Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Chapitre 10. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Ce chapitre présente la notion d'*espace vectoriel* à travers l'exemple de l'espace de référence $\mathbb{R}^n$. Cet ensemble de $n-$uplets de réels, muni de certaines opérations algébriques que l'on va préciser est alors équipé d'une *structure algébrique* permettant de faire des *combinaisons linéaires* entre éléments.
On verra en deuxième année que cette notion se généralise à d'autres ensembles que $\mathbb{R}^n$.

Naturellement, il est capital d'avoir en tête ce que sont les éléments de $\mathbb{R}^n$.
On rappelle donc que, pour tout entier $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ désigne l'ensemble des $n-$*uplets* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ dont chaque composante est un réel : pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $x_i \in \mathbb{R}$.

1 Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Définition

L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est muni de deux opérations deux opérations : une **loi de composition interne**, notée $+$ et une **loi de composition externe**, notée $\cdot$

$$+ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (u, v) & \to & u + v \end{array}, \qquad \cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (\lambda, u) & \to & \lambda \cdot u \end{array}$$

Ces deux opérations sont définies comme tel. Soient $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $v = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n), \qquad \lambda \cdot u = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n).$$

On dit que $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ est un espace vectoriel. Les éléments de $\mathbb{R}^n$ sont alors appelés des **vecteurs**. En particulier, les deux lois de composition précédentes vérifient :

(i) La loi $+$ est commutative : $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad u + v = v + u$.
(ii) La loi $+$ est associative : $\forall (u, v, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad (u + v) + w = u + (v + w)$.
(iii) Il existe un élément neutre, appelé **vecteur nul**, pour la loi $+$, noté $0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, ..., 0)$, tel que :

$$\forall u \in \mathbb{R}^n, \quad u + 0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^n} + u = u.$$

(iv) Tout élément de $\mathbb{R}^n$ admet un symétrique pour la loi $+$ c'est à dire :

$$\forall u \in \mathbb{R}^n, \exists v \in \mathbb{R}^n \quad \text{tel que} \quad u + v = v + u = 0_{\mathbb{R}^n} \quad (\text{on notera } v = -u).$$

(v) $\forall u \in \mathbb{R}^n, \quad 1 \cdot u = u$
(vi) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall u \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$
(vii) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall u \in \mathbb{R}^n, \quad (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$
(viii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$

☞ Attention, même si on note l'opération + entre deux vecteurs de la même manière que l'opération + entre deux nombres, il s'agit d'opérations différentes.

Remarque

Lorsque le contexte est clair (et uniquement dans ce cas), on allège parfois les notations en notant le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^n}$ tout simplement 0. Il est alors capital de différencier les deux. Par exemple, plutôt qu'écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \cdot x = 0_{\mathbb{R}_n},$$

on écrira

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \cdot x = 0.$$

Mais attention, le 0 dans le membre de gauche est le nombre réel 0 et le 0 dans le membre de droite est le vecteur nul $(0, 0, ..., 0)$. Cet abus de notation est pratique mais à utiliser avec le plus grand discernement. Et on sera intraitable.

On peut reformuler les propriétés des opérations + et $\cdot$ comme règles de calcul vectoriel ci-dessous.

Règle(s) de calcul

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

(i) $0 \cdot u = 0_{\mathbb{R}^n}$ et $\lambda 0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^n}$

(ii) $\lambda u = 0_{\mathbb{R}^n} \Longleftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } u = 0_{\mathbb{R}^n})$

(iii) $\lambda(-u) = (-\lambda)u = -\lambda u$

(iv) $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$

2 Combinaisons Linéaires de vecteurs

Définition

Soient $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
On dit qu'un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $u_1, \ldots, u_p$ lorsqu'on peut trouver des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que

$$v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p.$$

À retenir!

☞ Pour savoir si un vecteur v est bien une combinaison linéaire de vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$ donnés, il suffit de résoudre un certain système linéaire.
Parfois, la décomposition "se voit" mais la résolution du système donne toujours le résultat si on ne la voit pas.

