Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Chapitre 1. Préliminaires

Ce premier (long) chapitre établit des points de vocabulaire, des notations, certains types de raisonnements et des règles de calculs basiques dont nous aurons besoin tout au long de l'année.

Les éléments qui le composent ont, parfois et selon les options suivies par les un.e.s et les autres, déjà été introduits dans le cursus de lycée. Néanmoins, il est capital de s'en assurer une maîtrise totale et rigoureuse afin de pouvoir progresser dans le programme.

De plus, si ce formalisme peut paraître factice (voire rébarbatif) pour des yeux de néophyte, il n'en demeure pas moins nécessaire dès lors que les objets deviennent davantage abstraits et les raisonnements plus longs et élaborés.

1 Notations

Certaines notations sont utilisées en permanence. Afin de lever tout doute qui pourrait subsister, nous les rappelons rapidement. Le langage mathématique ne doit laisser aucune place à l'ambiguïté.

1.1 Ensembles

Définition

Notations ensemblistes.

Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles (ou parties) de E et x un élément de E. On note:

- $x \in A$ pour signifier que l'élément x appartient à A;
- $x \notin A$ pour signifier que l'élément x n'appartient pas à A;
- $A \subset B$ pour signifier que A est inclus (contenu) dans B (tout élément de A est donc aussi élément de B);
- $A \not\subset B$ pour signifier que A n'est pas inclus dans B;
- $A \subsetneq B$ pour signifier que A est inclus strictement dans B;
- $B \setminus A$ l'ensemble des éléments de B qui ne sont pas dans A;
- $A \cap B$ l'**intersection** de A et B: il s'agit de l'ensemble composé des éléments communs à A et B;
- $A \cup B$ la **réunion** de A et B: il s'agit de l'ensemble composé des éléments qui sont dans A, dans B ou dans les deux;
- $\emptyset$ l'ensemble vide (constitué d'aucun élément).

Lorsque l'intersection de deux ensemble est vide (*i.e.* lorsque $A \cap B = \emptyset$), on dit que les ensembles A et B sont **disjoints**.

☞ On reviendra avec plus de détails sur les ensembles (et le dénombrement) dans un chapitre futur.

Rappelons également les ensembles de nombres (qui permettent de les classer), déjà rencontrés au lycée.

Définition

Ensembles de nombres.

- $\mathbb{N}$: ensemble des **entiers naturels**.
$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; ...\}$$
- $\mathbb{Z}$: ensemble des **entiers relatifs**, c'est à dire des nombres naturels ainsi que de leurs opposés.
$$\mathbb{Z} = \{...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; ...\}$$
- $\mathbb{Q}$: ensemble des nombres **rationnels**. Il s'agit des nombres qui peuvent s'écrire comme *quotient* d'un entier relatif et d'un entier naturel *non nul*.
$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$$
- $\mathbb{R}$: ensemble des nombres **réels**. Il s'agit de tous les nombres rencontrés jusqu'à présent et qui peuvent être représentés, de façon biunivoque, par un point de la *droite réelle*.
Par exemple 3, -30, $\frac{1}{7}$ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; π; e... sont des réels.

À retenir!

Tous ces ensembles sont bien sûr des ensembles **infinis** (ils possèdent une infinité d'éléments). De plus, on a la suite d'inclusions
$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

☞ Un nombre réel x qui n'est pas dans $\mathbb{Q}$ (ce qui se note $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) est appelé nombre *irrationnel*. On peut montrer par exemple que $\sqrt{2}$ est irrationnel (voir Exercice 13 ci-après).

☞ Enfin, il peut être important de considérer les ensembles précédents ponctionnés de 0. Pour alléger les notations, on note ces ensembles à l'aide d'une étoile placée en exposant. Par exemple, $\mathbb{R}^\star = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exercice 1. (Vrai ou Faux?) Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

$$(i)\ 3 \in \mathbb{Q} \qquad (ii)\ \frac{24}{4} \in \mathbb{Z} \qquad (iii)\ 0 \in \emptyset \qquad (iv)\ \{-n :\ n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Z}$$
$$(v)\ \emptyset \subset \mathbb{N}^* \qquad (vi)\ \emptyset \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \qquad (vii)\ \mathbb{N} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q} \qquad (viii)\ \emptyset \cup \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}$$

Définition

Notion d'intervalle.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On appelle **intervalle ouvert** $]a, b[$ l'ensemble des tous les réels x compris entre a et b strictement:
$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} :\ a < x < b\}.$$
On dit que l'intervalle est **fermé** lorsque les inégalités sont larges des deux côtés :
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x \leq b\}.$$
Un intervalle fermé et borné s'appelle aussi un **segment**.
Lorsqu'une des deux inégalités est stricte, on parle d'intervalle semi-ouvert (à gauche ou à droite):
$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} :\ a < x \leq b\}, \qquad [a, b[= \{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x < b\}.$$

Remarque

- On peut étendre ces définitions avec une borne infinie (auquel cas, c'est nécessairement ouvert là où la borne infinie se trouve.
- Un intervalle contient une infinité d'éléments.
- On peut écrire $\mathbb{R}$ comme un intervalle
$$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[.$$

1.2 Notion d'application

Tout comme mentionné ci-dessus à propos de la théorie des ensembles, la définition suivante (ainsi que des propriétés comme injectivité, surjectivité, bijectivité) sera (-ont) reprise (-s) dans un chapitre ultérieur.

Définition

Notion d'application.

Une **application** f est la donnée d'un ensemble E, appelé **ensemble de départ**, d'un ensemble F, appelé **ensemble d'arrivée**, et pour chaque élément x de E, d'un unique élément noté $f(x)$.

On dit que $f(x)$ est l'**image** de x par f. De plus, si y est un élément de F et que x est un élément de E qui vérifie $f(x) = y$, alors x est appelé **antécédent** de y par f.
Une application f de E dans F se note ainsi:
$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Remarque

- Lorsque les ensembles de départ et d'arrivée sont des intervalles de $\mathbb{R}$, une application est plutôt appelée une *fonction*.

- Une même *formule* pour le calcul de l'image d'un élément peut correspondre à plusieurs applications différentes. Par exemple, ce n'est pas la même chose de regarder
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \quad \text{ou} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$
ces deux applications n'ont pas les mêmes propriétés.

- L'application doit naturellement être définie sur tout l'ensemble de départ (le calcul de $f(x)$ doit avoir du sens pour tout $x \in E$).

- L'ensemble d'arrivée n'est pas forcément l'ensemble des éléments *atteints* par f. Déterminer justement les éléments de l'ensemble d'arrivée qui admettent un antécédent par f fait partie des questions naturelles qu'on se pose presque à chaque fois.

À retenir!

Il est capital de ne pas confondre f et $f(x)$. Parler de la fonction $f(x)$ n'a aucun sens et sera lourdement pénalisé.

Exercice 2. Un ensemble E est constitué de 3 étudiant.e.s (José, Josette, Killian et Camille) agé.e.s respectivement de 17 pour le premier et 18 ans pour les deux suivants et 19 pour Camille. On considère l'application $f: E \to \mathbb{R}$ et qui à un élément de E lui associe son âge.

(1) Montrer que f est une application.
(2) Que vaut l'image par f de Killian ?
(3) Quels sont les antécédents de 18? de 16?
(4) Quel est le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ des éléments pour lesquels il existe un antécédent dans E par f?

