Math ECG 2. 2023-2024

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Chapitre 8. Intégration généralisée

1 *Previously in* Intégration

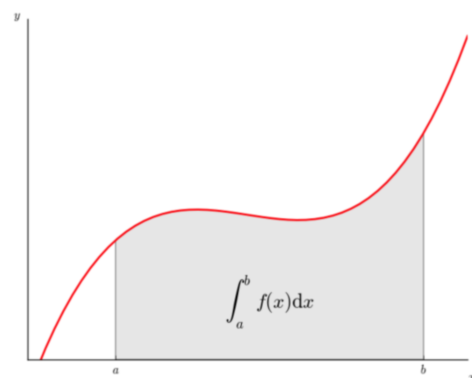
Depuis le cours de première année, on sait définir l'intégrale d'une fonction f sur un intervalle $[a;b]$ **fermé** lorsque celle-ci y est **continue**.

Résultat du cours de première année

L'intégrale d'une fonction f (positive) entre a et b, notée

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t,$$

est l'aire de la surface délimitée par les droites $x = a$, $x = b$, l'axe des abscisses et la courbe d'équation $y = f(x)$.



Si la fonction f n'est pas positive partout, on peut découper f en somme et différences de fonctions positives et définir l'intégrale entre a et b comme la combinaison correspondante des aires des surfaces correspondantes. On peut aussi étendre la définition de l'intégrale à une fonction f continue par morceaux (c'est à dire avec un nombre fini de points de discontinuité).

On rappelle le résultat fondamental ci-dessous, sans qui rien de tout ce qui va suivre ne serait possible.

À retenir!

Théorème fondamental de l'analyse.

Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors, pour tout $a \in I$, la fonction F définie sur I par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

est **la** primitive de f qui s'annule en a. En particulier, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $F'(x) = f(x)$.

☞ Le résultat précédent garantit l'existence de primitives pour toute fonction continue et donne une manière de calculer une intégrale. En effet, si on dispose d'une primitive G d'une fonction g, on peut alors calculer

$$\int_a^b g(t)\mathrm{d}t = G(b) - G(a).$$

Exercice 1. Calculer, en primitivant *à vue*, les intégrales suivantes

$$(i)\ \int_0^1 \sqrt{t}\mathrm{d}t, \qquad (ii)\ \int_1^2 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x, \qquad (iii)\ \int_0^{\ln(2)} te^{t^2}\mathrm{d}t, \qquad \int_1^x \frac{\mathrm{d}s}{s}.$$

Résultat du cours de première année

Transformation d'intégrales.

☞ En travaillant avec la formule de dérivation d'un produit de fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, on obtient la formule d'**intégration par parties** (IPP)

$$\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t.$$

☞ En travaillant avec la formule de dérivation d'une composée, on obtient la formule de **changement de variable**. Si u est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(u(t))u'(t)\mathrm{d}t = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\mathrm{d}u.$$

Exercice 2. Calculer, avec un changement de variable, les intégrales

$$(i)\ \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2t+1}, \quad (ii)\ \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t, \quad (iii)\ \int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x, \quad (iv)\ \int_1^x \frac{\ln(t)^n}{t}\mathrm{d}t.$$

Une question de la session 2022

On pouvait trouver, dans le sujet **ESSEC II**, la question suivante (Question 12 - (a)) :

À l'aide de plusieurs intégrations par parties successives, montrer que

$$\int_0^1 u^3(1-u)^3\mathrm{d}u = \frac{1}{20}\int_0^1 u^6\mathrm{d}u = \frac{1}{140}.$$

On ne peut hélas pas reprendre l'intégralité (sans mauvais jeu de mot) du cours de première année à ce propos. On encourage néanmoins la (re)lecture du polycopié de cours correspondant, disponible ici.

L'objectif de ce chapitre est de définir, lorsque cela est possible l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ ou même $]-\infty, +\infty[$.

2 Extension de la notion d'intégrale

Définition

Soit f une fonction continue sur l'intervalle semi-ouvert $[a\,;\,+\infty[$.

(1) On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est **convergente** lorsque la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$, et dans ce cas, on pose

$$\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

(2) Sinon, on dit que l'intégrale **diverge**.