Exemple

On "voit" tout de suite que $(1, 2) = 1 \cdot (1, 0) + 2 \cdot (0, 1)$ et il est alors immédiat de conclure que $(1, 2)$ est combinaison linéaire de $(1, 0)$ et de $(0, 1)$.

Exemple

Le vecteur $w = (4,2) \in \mathbb{R}^2$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $u = (2,-1)$ et $v = (3,1)$? Si on ne trouve de combinaison linéaire *immédiate* (ou évidente), on résout

$$(4,2) = \lambda(2,-1) + \mu(3,1) \iff \begin{cases} 2\lambda + 3\mu &= 4 \\ -\lambda + \mu &= 2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda &= -2/5 \\ \mu &= 8/5 \end{cases}$$

Le système a des solutions donc la réponse est oui, et on peut écrire

$$w = -\frac{2}{5}u + \frac{8}{5}v.$$

Exercice 1. Dans chaque cas, le vecteur w est-il combinaison des vecteurs u et v?

(1) Dans $\mathbb{R}^2$, $w = (1,0)$, $u = (1,1)$, $v = (1,-1)$.
(2) Dans $\mathbb{R}^2$, $w = (2,3)$, $u = (0,1)$, $v = (0,-2)$.
(3) Dans $\mathbb{R}^3$, $w = (1,2,1)$, $u = (1,0,0)$ et $v = (1,1,0)$.

Exercice 2. Montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de

$$u_1 = (1,1,2), \quad u_2 = (1,2,1), \quad \text{et} \quad u_3 = (2,1,1).$$

Peut-on remplacer u_3 par $(1,0,3)$ et garder le même résultat?

À retenir!

☞ Plutôt que dire qu'un vecteur v est combinaison linéaire d'un seul vecteur u, on dira plutôt que u et v sont **colinéaires**.
☞ Le vecteur nul est colinéaire à n'importe quel vecteur (pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $0_{\mathbb{R}^n} = 0 \cdot u$).

☠ Attention, la notion de colinéarité n'a aucun sens dès lors qu'on parle d'un nombre de vecteurs strictement supérieur à 2.

3 Familles de vecteurs

☞ Une **famille de p vecteurs** de $\mathbb{R}^n$ est un $p-$uplet $(u_1, u_2, ..., u_p)$ où chaque u_i est un vecteur de $\mathbb{R}^n$. En permutant l'ordre des vecteurs d'une famille de vecteurs, on a donc une autre famille de vecteurs. Comme on le verra avec la notion de *base* ci-après, l'ordre des vecteurs dans une famille est important.

Définition

Soit $(u_1, u_2, ..., u_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de cette famille est noté

$$\text{Vect}(u_1, u_2, ..., u_p) = \{v \in \mathbb{R}^n \ : \ v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_p u_p, \ \lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{R}\}.$$

Il se lit **espace engendré par** la famille $(u_1, u_2, ..., u_p)$. On dit que c'est un **sous-espace vectoriel** de $\mathbb{R}^n$.

Exemple

En reprenant ce qu'on a vu dans l'Exercice **??**, on peut alors écrire

$$\mathbb{R}^3 = \text{Vect}((1,1,2), \ (1,2,1), \ (2,1,1)).$$

Exemple

Les solutions d'un système linéaire (à n inconnues) forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Par exemple, en notant

$$(\mathcal{S}) \qquad \begin{cases} 2x+y+z &= 0 \\ -3x-2y-z &= 0 \\ x+y &= 0 \end{cases}$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} u=(x,y,z) \text{ solution de } (S) &\iff \begin{cases} 2x+y+z &= 0 \\ -3x-2y-z &= 0 \\ x+y &= 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2x+y+z &= 0 \\ -y+z &= 0 \\ y-z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= -z \\ y &= z \end{cases} \\ &\iff u=(-z,z,z)=z(-1,1,1) \end{aligned}$$

Et l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ s'écrit

$$\mathrm{Vect}\left((-1,1,1)\right).$$

Exercice 3. Écrire les ensembles suivants sous forme d'un Vect( ).