Définition

Composition d'applications.

Soient E, F, G trois ensembles et $f: E \to F$ et $G: F \to G$ deux applications. On appelle **composée** de g par f l'application, notée $g \circ f$ définie par

$$\begin{array}{rcl} g \circ f: E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Remarque

La composée d'applications est donc la résultante de deux applications successives. Il est naturellement indispensable que la première application arrive bien dans un ensemble sur lequel est définie la deuxième.

Attention, quand bien même les deux applications seraient définies, l'opération de composition n'est **pas commutative**

$$g \circ f \neq f \circ g.$$

Exercice 3. Soient $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2$ et $g: R \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 2x$.

(1) Peut-on définir $f \circ g$? Si oui, donner, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'expression de $f \circ g(x)$.
(2) Même question avec $g \circ f$.
(3) Qu'observe-t-on ?

1.3 Quantificateurs

La plupart des assertions mathématiques dépendent de un ou plusieurs paramètres qui peuvent varier dans différents ensembles et qui peuvent potentiellement dépendre les uns des autres. Il est capital de *quantifier* rigoureusement celles-ci pour donner du sens et lever toute forme d'ambiguïté.

Définition

- Le symbole $\forall$ signifie "**quel que soit**" ou "pour tout".
  Par exemple $\forall x \in \mathbb{R}$ signifie "pour tout nombre réel x".

- Le symbole $\exists$ signifie "**il existe** (au moins un)..." ou "on peut trouver (au moins un)".
  L'élément qui succède au symbole peut alors dépendre de ce qui précède.
  Par exemple, en considérant une application $f: E \to F$, l'assertion "y admet un antécédent par f" se traduit par

$$\exists x \in E, \quad y = f(x).$$

☞ Ces symboles servent à formuler de façon précise des énoncés mathématiques. **Il ne doivent être en aucun cas utilisés à des fins d'abréviation.**

☞ Le quantificateur $\exists$ signifie il existe *au moins un...* Si l'on veut préciser que l'élément dont on considère l'existence est unique, on utilise $\exists!$ (il existe un unique...).
On revient ci-après sur l'utilisation de ces quantificateurs dans des assertions.

2 Rudiments de logique

2.1 Propositions. Implications. Équivalence

Définition

Une proposition (ou assertion) est un énoncé qui ne peut être que vrai ou faux.

Par exemple, "toute fonction croissante est continue" ou "$2 + 2 = 4$" sont des propositions. Si la seconde proposition est bien vraie, ce n'est pas le cas de la première (on ira voir la fonction *partie entière* introduite ci-après).

Lorsqu'on fait de la logique, on note souvent les propositions P ou Q, adoptant la convention que "Supposons P" est en fait une abréviation de "Supposons que P est vraie".

Deux propositions qui sont simultanément vraies ou simultanément fausse ne sont pas les mêmes; on dira qu'elles sont *équivalentes*. Nous y reviendrons dans quelques paragraphes.

Définition

Soit P une proposition. On appelle **négation** de P, et on note "non P" ou $\neg P$, qui est vraie si et seulement si P est fausse.

Exemple

Si P est la proposition "La fonction $x \mapsto x^2$ est croissante" et Q la proposition "l'équation (E) a des solutions", la négation de P sera $\neg P$: "la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas croissante" (ce qui n'est pas du tout la même chose que décroissante) et celle de Q sera $\neg Q$: "l'équation (E) n'a aucune solution".

Définition

Connecteurs logiques.

- Soient P et Q deux propositions. La proposition "P **et** Q", notée $P \wedge Q$, est la proposition qui est vraie si et seulement si P et Q sont vraies simultanément. On l'appelle aussi conjonction des propositions P et Q.

- Soient P et Q deux propositions. La proposition "P **ou** Q", notée $P \vee Q$, est la proposition qui est fausse si et seulement si P et Q sont fausses simultanément. On l'appelle aussi disjonction des propositions P et Q.

- Soient P et Q deux propositions. On appelle **implication** de Q par P, et on note "$P \Rightarrow Q$", l'assertion "$\neg P \vee Q$": elle est donc fausse si et seulement si P est vraie et Q est fausse. Lorsque "$P \Rightarrow Q$" est vraie, on dit que P implique (ou entraîne) Q.

À retenir!

Pour montrer que la proposition "$P \Rightarrow Q$" est vraie, on peut commencer par supposer que P est vraie et montrer qu'alors Q l'est aussi.
L'implication "$P \Rightarrow Q$" peut se reformuler indifféremment:

- Si P, alors Q
- Si $\neg Q$ alors $\neg P$
- Pour que Q, il **suffit** que P
- P est une **condition suffisante** pour que Q
- Pour que P, il **faut** que Q
- Q est une **condition nécessaire** pour que P

Exemple

Si A et B sont deux ensembles, montrer que $A \subset B$ revient à montrer que $x \in A$ implique $x \in B$.

Définition

Soient P et Q deux propositions. On appelle **équivalence** entre P et Q, et on note "$P \Leftrightarrow Q$", l'assertion qui est vraie si et seulement si P et Q sont simultanément vraies ou fausses (c'est à dire équivalentes).

À retenir!

L'équivalence "$P \Leftrightarrow Q$" peut se reformuler indifféremment:

- P si et seulement si Q
- Pour que Q, il **faut et il suffit** que P
- P est une **condition nécessaire et suffisante** pour que Q.

Pour montrer que "$P \Leftrightarrow Q$" est vraie, on peut montrer que les deux propositions "$P \Rightarrow Q$" **et** "$Q \Rightarrow P$" sont vraies. On dit qu'on procède par *double implication*.

Définition

Soient P et Q deux propositions. La proposition "$Q \Rightarrow P$" est appelée la **réciproque** de la proposition "$P \Rightarrow Q$".

☞ Si l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie et que sa réciproque l'est aussi, alors P et Q sont équivalentes.

Définition

Soient P et Q deux propositions. La proposition "$\neg Q \Rightarrow \neg P$" est appelée **contraposée** de la proposition "$P \Rightarrow Q$".

Propriété

Une implication est toujours équivalente à sa contraposée, mais **attention** elle n'est pas équivalente à sa réciproque.

2.2 Logique et quantificateurs

Dans une proposition peuvent apparaitre plusieurs paramètres. Sans précision sur les valeurs que peuvent prendre ces paramètres dans la proposition, il n'est pas possible de dire si celle-ci est vraie ou fausse. Il est donc capital de quantifier une proposition, notamment à l'aide des quantificateurs précédemment introduits.

Par exemple "tout entier naturel est également un rationnel" peut s'écrire à l'aide des quantificateurs:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ n \in \mathbb{Q}.$$

On observe d'ailleurs que la variable n choisie ici est *muette*; on aurait pu la remplacer par n'importe quelle autre lettre.

Autre exemple, "tout nombre réel admet un nombre qui lui est strictement supérieur" peut s'écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \exists y \in \mathbb{R}, \ x \leq y.$$

Cette assertion est vraie; il suffit par exemple de prendre $y = x + 1$.
En revanche,

$$\exists y \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad x < y$$

signifie qu'il existe un nombre $y \in \mathbb{R}$ qui est strictement supérieur à tout nombre x dans $\mathbb{R}$. En prenant $x = y$ (ce qu'on a le droit de faire car cela doit être vrai pour tout x), on voit que c'est faux.

