac{x}{2} \right) \right)^2.$$

(8) Calculer $\operatorname{sh}'(0)$.

(9) En déduire les équivalences suivantes

$$\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

(10) En déduire un équivalent de $(u_n - 1)$ quand n tend vers $+\infty$.