(3) On définit de la même façon lorsque f est continue sur $]-\infty; a]$,

$$\int_{-\infty}^a f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)\mathrm{d}t.$$

☞ Étudier la nature d'une intégrale signifie déterminer si l'intégrale est convergente ou non. Dans tous les cas, l'intégrale est dite **impropre** en $+\infty$.

Exercice 3. Déterminer la nature des intégrales suivantes

$$(i)\ \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t, \qquad (ii)\ \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}, \qquad (iii)\ \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}.$$

Remarque

Naturellement, on définit de même la convergence d'une intégrale impropre en $-\infty$:

$$\int_{-\infty}^b f(t)\mathrm{d}t \text{ converge } \iff \lim_{x\to-\infty} \int_x^b f(t)\mathrm{d}t \text{ est finie..}$$

Définition

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On dit que l'intégrale (doublement impropre)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$

est convergente si et seulement si, pour tout réel c, les **deux** intégrales impropres

$$\int_c^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \qquad \textbf{et} \qquad \int_{-\infty}^c f(t)\mathrm{d}t$$

sont convergentes séparément. Auquel cas,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_c^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^c f(t)\mathrm{d}t$$

Exercice 4. Soit $f:\ t \mapsto t^3$.

(1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\int_{-x}^x f(t)\mathrm{d}t$.

(2) Contre quoi a-t-on voulu mettre en garde un.e étudiant.e peu concentré.e ?

Exercice 5. Montrer la convergence et calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|+1}\mathrm{d}t$.

Exercice 6. (***) On considère la fonction f, affine par morceaux, nulle sur $\mathbb{R}_-$, définie et **continue** sur $\mathbb{R}$ comme suit : pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $f\left(n+\dfrac{1}{2}\right) = 1$;
- sur $[n, n+1]$, f est nulle en dehors de $\left[n+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n^2}; n+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n^2}\right]$.

(1) (a) Dessiner l'allure de la courbe de f.
(b) Justifier que $f(x)$ n'admet pas de limite lorsque $x \to +\infty$.

(2) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$ puis $\displaystyle\int_0^n f(t)\mathrm{d}t$. En déduire la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

(3) À quelle propriété tentante vient-on de construire un contre-exemple?

Remarque

Les notions d'intégrales convergentes (redéfinies ci-dessus) peuvent naturellement être étendus aux fonctions continues par morceaux et notamment aux fonctions présentant un **nombre fini de points de discontinuité.**

Exercice 7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

Justifier la convergence et calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Propriété

Les propriétés sur les intégrales impropres (linéarité, positivité, croissance) découlent de celles sur les intégrales définies sur un segment par restriction de l'intervalle et passage à la limite. Attention, toutes les inégalités sont **larges**.

Hors Programme mais...

On peut aussi s'intéresser à d'autres types d'intégrales impropres, comme celle sur un intervalle semi-ouvert sur type $]a, b]$ ou $[a; b[$ (ou même $]a, b[$) où a serait une valeur interdite de f.

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ converge } \iff \lim_{\varepsilon \to a} \int_\varepsilon^b f(t)\mathrm{d}t \text{ est finie .}$$

Exercice 8. Montrer la convergence et calculer l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$.

Exercice 9.

(1) Montrer que la fonction $g : x \mapsto x\ln(x) - x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée $g'(x)$.

(2) Montrer la convergence et calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$.

☞ Tous les résultats de ce cours à propos d'intégrales impropres sur des intervalles semi-ouverts infinis s'**adaptent** aux intégrales impropres sur des intervalles semi-ouverts bornés (sans difficulté).

3 Techniques de calcul

3.1 Intégration par parties ou changement de variables

À retenir!

☞ **IPP ou un changement de variable sur des intégrales impropres**.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;+\infty[$ (ou $]-\infty,b]$ ou même $\mathbb{R}$) dont l'intégrale impropre sur le même intervalle converge.

Pour **calculer** cette intégrale impropre en intégrant par partie ou par changement de variable, on suit les étapes suivantes.