Plus précisément, dans la première proposition, le y dépend du x (qui lui est arbitraire) et peut donc (éventuellement) varier suivant la valeur de celui-ci.

Dans la proposition avec les quantificateurs inversés, on aurait trouvé un y qui conviendrait pour tous les x, ce qui n'est bien sûr pas possible ici.

☞ Il est donc bien important de comprendre cette différence qui pourrait paraître subtile mais qui en fait, ne l'est pas.

À retenir!

Lorsque l'on quantifie, l'ordre est quantificateurs a une importance cruciale et toute permutation de ceux-ci change complètement le sens.

☞ On peut en revanche inverser deux quantificateurs successifs lors que ce sont les mêmes. On dit que deux quantificateurs $\forall$ successifs commutent (et il en est de même pour deux quantificateurs $\exists$ successifs).

Exercice 4. Écrire la définition d'une fonction croissante sur un intervalle I. Même question avec une fonction décroissante sur I.

Exercice 5. (Vrai ou Faux?) Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in \mathbb{R}, \ x + y > 0$;
(ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \ \exists y \in \mathbb{R}, \ x + y > 0$;
(iii) $\exists x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in \mathbb{R}, \ x + y > 0$;
(iv) $\forall x \in \mathbb{R}, \ \exists y \in \mathbb{R}, \ y^2 > x$;
(v) $\exists M \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ x^2 \leq M$.

Exercice 6. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes:

(i) f est inférieure à g; (ii) f est positive; (iii) f est majoré par 5;
(iv) f est majorée; (v) f est strictement décroissante (vi) f prend toutes les valeurs positives

☞ La négation d'une proposition avec quantificateurs provoque un changement des quantificateurs. Plus précisément, si $P(x)$ est une proposition qui dépend d'un paramètre x appartenant à un ensemble E, alors on a:

$$\neg\left(\forall x \in E, P(x)\right) \Leftrightarrow \left(\exists x \in E, \neg P(x)\right)$$

Nier que quelque chose a lieu pour tout élément x équivaut à dire qu'il y a (au moins) un x pour lequel cela n'a pas lieu.

On a également:

$$\neg\left(\exists x \in E, P(x)\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in E, \neg P(x)\right)$$

Nier qu'il existe un élément x pour lequel quelque chose se passe équivaut à dire que quelque soit l'élément x, cela ne se passe pas.

Exemple

Nier l'assertion "Tous les amateurs des *Lac du Connemara* de Michel Sardou sont de droite" donne l'assertion "Il y a (au moins) un amateur des *Lac du Connemara* de Michel Sardou qui n'est pas de droite".

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nier les énoncés qui suivent:

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 1$; (ii) Il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) \geq 0$;
(iii) L'application f est croissante; (iv) L'application f est croissante et positive.

2.3 Exemples de raisonnements

Les observations précédentes permettent déjà d'établir certains types de raisonnements.

☞ La première idée de raisonnement à laquelle on pense, est celle du *raisonnement direct*; pour montrer que P implique Q, on suppose que P est vraie et on montre que par conséquent Q aussi.

Exercice 8. Soit n en nombre pair. Montrer que n^2 est encore pair.

☞ Pour montrer la véracité d'une proposition du type "$\exists x,\ P(x)$" il suffit de donner un exemple d'un x qui fonctionne (notons que ce n'est pas toujours possible; l'existence est parfois assurée par des preuves non constructives et on ne connait pas toujours explicitement de x qui convienne. On verra un exemple de ce genre de situation avec le *Théorème des valeurs intermédiaires* dans un chapitre ultérieur).

À retenir!

En passant à la négation, pour démontrer une proposition du type "$\forall x,\ P(x)$" est fausse, on peut donc trouver un x qui ne satisfait pas la proposition $P(x)$. Cela s'appelle **fournir un contre-exemple**.

Exercice 9. Montrer que l'assertion suivante est fausse: "toute fonction croissante est positive sur son ensemble de définition".

Parfois, montrer directement une implication n'est pas facile. On essaie donc de prendre le problème différemment.

Définition

Raisonner par contraposée signifie que pour montrer qu'une implication "$P \Rightarrow Q$" est vraie, on montre que c'est sa contraposée "$\neg Q \Rightarrow \neg P$" qui est vraie.

Exercice 10. Montrer que n pair est équivalent à n^2 pair.

Exercice 11. Soient x et y deux nombres réels différents de 1. Montrer que $x \neq y \Rightarrow \dfrac{1}{x-1} \neq \dfrac{1}{y-1}$.

Définition

Raisonner par disjonction des cas signifie que pour montrer qu'une proposition R est vraie, on exhibe deux propositions P et Q telles que "$P \vee Q$", "$P \Rightarrow R$" et "$Q \Rightarrow R$" soient toutes trois vraies.

☞ En d'autres termes, il s'agit d'expliciter deux alternatives (qu'on a forcément) et qui chacune entraîne la proposition R.

Exercice 12. Montrer que, pour tout nombre entier n, $n^2 + n$ est pair.

Définition

Pour montrer qu'une proposition P est vraie, on peut **raisonner par l'absurde**. La démarche consiste à montrer que la négation de P mène à une contradiction logique.

Exercice 13. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Remarque

Il y a une différence (peut-être parfois subtile) entre le raisonnement par l'absurde et le raisonnement par contraposée. On s'en convaincra par exemple avec l'exercice suivant.

Exercice 14. Montrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est encore un irrationnel.

☞ Il existe d'autre types de raisonnement (notamment *par récurrence*) que nous présenterons un peu plus tard.

3 Calcul de base

3.1 Puissances entières d'un nombre réel

- Soient $x \in \mathbb{R}^\star$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit les *puissances* de x par

$$x^0 = 1 \qquad \text{et} \qquad x^n = x \times x \times x \times \ldots \times x \qquad (n \text{ fois}),\ n \geq 1$$

- $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ 0^n = 0$.
- Soient $x \in \mathbb{R}^\star$ et $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ ($-n$ est donc un entier naturel non nul). On pose

$$x^n = \frac{1}{x^{-n}}$$

  Par exemple, $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$.

Il découle immédiatement de ces définitions les règles de calcul suivantes, déjà bien connues.

Règle(s) de calcul

Pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$ et tous $a, b \in \mathbb{R}^\star$, on a

$$a^n \times a^m = a^{n+m}; \qquad (a \times b)^n = a^n \times b^n; \qquad (a^n)^m = a^{n \times m}$$

$$a^0 = 1; \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Remarque

On remarquera en particulier que
- $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad 0^n = 0;$
- $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad 1^n = 1;$
- $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad (-1)^{2n} = 1$ et $(-1)^{2n+1} = -1.$

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier l'expression suivante

$$-\frac{(-12)^{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{9^n 8^n}.$$

☞ Les formules suivantes sont à connaître sans la moindre hésitation. Elles seront généralisées plus tard avec la *Formule du binôme.*

Propriété

Identités remarquables.