(1) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ x+2y-z=0\}$;

(2) $B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ x+y+z=0 \quad \text{et} \quad x+2y=0\right\}$

(3) L'ensemble C des solutions de

$$(\mathcal{S}) \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & + & 3y & = & 0 \\ & & 4y & + & z & = & 0 \end{array}\right. .$$

Propriété

Un sous-espaces vectoriel F engendré par une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est **stable** par combinaisons linéaires. En effet,

$$\forall u,v\in F,\ \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}, \qquad \lambda u+\mu v\in F.$$

☞ La stabilité d'un sous-ensemble non vide d'un espace vectoriel est en fait une définition d'un sous-espace vectoriel.

☞ Un même sous-espace vectoriel peut-être engendré par différentes familles de vecteurs, ce qu'on peut voir facilement avec l'exemple ci-dessous selon qu'on exprime x en fonction de y et z ou y en fonction de x et z:

$$\begin{aligned} \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x+y+z=0\} &= \mathrm{Vect}((-1,1,0),\ (-1,0,1)) \\ &= \mathrm{Vect}((1,-1,0),\ (0,-1,1)). \end{aligned}$$

Il en découle quelques règles de *simplification* des familles à l'intérieur d'un Vect( ).

Propriété

Soit $(u_1, u_2, ..., u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

(1) Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des réels **non nuls**, alors :
$$\text{Vect}(u_1, \cdots, u_p) = \text{Vect}(\lambda_1 u_2, \ldots, \lambda_p u_p);$$
(2) Si u_p est combinaison linéaire de $(u_1 \cdots, u_{p-1})$, alors
$$\text{Vect}(u_1, \cdots, u_{p-1}, u_p) = \text{Vect}(u_1, \cdots, u_{p-1});$$
☞ En particulier, si $u_p = 0$, alors :
$$\text{Vect}(u_1, \cdots, u_{p-1}, 0) = \text{Vect}(u_1, \cdots, u_{p-1}).$$
(3) Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des réels **avec $\boldsymbol{\lambda_1 \neq 0}$** alors :
$$\text{Vect}(u_1, u_2, ..., u_p) = \text{Vect}\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i, u_2, \ldots, u_p\right).$$

☞ Ainsi, dans un Vect( ), on peut supprimer les vecteurs qui sont combinaisons linéaires des autres, on peut remplacer un vecteur par un multiple non nul de celui-ci, ou par une combinaison linéaire des autres vecteurs dès lors qu'on ne supprime pas la *contribution* du vecteur remplacé.

Exemple

Il est facile de voir que, dans $\mathbb{R}^3$,
$$\text{Vect}((1,1,1),(1,1,0),(2,2,0)) = \text{Vect}((1,1,0),(0,0,1)).$$

Exercice 4.

(1) Montrer que : $\text{Vect}\big((4,0,-2);\ (1,2,-1);\ (-3;2;1)\big) = \text{Vect}\big((2,0,-1);\ (1,2,-1)\big)$.
(2) Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
Montrer que : $\text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4;\ e_2 + e_3;\ 2e_2 + 2e_3) = \text{Vect}(e_1 + e_4;\ e_2 + e_3)$.

3.1 Familles génératrices

Définition

Une famille $(u_1, u_2, ..., u_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est dite **génératrice** de $\mathbb{R}^n$ (ou parfois simplement génératrice) si tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire comme combinaison des éléments de la famille. Autrement dit si
$$\mathbb{R}^n = \text{Vect}(u_1, ..., u_p).$$

Exemple (très) important

La famille $(e_1, ..., e_n)$ où $e_i = (0, .., 0, 1, 0, ..)$ (avec un seul coefficient non nul égal à 1 à la $i-$ème composante) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$. En effet,
$$\forall u = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$
C'est une famille très importante, on va voir ci-après qu'il s'agit de la *base canonique* de l'espace.

☞ Tout espace vectoriel admet **une infinité** de familles génératrices.

Exercice 5.