(1) On **restreint l'intervalle d'intégration** à $[a\,;\,x]$ avec $x \geq a$.
(2) On effectue une intégration par parties ou un changement de variable classique sur l'intégrale définie
$$\int_a^x f(t)\mathrm{t}.$$
(3) On passe à la limite quand x vers $+\infty$.

☠ ☠ ☠ On ne fera donc **jamais** d'IPP directement sur un intervalle du type $[a;+\infty[$ ou $]-\infty;+\infty[$.

Exercice 10. Justifier la convergence et calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\mathrm{d}t$.

Question type de sujet de concours

Pour $n \in \mathbb{N}$, on s'intéresse aux intégrales impropres
$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t.$$

(1) Justifier que I_0 converge et donner sa valeur.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que
$$\int_0^A t^{n+1}e^{-t}\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^A t^n e^{-t}\mathrm{d}t - A^{n+1}e^{-A}.$$

(3) En déduire, à l'aide d'une récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est une intégrale convergente et que $I_{n+1} = (n+1)I_n$.

(4) Obtenir alors une formule pour I_n, que l'on démontrera par une autre récurrence.

Exercice 11. À l'aide du changement $u = \sqrt{t}$, montrer la convergence et calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$.

Exercice 12.

(1) En remarquant que $\dfrac{1}{t^2-1} = \dfrac{1}{2(t-1)} - \dfrac{1}{2(t+1)}$, calculer, pour $b > a > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$.

(2) À l'aide du changement de variables $t = \sqrt{x^2+1}$, montrer la convergence et calculer l'intégrale
$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}.$$

3.2 Utilisation de la parité

Propriété

Soit f une fonction continue $\mathbb{R}$.

(1) Si la fonction f est **paire**, alors

$$\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t \text{ converge } \iff \int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t \text{ converge}$$

Dans ce cas (**et uniquement dans ce cas**)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t.$$

(2) Si la fonction f est **impaire**,

$$\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t \text{ converge } \iff \int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t \text{ converge}$$

Dans ce cas (**et uniquement dans ce cas**)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 13. Soit f la fonction sur $\mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{2t}{e^t + e^{-t}}$.

(1) Montrer que f est impaire.

(2) Montrer que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t$ converge.

(3) Montrer que

$$f(t) \sim 2te^{-t}, \quad t \to +\infty.$$

(4) Déduire des questions précédentes (en anticipant un peu sur ce qui arrive) que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 0$.

4 Critères de convergence

4.1 Intégrales de Riemann

Les intégrales de Riemann sont des **intégrales de référence** que l'on peut utiliser comme du cours.

À connaître sur le bout des doigts

Convergence des intégrales de Riemann. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1.$$

Remarque

On peut remplacer la borne de gauche par n'importe quel réel $a > 0$:

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1.$$

4.2 Critère de comparaison par inégalité (pour des fonctions positives)

Dans les trois prochains résultats on considère une fonction f continue sur $[a; +\infty[$. Naturellement, ces résultats s'adaptent à des fonctions continues et positives sur $]-\infty; b]$.

Propriété

Critère de comparaison.

Soient f et g deux fonctions continues et **positives** sur $[a;+\infty[$ telles que

$$\forall t \geq a, \qquad 0 \leq f(t) \leq g(t).$$

Alors,

(1) $$\int_a^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t \text{ converge} \implies \int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \text{ converge;}$$

(2) $$\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \text{ diverge} \implies \int_a^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t \text{ diverge.}$$

Exercice 14. Déterminer la nature des intégrales

$$(i) \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+t+1}\mathrm{d}t, \quad (ii) \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+\ln(1+t)}.$$

4.3 Critère de comparaison par négligeabilité (pour des fonctions positives)

Propriété

Critère de comparaison par négligeabilité.

Soient f et g deux fonctions continues et **positives** sur $[a;+\infty[$ telles que

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(g(t)).$$

(1) Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

(2) Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ diverge.

À connaître sur le bout des doigts

Test de Riemann.

Si f est positive et $t^2 f(t) \longrightarrow 0$, $t \to +\infty$, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 15. Montrer la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$. **On admet que** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

4.4 Critère de comparaison par équivalence (pour des fonctions positives)

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues et **positives** sur $[a;+\infty[$ telles que

$$f(t) \underset{b}{\sim} g(t), \quad t \to +\infty.$$

Alors, les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ ont la même nature.