Soient a, b et c trois nombres réels.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \qquad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3; \qquad (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

3.2 Logarithme néperien

On admet[1] l'existence du logarithme népérien, défini sur $\mathbb{R}_+^\star$:

$$\ln : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$$

Règle(s) de calcul

Propriétés remarquables du logarithme.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^\star, \qquad \begin{array}{ll} \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b) & \ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b) \\ \ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a) & \ln(a^n) = n\ln(a), \quad n \in \mathbb{Z} \\ \ln(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1 & \ln(a) = 1 \Leftrightarrow a = e \\ \ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b & \ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b \end{array}$$

3.3 Exponentielle

On admet[2] l'existence de la fonction exponentielle, définie sur $\mathbb{R}$:

$$\exp : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^\star \\ x & \longmapsto & \exp(x) \end{array}$$

☞ Il arrive qu'on note e^x au lieu de $\exp(x)$.

[1] définie comme unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto 1/x$ qui s'annule en 1

[2] définie comme la bijection réciproque du logarithme népérien

Règle(s) de calcul

Propriétés remarquables de l'exponentielle.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \begin{array}{ll} \exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b) & \exp(a-b) = \exp(a)/\exp(b) \\ \exp(-a) = 1/\exp(a) & \exp(na) = (\exp(a))^n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \exp(a) = \exp(b) \Leftrightarrow a = b & \exp(a) < \exp(b) \Leftrightarrow a < b \\ \exp(a) = 1 \Leftrightarrow a = 0 & \end{array}$$

Propriété

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}_+^\star, \qquad (e^x = y) \Leftrightarrow (x = \ln(y))$$

En particulier,

$$\begin{array}{ll} \forall x \in \mathbb{R}_+^\star, & e^{\ln(x)} = x \\ \forall x \in \mathbb{R}, & \ln(e^x) = x \end{array}$$

3.4 Puissances réelles d'un nombre strictement positif

Les deux fonctions précédentes permettent d'*étendre* la notion de puissance à un exposant réel (pour un argument **strictement positif**). Plus précisément:

Définition

Puissances réelles d'un nombre strictement positif.

Soient $x \in \mathbb{R}_+^\star$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x)).$$

Les propriétés listées au paragraphe précédent permettent de voir que toutes les règles de calcul pour des exposants entiers s'étendent bien aux puissances réelles d'un nombre strictement positif :

Règle(s) de calcul

Règles de calcul étendues.

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et tous $x, y \in \mathbb{R}_+^\star$, on a

$$x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta}; \qquad (x \times y)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha; \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha \times \beta}$$

$$x^0 = 1; \qquad x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}; \qquad \frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$$

Lorsque $\alpha = 1/2$, on note plutôt

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}},$$

il s'agit de la **racine carée** de x; l'unique nombre positif dont le carré vaut x.

On rappelle qu'il faut savoir simplifier les écritures de racines carrées. Plus précisément, pour simplifier $\sqrt{x}$, on décompose x comme produit de puissances de nombres les plus petits possibles et on utilise alors les propriétés des puissances pour "faire sortir de la racine" ce qu'on peut.

Exemple

$$\sqrt{200} = \sqrt{8 \times 25} = \sqrt{2^3 \times 5^2} = \sqrt{2^3} \times \sqrt{5^2} = 2\sqrt{2} \times 5 = 10\sqrt{2}.$$

Remarque

Si pour tout nombre réel positif x on a bien $x = \sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2$, il faut faire attention lors de la simplification de $\sqrt{x^2}$ si on ne connait pas le signe de x.

En effet, pour tout x réel, x^2 est positif et on peut donc calculer la racine carrée en gardant bien à l'esprit que le résultat doit être positif.
Par exemple $\sqrt{(-2)^2} = 2$.

De façon générale, on a, pour tout x réel, $\sqrt{x^2} = |x|$, où $|x|$ dénote la *valeur absolue* de x, dont nous rappelons la définition ci-après.

3.5 Valeur absolue

Définition

La **valeur absolue** d'un nombre réel x est définie par

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La *fonction valeur absolue*, $x \mapsto |x|$, est alors définie sur $\mathbb{R}$.

☞ En particulier, la valeur absolue d'un nombre réel est **toujours positive**, ce qui s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geq 0.$$

Règle(s) de calcul

Propriétés immédiates de la valeur absolue.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors,

$$|-x| = |x|; \qquad |x \times y| = |x| \times |y|; \qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad \text{si } y \neq 0.$$

De plus, $(|x| = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$. Enfin $|x - y|$ peut être interprété comme la distance de x à y sur la droite réelle.

Exercice 16. Réécrire l'expression de $g(x)$ sans valeur absolue, où $g(x) = 2|x+1| - |1-2x|$.

Propriété

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Alors,

$$|x| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon.$$

À retenir!

La valeur absolue permet d'introduire et de mesurer la *distance* entre deux nombres. En effet, dire que $|x-y|<\varepsilon$ signifie que y est dans un *rayon* autour de x strictement inférieur à ε, ce qui se traduit aussi sous forme d'intervalle

$$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[=\{y\in\mathbb{R}:\ |x-y|<\varepsilon\}.$$

De la même manière, chercher une **valeur approchée** d'un nombre α à $\varepsilon-$près revient à trouver un nombre y tel que $|\alpha-y|<\varepsilon$.

Propriété

Inégalité Triangulaire.

Soient $x,y\in\mathbb{R}$. Alors,

$$|x+y|\leq|x|+|y|.$$

De plus, l'égalité est caractérisée:

$$|x+y|=|x|+|y| \iff xy\geq 0$$

Exercice 17. Montrer que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R},\ \forall z\in\mathbb{R},\qquad |x-z|\leq|x-y|+|y-z|.$$

☞ La valeur absolue permet de formuler quelques égalités très utiles.

Propriété

Soient $x,y\in\mathbb{R}$.

(1) Si $xy>0$, alors

$$\ln(xy)=\ln(|x|)+\ln(|y|)\qquad\text{et}\qquad\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(|x|)-\ln(|y|).$$

(2) En particulier, si $x\neq 0$

$$\ln(x^2)=2\ln(|x|).$$

(3) Si $xy>0$, alors

$$\sqrt{xy}=\sqrt{|x|}\sqrt{|y|}\qquad\text{et}\qquad\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{|y|}}.$$

(4) (Relation fondamentale de la racine carrée)

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad\sqrt{x^2}=|x|.$$

3.6 Partie Entière

Définition

Soit x un nombre réel quelconque. La **partie entière** de x, notée $\lfloor x\rfloor$, est l'unique entier n tel que

$$n\leq x<n+1.$$

On a donc naturellement l'encadrement

$$\lfloor x\rfloor\leq x<\lfloor x\rfloor+1,\qquad x\in\mathbb{R}.$$

Une définition équivalente est

$$\lfloor x\rfloor=\max\{n\in\mathbb{Z}:\ n\leq x\}.$$

Exemple

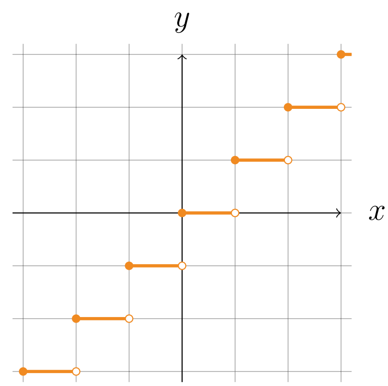
Par exemple,

$$\left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 1, \quad \lfloor -\pi \rfloor = -4, \quad \left\lfloor -\frac{2}{3} \right\rfloor = -1, \ldots$$

☞ Il est important de ne pas confondre la partie entière d'un nombre avec la troncature à l'unité de ce nombre (qui consiste à supprimer les décimales). Les deux notions diffèrent pour les nombres négatifs.

☞ La fonction partie entière, définie sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est un cas particulier de fonction **en escalier**. Elle présente notamment des *points de discontinuité* sur toutes les valeurs entières.

Représentation graphique



Fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$

Exercice 18. Soit $x \in \mathbb{R}$. Que vaut $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$?

4 Résolutions d'équations

On s'intéresse ici à la résolution d'équations. On précise que la résolution d'un système d'équations linéaires sera l'objet du chapitre qui suivra (avec l'introduction de la méthode du *Pivot de Gauss*).

☞ On commence par rappelle ensuite les règles de calcul au sein d'une équation.

Règle(s) de calcul

On ne change pas une égalité en:

- ajoutant (ou soustrayant) un même réel aux membres de gauche et de droite;
- multipliant (ou divisant) les deux membres par un même réel **non nul**;
- prenant l'inverse des deux membres (**s'ils sont tous deux non nuls**);
- composant les deux membres par l'exponentielle;
- composant les deux membres par le logarithme (**s'ils sont tous deux strictement positifs**);
- élevant les deux membres à une puissance **impaire**.

Attention!

Le passage au carré ou à la racine carrée sont un peu plus délicats.
L'équation $x^2 = a$ n'a de solution que si $a \geq 0$ et a alors deux solutions ($-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$).
L'équation $\sqrt{x} = b$ n'a de solution que si $x \geq 0$ et $b \geq 0$. Auquel cas, il y a une seule solution qui est b^2.

Ensuite, naturellement, on rappelle une règle incontournable.

Propriété

Un produit est nul si et seulement si (au moins) un de ses facteurs est nul.

De manière générale, avant de résoudre une équation, il faut chercher son **domaine de définition**; c'est à dire l'ensemble des valeurs de l' (des) inconnue(s) pour lesquelles l'équation a un sens.

Par ailleurs, on essaiera toujours de se ramener à une équation factorisée (à l'aide des identités remarquables par exemple) et dont le second membre vaut 0.

Exemple

Par exemple,

$x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{5})^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$.

Cette méthode permet notamment de justifier de la discussion et de la résolution des équations du second degré.

Propriété

Équation du premier degré.

Soient a et b deux réels, avec $a \neq 0$. Alors, l'équation $ax + b = 0$ admet pour unique solution $x = -\dfrac{b}{a}$.

Équations du second degré.
Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$. On considère l'équation

$$(E) \qquad ax^2 + bx + c = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

On introduit le *discriminant*, défini par $\Delta = b^2 - 4ac$, du *trinôme* $ax^2 + bx + c$. On distingue alors trois cas:

(i) Si $\Delta < 0$, alors l'équation (E) n'a aucune solution;
(ii) Si $\Delta = 0$, l'équation (E) se factorise:

$$(E) \iff a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

et admet donc pour unique solution $x = -\dfrac{b}{2a}$;
(iii) Si $\Delta > 0$, l'équation (E) se factorise

$$(E) \iff a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

où $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ sont donc les deux solutions de l'équation.

Remarque

On ne sait *a priori* pas résoudre d'équation de degré supérieur. Si jamais une telle équation apparaissait, cela veut donc dire qu'il faudrait se ramener à ce qu'on sait résoudre :

- Dans le cadre d'une équation de degré 4 dite *bicarée* (c'est à dire de degré 4 mais qui ne fait intervenir que des puissances de x^2), on poserait $y = x^2$ et on résoudrait en premier l'équation sur y puis une deuxième équation du second degré en x avec en second membre les solutions précédentes;

- Si une équation de degré supérieure admet des solutions *évidentes*, on peut s'en servir pour factoriser le membre de gauche et abaisser le degré. On y revient ci-après.

Exercice 19. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 + x^2 - 6 = 0$.

Dans le but de résoudre certaines équations de plus haut degré, comme mentionné ci-avant, on présente ici deux résultats utiles à propos des polynômes.

Théorème

On considère une équation polynômiale de la forme

$$(E) \qquad a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

où les coefficients a_i sont des réels et n est un entier strictement positif.
Si r est solution de (E), alors on peut factoriser le terme des gauche de l'équation par $x - r$. Plus précisément, il existe des coefficients réels $b_0, \ldots, b_{n-1}$, tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = (x - r)(b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0)$$

☞ On trouve les coefficients $b_0, \ldots, b_{n-1}$ à l'aide du principe d'identification (rappelé ci-dessous) où en *posant la division.*

Théorème

Principe d'identification des polynômes.

Soient n, p deux entiers naturels non nuls, $a_0, a_1, \cdots, a_n$ et $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_p$ des réels et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Les assertions suivantes sont équivalentes:
(i) $\forall x \in I, \quad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = \alpha_p x^p + \alpha_{p-1} x^{p-1} + \cdots + \alpha_0$;
(ii)

$$(n = p) \text{ et } \begin{cases} a_0 & = & \alpha_0 \\ a_1 & = & \alpha_1 \\ & \vdots & \\ a_n & = & \alpha_n \end{cases}.$$

Remarque

Appliquer le principe d'identification nécessite ensuite de savoir résoudre un système d'équations... Cela arrive au prochain chapitre!

Exercice 20. On considère l'équation

$$(E) \qquad x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0.$$

(1) Vérifier que 1 est solution de (E).

(2) Déterminer de deux manières différentes (d'abord en posant la division puis par identification, en anticipant sur les résultats du prochain chapitre) trois réels a, b et c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = (x-1)(ax^2 + bx + c).$$

(3) Déterminer toutes les solutions de (E).

☞ On n'est hélas pas toujours en mesure de trouver une solution particulière pour factoriser...

Exercice 21. Trouver l'ensemble de définition puis résoudre dans cet ensemble l'équation $\sqrt{2x+7} = -2 - x$.

5 Résolution d'inéquations

Commençons par rappeler le tableau de signes d'un polynôme de degré 1.

Propriété

Signe d'un polynôme de degré 1.

Soient a, b deux réels avec $a \neq 0$. Le signe de l'expression $P(x) = ax + b$ est donné par le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$P(x)$		signe de -a	0	signe de a	

On rappelle ensuite les règles de calcul au sein d'une inéquation.

Règle(s) de calcul

On ne change pas le signe d'une inégalité en:

- ajoutant (ou soustrayant) un même réel aux membres de gauche et de droite;
- multipliant (ou divisant) les deux membres par un même réel **strictement positif**;
- composant les deux membres par l'exponentielle;
- composant les deux membres par le logarithme (**s'ils sont tous deux strictement positifs**);
- élevant les deux membres à une puissance **impaire**.

On change le signe d'une inégalité en:

- multipliant (ou divisant) les deux membres par un même réel **strictement négatif**;
- prenant l'inverse des deux membres (**s'ils sont tous deux non nuls et de même signe**).

Attention!

Comme dans le cadre des égalités, le passage au carré (ou à la racine carré) demeure délicat. Il faut évidemment faire attention au domaine de définition. Tout comme dans le cadre des égalités, on essaiera de se ramener à une inégalité factorisée et on utilisera un tableau de signes.