Exercice 16. Déterminer, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-\sqrt{t}}{(1+t)^\alpha}\mathrm{d}t$.

4.5 Fonctions de signe quelconque

Définition

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a; +\infty[$. On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est **absolument convergente** si l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t$ est convergente.

Propriété

Si l'intégrale de f sur $[a; +\infty[$ converge absolument, alors elle est convergente

$$\int_a^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t \text{ converge} \implies \int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

☠ **La réciproque est fausse!** (L'intégrale peut être convergente sans être absolument convergente.)

5 Sélection d'exercices - Travaux dirigés

Exercice 701. Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes ainsi que leur valeur en cas de convergence.

$$(i)\ \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}, \qquad (ii)\ \int_{1}^{+\infty} \frac{t\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}, \qquad (iii)\ \int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}\mathrm{d}x,$$

$$(iv)\ \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\mathrm{d}x, \qquad (v)\ \int_{2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{3^t}, \quad (vi)\ \int_{0}^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x.$$

Exercice 702. Déterminer la nature des intégrales suivantes

$$(i)\ \int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3+3t^2+1}}, \qquad (ii)\ \int_{1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x, \qquad (iii)\ \int_{2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3\ln(t)},$$

$$(iv)\ \int_{0}^{+\infty} u^k e^{-u^2}\mathrm{d}u \quad (k \in \mathbb{N}), \qquad (v)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\ln(1+t^2)+1}, \qquad (vi)\ \int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x.$$

$$(vii)\ \int_{1}^{+\infty} \frac{e^{1/x}-1}{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}\mathrm{d}x.$$

Exercice 703. (D'après **EML 2017**) On considère la fonction $f :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = e^x - e\ln(x).$$

(1) L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge-t-elle?

(2) Montrer que, pour tout $x \geq 2$, $2\ln(x) \leq \dfrac{e^x}{3}$. En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}$.

Exercice 704. On considère la fonction R, définie sur $\mathbb{R}_+$ par $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

(1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $R(x)$ est bien une intégrale convergente. Que vaut la limite de $R(x)$ lorsque $x \to +\infty$?

(2) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$R(x) \sim \frac{e^{-x^2}}{x}, \quad x \to +\infty.$$

Exercice 705. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$, la fonction f_n par

$$f_n(x) = x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est convergente, où $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$.

(2) On **admet** que $I_0 = \sqrt{\pi/2}$. Calculer I_1.

(3) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+2} = (n+1)I_n.$$

(4) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!}, \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = 2^n n!$$

Exercice 706. (Extrait de **DM n°5**, Automne 2020). On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x.$$

(1) Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.
(2) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale I_n est convergente.
(3) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = (n+1)I_n$$

(4) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = n!.$$

Exercice 707. (Extrait de **DM n°8**, Printemps 2022) On pose

$$H(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2(1+t)}\mathrm{d}t.$$

(1) Déterminer le domaine de définition de H, c'est à dire l'ensemble des réels x pour lesquels l'intégrale ci-dessus est convergente.
(2) Justifier que $H(x) \to 0$, lorsque $x \to +\infty$.
(3) Justifier que H est $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition et que

$$H'(x) = -\frac{e^{-x^2}}{2(1+x)}.$$

En déduire les variations de H.

(4) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} H(x)\mathrm{d}x$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} H(x)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4} - H(0).$$

(5) On définit une suite (x_n) en posant $x_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = H(x_n)$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est bien définie et que $x_n > 0$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $H(\alpha) = \alpha$.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x_n - \alpha|.$$

   (d) En déduire la convergence de (x_n).

Problème de synthèse

Cet exercice a été posé lors du **DS n°2**, *à l'Automne 2020.*

On rappelle, pour cet exercice, qu'est admise, dans le cours la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$$

dont on sait en revanche démontrer la convergence.

Partie A : Un équivalent par télescopage

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}, \qquad \text{et} \qquad v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right).$$

(1) On **admet** la formule de Taylor à l'ordre 3 énoncé comme suit. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0, alors

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2}t^2 + \frac{f'''(0)}{3!}t^3 + o(t^3), \qquad t \to 0.$$

Justifier que la formule s'applique et exprimer le développement limité de $\ln(1+t)$ à l'ordre 3 en 0.