La factorisation des trinômes établie ci-avant permet, à l'aide d'un tableau de signes de résoudre des inéquations du second degré. Plus précisément, on rappelle la chose suivante.

Propriété

Inéquations du second degré.

Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$. On s'intéresse au signe de l'expression $P(x) = ax^2 + bx + c$. On distingue trois cas, en fonction de la valeur du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

(i) Si $\Delta < 0$, alors $P(x)$ ne se factorise pas; il est de signe constant et ce signe est celui de a;

(ii) Si $\Delta = 0$, alors $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ est toujours du même signe que a et s'annule en $-\dfrac{b}{2a}$;

(iii) Si $\Delta > 0$, alors $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (où on a noté x_1 et x_2 les deux solutions de $P(x) = 0$ avec $x_1 < x_2$); on a donc le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de -a	0	signe de a	

6 Outils des études de fonctions

La résolution de différents types de problèmes dans lesquelles des expressions algébriques apparaissent peut nécessiter l'utilisation d'arguments liés à l'étude de fonction. On en rappelle donc ici les étapes.

À retenir!

Pour étudier une fonction f on effectue les actions suivantes:

- On détermine l'*ensemble de définition* $\mathcal{D}_f$ (c'est à dire l'ensemble des réels pour lesquels la fonction est bien définie et son expression algébrique $f(x)$ a bien un sens);
- On peut essayer de simplifier l'étude (en restreignant l'ensemble sur lequel on étudie la fonction) en cherchant une éventuelle *parité* (paire ou impaire);
- On détermine les *limites* de f au bord de son ensemble de définition;
- On étudie la *dérivabilité*[a] de f, on calcule cette dérivée lorsque c'est possible;
- À l'aide du signe de la dérivée, on dresse le tableau de variations de f;
- On trace l'allure de la courbe représentative de f. Le dessin ne doit pas avoir la taille d'un timbre ni être dessiné avec les pieds. Il est censé résumer tous les éléments de l'étude en un coup d'oeil.

[a]Un chapitre sera consacré de manière rigoureuse à cette notion et ce qu'elle implique

6.1 Limites

On se permet de donner la définition d'une limite infinie sur laquelle on demande de réfléchir. On y reviendra.

Définition

Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend $+\infty$, ce qu'on note

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

si

$$\forall M \geq 0,\ \exists A \geq 0, \quad x \geq A \Longrightarrow f(x) \geq M.$$

☞ Ceci veut dire que, aussi grand que soit le nombre M qu'on choisit, $f(x)$ peut devenir supérieur à M si on prend x *assez grand*.

Exercice 22. Écrire la définition avec quantificateurs d'une limite $-\infty$ lorsque $x \to +\infty$ et des deux limites infinies lorsque $x \to -\infty$.
Que voudrait dire d'avoir une limite infinie lorsque $x \to a$, où a est une valeur finie au bord de l'ensemble de définition de f? Quid d'une limite finie ℓ (en une valeur a ou aux infinis) ?

Propriété

Limites des fonctions usuelles aux bords de leur domaine de définition.

- **Fonctions affines** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax + b$ (où $a, b, \in \mathbb{R},\ a \neq 0$)
$$\lim_{x\to-\infty} ax + b = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad a > 0 \\ +\infty & \text{si} \quad a < 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} ax + b = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$
- **Fonction valeur absolue** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$
$$\lim_{x\to-\infty} |x| = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} |x| = +\infty$$
- **Fonction carrée** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$
$$\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$
- Généralisation: **fonctions polynômes** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ (où $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n \in \mathbb{R}$ avec $a_n \neq 0$). On discute alors suivant la parité de n.
  – si n est pair
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a_n > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad a_n < 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a_n > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad a_n < 0 \end{cases}$$
  – si n est impair
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad a_n > 0 \\ +\infty & \text{si} \quad a_n < 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a_n > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad a_n < 0 \end{cases}$$
- **Fonction inverse** $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^- \qquad \lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$
- **Fonction logarithme** $\ln : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(x)$
$$\lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$
- **Fonction exponentielle** $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^\star,\ x \mapsto \exp(x)$
$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0^+ \qquad \lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$$
- **Fonctions puissances** $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^\alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{R}^\star$)
$$\lim_{x\to0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0^+ & \text{si} \quad \alpha > 0 \\ +\infty & \text{si} \quad \alpha < 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \alpha > 0 \\ 0^+ & \text{si} \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

☞ Naturellement, toutes les fonctions précédentes sont *continues* sur les intervalles qui forment leurs ensembles de définition; en particulier, si $x_0 \in \mathcal{D}_f$, alors $\lim_{x\to x_0} = f(x_0)$.

La connaissance des limites de ces fonctions en un même endroit permet d'obtenir, par des règles de calculs qu'on rappelle ici, d'autres limites. (Parfois, le résultat est une forme indéterminée qui ne peut pas être prévue à l'avance et nécessite donc davantage de travail; ce cas de figure sera représenté par un "?").

Propriété

Algèbre des limites.

Soient f et g deux fonctions, x_0 une valeur à l'intérieur ou au bord de l'intersection des deux ensembles de définition et $\ell, \ell' \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ telles que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell'.$$

- **Somme**: $\lim_{x \to x_0}(f(x) + g(x))$

$\ell \backslash \ell'$	$-\infty$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
$\ell \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$\ell + \ell'$	$+\infty$
$+\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

- **Produit**: $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x)$

$\ell \backslash \ell'$	$-\infty$	$\ell' < 0$	0	$\ell' > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
$\ell < 0$	$-\infty$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$-\infty$
0	?	0	0	0	?
$\ell > 0$	$-\infty$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

- **Quotient**: $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\ell \backslash \ell'$	$-\infty$	$\ell' < 0$	0^-	0^+	$\ell' > 0$	$+\infty$
$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
$\ell < 0$	0^+	ℓ/ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	ℓ/ell'	0^-
0^-	0^+	0^+	?	?	0^-	0^-
0^+	0^-	0^-	?	?	0^+	0^+
$\ell > 0$	0^-	ℓ/ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	ℓ/ℓ'	0^+
$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?

- Cas particulier: **Inverse**: $\lim_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)}$

ℓ	$-\infty$	$\ell' < 0$	0^-	0^+	$\ell' > 0$	$+\infty$
$\lim_{x \to x_0} f(x)$	0^-	$1/\ell$	$-\infty$	$+\infty$	$1/\ell$	0^+

☞ Certaines formes indéterminées sont cependant connues et bien utiles. C'est le cas de celles rappelées dans la proposition suivante.

Propriété

Croissances comparées.

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Alors,

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} x^\alpha \exp(x) = 0, \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x^\alpha} = +\infty.$$

À retenir!

Pour résumer, n'importe quelle puissance (positive) de x l'emporte sur n'importe quelle puissance (positive) du logarithme alors qu'*a contrario*, l'exponentielle l'emporte sur n'importe quelle puissance de x.

Enfin, les deux limites suivantes sont des limites usuelles et les résultats font partie du cours et peuvent dont être utilisés comme tels. Il ne s'agit pas de croissance comparée, mais de résultats liés à la *dérivabilité* des fonction ln et exp.

Propriété

Limites usuelles par taux d'accroissement.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1.$$

☞ Graphiquement, certaines limites peuvent se traduire par la présence d'**asymptotes**.
En effet, si une fonction f a une limite finie en $\pm\infty$ (*i.e.* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=a$, avec $a\in\mathbb{R}$), sa courbe représentative admettra une asymptote horizontale $y=a$ en $\pm\infty$.

Si en revanche, il y a une limite infinie en un point $x_0\in\mathbb{R}$ au bord de l'ensemble de définition (*i.e.* $\lim_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$), la courbe représentative admettra cette fois une asymptote verticale, d'équation $x=x_0$.

Enfin, plus généralement, s'il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-(ax+b))=0$, alors la courbe représentative de f admettra, en $\pm\infty$, une **asymptote oblique** d'équation $y=ax+b$.

6.2 Parité et symétries

Afin de rappeler la notion de parité, nous avons besoin d'introduire celle d'intervalle centré en 0.

Définition

Soient I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}$. On dit que I est centré (en 0) si

$$\forall x\in\mathbb{R}, \qquad x\in I \Longrightarrow -x\in I.$$

Par exemple, $\mathbb{R}$ est centré, mais c'est aussi le cas de $\mathbb{R}^\star$, tout comme de $]-\pi;\pi[$, mais ce n'est pas le cas de $[-2;+\infty[$.

Définition

Soit f une fonction ayant un domaine de définition centré en 0. On dit que:

- f est **paire** si, pour tout $x\in\mathcal{D}_f$, on a $f(-x)=f(x)$;
- f est **impaire** si, pour tout $x\in\mathcal{D}_f$, on a $f(-x)=-f(x)$.

À retenir!

Graphiquement, une fonction paire est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées** alors qu'une fonction impaire est quant à elle **symétrique par rapport à l'origine du repère**.

☞ Dans le cas où l'on observe une relation de parité, cela permet de restreindre l'intervalle d'étude ainsi que le nombre de limites à déterminer. On déduit les informations concernant les valeurs négatives **par symétrie**.

6.3 Dérivées et variations

Une fonction f est dite *dérivable*[3] en un point $x_0 \in \mathcal{D}_f$ si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie lorsque x tend vers x_0.
Auquel cas, cette limite est appelé *nombre dérivé* et noté $f'(x_0)$. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est appelée (fonction) *dérivée* de f.

À retenir!

Si f est dérivable en x_0, alors la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse x_0 dont l'équation est

$$T_{x_0}: \qquad y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

☞ Comme déjà (bien) vu au lycée, le signe de la dérivée d'une fonction dérivable permet d'obtenir le sens de variation de celle-ci. En effet, la fonction sera (strictement) croissante sur l'intervalle où sa dérivée est (strictement) positive et décroissante sur un intervalle où sa dérivée est négative. Ces notions seront revues lors d'un chapitre dédié à la dérivabilité des fonctions (calcul différentiel - ce *teasing* permanent devient insoutenable).

Voici quelques fonctions usuelles dont la dérivabilité ainsi que l'expression de la dérivée est rappelée.

Propriété

Dérivées des fonctions usuelles.

- **Fonctions affines**
$$f : x \mapsto ax+b \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}, \text{et } \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = a;$$
- **Fonction valeur absolue**
$$f : x \mapsto |x| \text{ est dérivable sur }]-\infty;0[\text{ et sur }]0;+\infty[, \text{et } f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x>0 \\ -1, & \text{si } x<0 \end{cases}$$
- **Fonction carrée**
$$f : x \mapsto x^2 \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}, \text{et } \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2x;$$
- **Fonction inverse**
$$f : x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^\star, \text{et } \forall x \in \mathbb{R}^\star,\ f'(x) = -\frac{1}{x^2};$$
- **Fonction logarithme**
$$f : x \mapsto \ln(x) \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^\star, \text{et } \forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ f'(x) = \frac{1}{x};$$
- **Fonction exponentielle**
$$f : x \mapsto \exp(x) \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}, \text{et } \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \exp(x);$$
- **Fonction puissance**
$$f : x \mapsto x^\alpha (\alpha \in \mathbb{R}) \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^\star, \text{et } \forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ f'(x) = \alpha x^{\alpha-1};$$
- Cas particulier: **fonction Racine carrée**
$$f : x \mapsto \sqrt{x} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^\star, \text{et } \forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Exercice 23. Dessiner les allures des courbes de toutes les fonctions usuelles ci-dessus.

[3]Une fois de plus, un chapitre entier sera consacré à l'introduction rigoureuse de cette notion et à ses nombreuses applications

On présente, sous forme d'un tableau, les règles de calcul concernant les opérations sur les dérivées (somme, produit, quotient, composition, ...).

Propriété

Opérations sur les dérivées.

Soient f et g deux fonctions dérivables sur leurs domaines de définition $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$.

Fonction	Dérivée	Domaine de validité
$\lambda \times f$ $(\lambda \in \mathbb{R})$	$\lambda \times f'$	$\mathcal{D}_f$
$f+g$	$f'+g'$	$\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$
$f \times g$	$f' \times g + f \times g'$	$\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$
$\frac{1}{f}$	$-\frac{f'}{f^2}$	$\{x \in \mathcal{D}_f :\ f(x) \neq 0\}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$	$\mathcal{D}_f \cap \{x \in \mathcal{D}_g :\ g(x) \neq 0\}$
$g \circ f$	$(g' \circ f) \times f'$	$\{x \in \mathcal{D}_f :\ f(x) \in \mathcal{D}_g\}$
f^n $(n \in \mathbb{N})$	$n \times f' \times f^{n-1}$	$\mathcal{D}_f$
$\frac{1}{f^n}$ $(n \in \mathbb{N})$	$-\frac{n \times f'}{f^{n+1}}$	$\{x \in \mathcal{D}_f :\ f(x) \neq 0\}$
f^α $(\alpha > 0)$	$\alpha \times f' \times f^{\alpha-1}$	$\{x \in \mathcal{D}_f :\ f(x) > 0\}$
e^f	$f' \times e^f$	$\mathcal{D}_f$
$\ln(f)$	$\frac{f'}{f}$	$\{x \in \mathcal{D}_f :\ f(x) > 0\}$

☞ Il est indispensable de s'entraîner à dériver correctement et rapidement; on ne peut pas se permettre de perdre un temps fou en début d'exercice pour un problème de calcul de ce type qui pénaliserait gravement la suite de l'exo.

Exercice 24. Étudier complètement la fonction définie par

$$f(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{x-1}.$$

☞ Une brève étude de fonction peut s'avérer très utile pour démontrer une inégalité sur une plage de valeurs. L'exercice suivant est une question **ultra-classique** qui apparait dans énormément d'exercices de concours et qu'il est donc absolument capital de savoir faire sans hésitation. A faire et à refaire jusqu'à plus soif!

Exercice 25. Montrer que: $\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x$.

Sélection d'exercices : Travaux Dirigés

Exercice 26. Durant la pause, un élève écrit un message inapproprié au tableau. Le professeur, soucieux de savoir qui a commis ce méfait, laisse les élèves s'exprimer:

- Jean-Michel: "C'est Jean-Claude ou Jean-Marie le coupable!"
- Jean-Claude: "Ni Jean-Paul ni moi n'avons écrit sur le tableau."
- Jean-Marie: "Jean-Michel et Jean-Claude mentent!"
- Jean-Yves: "Jean-Michel dit la vérité ou Jean-Claude dit la vérité."
- Jean-Paul: "Non, ce que dit Jean-Yves est faux."