(2) Montrer soigneusement que, pour $n \to +\infty$, on a

$$v_n \sim \frac{1}{12n^2}.$$

(3) En déduire la convergence de la série $\sum v_n$ puis l'existence d'une constante $\kappa > 0$ telle que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}e^{-n}n^n}{\kappa}.$$

Partie B : Une première suite d'intégrales

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t.$$

(4) Montrer que la suite (I_n) est bien définie et décroissante.
(5) Montrer que, pour tout $u \in [0;1]$

$$0 \leq 1 - u \leq e^{-u}.$$

(6) Montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$, et préciser, à l'aide du rappel au début de cet exercice et d'un changement de variable affine, sa valeur C.

(7) En déduire, à l'aide du changement de variables $x = \sqrt{n}\cdot t$ que

$$0 \leq I_n \leq \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

(8) Que peut-on conclure quant à la limite de (I_n) ?

(9) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout $n \geq 1$,

$$I_n = 2n(I_{n-1} - I_n)$$

puis que

$$I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1}.$$

(10) En déduire, par récurrence, que
$$I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

(11) Compléter alors la fonction ci-dessous pour qu'elle permette de calculer et de renvoyer la valeur de I_n.

```
import numpy as np

def I(n) :
    i=1
    for k in ........... :
        i = ..............
    return i
```

(12) En écrivant
$$I_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)(2n)!},$$
et à l'aide de l'équivalent obtenu à la question (3), montrer qu'il existe une constante α (qui dépend de κ) telle que
$$I_n \sim \frac{\alpha}{\sqrt{n}}.$$

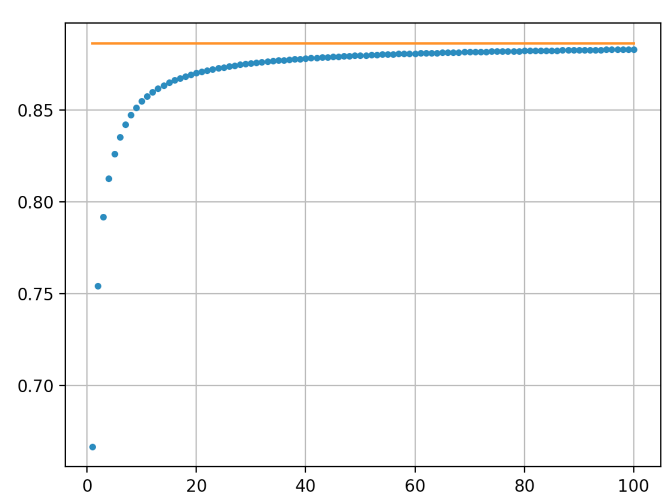
(13) Quelle est la nature de la série $\sum I_n$?

(14) On rajoute les instructions Python à la suite de la fonction écrite précédemment, et on obtient la figure ci-contre. Émettre une conjecture quant à la valeur de α puis pour celle de κ.

```
import matplotlib.pyplot as plt

N=[k for k in range(1, 101)]
eq=[I(k)*np.sqrt(k) for k in N]
plt.grid()
plt.plot(N, eq, '.')
M=[np.sqrt(np.pi)/2 for k in N]
plt.plot(N, M)
plt.show()
```

Affichage Python



Partie C : Détermination des constantes κ et α

On introduit maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$, la suite

$$J_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \mathrm{d}x$$

(15) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale J_n est bien définie et préciser la valeur de J_0.

(16) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$J_{n+1} = (n+1)J_n.$$

(17) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n! = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \mathrm{d}x.$$

(18) Montrer soigneusement, à l'aide du changement de variable $x = n + y\sqrt{n}$, que

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} \mathrm{d}y.$$

(19) On note $g_n(y) = \left(1 + \dfrac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}}$.

(a) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} g_n(y).$$

(b) En **admettant** que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} g_n(y) \mathrm{d}y,$$

déterminer la valeur de κ. En déduire celle de α.