Le professeur sait que trois élèves disent toujours la vérité et que deux mentent tout le temps. Qui est le coupable?

Exercice 27. Dans chaque cas, trouver des propositions P et Q correspondant aux cas suivants :

(1) $P \Longrightarrow Q$ est vrai et $Q \Longrightarrow P$ est vrai.
(2) $P \Longrightarrow Q$ est faux et $Q \Longrightarrow P$ est vrai.
(3) $P \Longrightarrow Q$ est faux et $Q \Longrightarrow P$ est faux.

Exercice 28.

(1) Écrire, à l'aide de quantificateurs, le fait qu'une fonction f ne prenne jamais la même valeur en deux points distincts, puis nier cette propriété.
(2) Écrire, à l'aide de quantificateurs, le fait qu'une fonction f admette un minimum, puis nier cette propriété.
(3) Écrire la négation de l'assertion suivante

« S'il fait beau, je vais me baigner dans la Seine. »

Exercice 29. Pour chacune des assertions suivantes, expliciter (à l'aide d'une courbe sommairement tracée) une fonction f vérifiant puis une autre fonction ne vérifiant pas la propriété:

(1) $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M$;
(2) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0 \Longrightarrow x \geq 0$;
(3) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 1$ ou $f(x) \leq -1$.

Exercice 30. Une commode est composée de k tiroirs et on veut y ranger n paires de chaussettes (avec $n, k \in \mathbb{N}^*$). Montrer, par l'absurde que, nécessairement, s'il y a davantage de paires que de tiroirs ($i.e$ si $n > k$), il y aura un tiroir contenant au moins deux paires de chaussettes.

Exercice 31. Compléter les pointillés par le connecteur logique $\Longleftrightarrow$, $\Longrightarrow$ ou $\Longleftarrow$.

(i) $x^2 = 4 \cdots\cdots x = 2$; (ii) $\sqrt{x}$ existe $\cdots\cdots x \geqslant 0$; (iii) $e^x = 1 \cdots\cdots x = 0$;
(iv) $|x| \leq 5 \cdots\cdots 0 \leq x \leq 5$; (v) $x \in A \cap B \cdots\cdots x \in A$; (vi) $x \in A \cup B \cdots\cdots x \in B$.

Exercice 32. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$a^2 + b^2 = 0 \Longleftrightarrow a = b = 0.$$

Exercice 33. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer, par contraposée, que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |a| < \varepsilon \Longrightarrow a = 0$$

Exercice 34. Simplifier

$$A_n = \frac{(-1)^n - (-1)^{n-1}}{(-1)^{2n} - (-1)^{2n+1}}, \qquad B_n = \frac{10^{n+1} - 9 \times 10^n - 10^{n+2}}{20 \times 10^{n-2} + 8 \times 10^{n-1} - 10^{n+1}}, \qquad C = \left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right)^2.$$

Exercice 35. Simplifier

$$(i) \ \left\lfloor \lfloor x \rfloor + \frac{4}{5} \right\rfloor; \qquad (ii) \ \frac{9 \times (-3)^{2n}}{3^{n+3}} + (-1)^n \times (-3)^{n-1}$$

Exercice 36.

(1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E_1) \qquad 16^x - 2^{2x+1} = 3.$$

(2) (a) Montrer que l'expression $1 - \sqrt{x^2 + 1}$ ne s'annule qu'en $x = 0$ et qu'elle est, ailleurs, de signe constant strictement négatif.
(b) En déduire les solutions de l'équation

$$(E_2) \qquad \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = x.$$

Exercice 37. Déterminer le domaine de définition puis résoudre.

$$(E_1) \quad \sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 5; \qquad (E_2) \quad \frac{1}{1 - \frac{x}{x-1}} - x = -1; \qquad (E_3) \quad |x - 3| + 2|x - 1| = 0.$$

Exercice 38. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 39. Montrer, par contraposée, que si A et B sont deux ensembles alors

$$(A \cap B = A \cup B) \Longrightarrow A = B.$$

Exercice 40. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction

$$x \mapsto \ln\left(e^x - e^{-x}\right);$$

Exercice 41. Déterminer l'ensemble de définition, puis étudier la parité des fonctions suivantes:

$$(i)\ f : x \mapsto x + \ln(1-x) - \ln(x+1); \qquad (ii)\ g : x \mapsto x\frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

Exercice 42. Montrer que la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ est paire

$$f(t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}.$$

Exercice 43.

(1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f, définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + \sqrt{x} - 2}.$$

(2) Montrer que

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \qquad f(x) = \frac{(\sqrt{x}+1)(x-2)}{\sqrt{x}+2}.$$

(3) En déduire que

$$\forall x \in [0;2] \setminus \{1\}, \qquad \left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x + \sqrt{x} - 2} \right| \leq 2.$$

Exercice 44. Déterminer les limites suivantes

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + x^5\right)$ (ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - \sqrt{x}\right)$ (iii) $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^2 - \dfrac{1}{x^2}\right)$

(iv) $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}\right)$ (v) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2}(1+\sqrt{x})\right)$ (vi) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2x^3 + x^2 - 2x - 1}{3x^3 + x^2 + x - 5}\right)$

(vii) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{7x+4} - 1}{4 - x^2}$ $(viii)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{3x^2}$ (ix) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x\exp(x^2) - e^{3x} + x^2\right)$

(x) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\exp(3x^2)}{x^6}$ (xi) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x+1}}{\ln(x)^4}$ (xii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(x^4)}$

$(xiii)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} - 2\ln(x) + 1$ (xiv) $\lim\limits_{x \to 0} \left[x^2 \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)\right]$ (xv) $\lim\limits_{x \to 1^+} 2\sqrt{x-1}\ln(x-1)$

Exercice 45. À l'aide de l'expression conjuguée, déterminer les limites suivantes

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - x\right)$ (ii) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{6x-3} - 3}{4 - x^2}$ (iii) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

Exercice 46. Déterminer les limites suivantes:

$$(i)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} \qquad (ii)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{e^x-1} \qquad (iii)\ \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$(iv)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\exp(x^2)-1} \qquad (v)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\ln(1+x)} \qquad (vi)\ \lim_{x\to 0^+} \left(1+x^2\right)^x$$

Exercice 47. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}.$$

(1) Étudier les variations de la fonction g_0: préciser la limite de g_0 en $+\infty$, donner l'équation de la tangente en 0, et donner l'allure de la courbe représentative de g_0.

(2) Pour $n \geqslant 1$, justifier que g_n est dérivable sur $[0,+\infty[$ et montrer que :

$$\forall x \in [0,+\infty[, \qquad g_n'(x) \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad n \geqslant 2\ln(1+x).$$

En déduire les variations de la fonction g_n lorsque $n \geqslant 1$.
Calculer soigneusement $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$.

(3) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, g_n admet un maximum sur $[0,+\infty[$ qui vaut $M_n = \left(\frac{n}{2e}\right)^n$.

Exercice 48.