(1) Montrer que la famille $((2,1);(-1,2))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.
(2) Montrer que la famille $(1,0,0,1),(1,0,0,-1),(0,1,1,0),(0,1,-1,0))$ est génératrice de $\mathbb{R}^4$.
(3) Montrer que la famille $((1,0,0);(1,1,0))$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Propriété

Soit $(u_1, u_2, ..., u_p)$ une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$. Alors,

(1) La famille obtenue en changeant l'ordre des vecteurs de la famille initiale est génératrice de $\mathbb{R}^n$;
(2) Pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, la famille $(u_1, u_2, ..., u_n, v)$ est encore génératrice de $\mathbb{R}^n$;
(3) Si il existe $i \in [\![1;p]\!]$ tel que u_i est combinaison linéaire des u_j $(j \neq i)$, alors la famille $(u_1, ..., u_{i-1}, u_{i+1}, ..., u_p)$ reste génératrice de $\mathbb{R}^n$.

☞ On peut alors *supprimer* les vecteurs d'une famille génératrice déjà combinaisons linéaires des autres, et qui ne permettent pas de générer de *nouveaux vecteurs*. La question est alors de savoir comment trouver (après avoir donné un sens à cela) une famille génératrice *optimale*.

3.2 Familles libres

Définition

Une famille $(u_1, u_2, ..., u_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est dite **libre** si la seule *liaison* entre les vecteurs est celle dont tous les coefficients sont nuls. Plus précisément, $(u_1, u_2, ..., u_p)$ est libre si et seulement si

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_p u_p = 0_{\mathbb{R}^n}) \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_p = 0.$$

☞ Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.
☞ Lorsqu'une famille est libre, on dit aussi que ses vecteurs sont **linéairement indépendants**.

Exemple (très) important

La famille $(e_1, ..., e_n)$ où $e_i = (0, .., 0, 1, 0, ..)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$. En effet, si $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ...\lambda_n e_n \Longleftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = 0 \Longleftrightarrow \forall i \in [\![, 1, n]\!],\ \lambda_i = 0$$

et donc la famille est bien libre.

À retenir!

☞ Si un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres, alors la famille est liée.

☞ Toute famille contenant le vecteur nul est liée.

☞ Une famille ne contenant qu'un seul vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.

☞ Si la famille ne contient que deux vecteurs (**et seulement dans ce cas**), la famille est libre si et seulement si les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

☠ Attention, ce n'est pas parce que des vecteurs sont deux à deux non colinéaires que la famille est libre. Par exemple, on voit facilement, dans $\mathbb{R}^2$, que la famille $((1,0);(0,1);(1,1))$ est liée.

Exercice 6.

(1) Montrer que la famille $((0,1),\ (1,3))$ est libre dans $\mathbb{R}^2$.
(2) Montrer que la famille $((1,3,-3),(4,2,-3),(-2,7,-6))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.
(3) Montrer que la famille $(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0))$ est libre dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 7. On considère la famille $(u,v) = ((1,0,1),(0,1,0))$ dans $\mathbb{R}^3$.

(1) Montrer que la famille est libre.
(2) Déterminer un vecteur w tel que (u,v,w) soit encore libre dans $\mathbb{R}^3$.
(3) Déterminer un vecteur w' tel que (u,v,w') soit liée.

Propriété

Soit $(u_1,u_2,...,u_p)$ une famille libre de $\mathbb{R}^n$. Alors,

(1) La famille obtenue en changeant l'ordre des vecteurs de la famille initiale reste libre;
(2) La famille obtenue en retirant un des vecteurs de la famille initiale reste libre;
(3) La famille obtenue en remplaçant un des vecteurs par un multiple **non nul** de celui-ci reste libre.
(4) Si v n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de la famille (en particulier $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$), la famille obtenue en rajoutant le vecteur v à la famille initiale reste libre.

3.3 Liens entre familles libres et familles liées

Théorème

Cardinal (maximal) d'une famille libre.
Cardinal (minimal) d'une famille génératrice.

Si $(u_1,...,u_p)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$ et $(v_1,...,v_q)$ une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$, alors $p \leq n \leq q$.

À retenir!

Une famille qui a "trop" de vecteurs (un nombre strictement supérieur à n) ne peut donc pas être libre.
Une famille qui n'a "pas assez" de vecteurs (un nombre strictement inférieur à n) ne peut donc pas être génératrice de $\mathbb{R}^n$.

Attention, ce n'est pas parce que le cardinal de la famille ne présente pas de contre-indication que la famille sera nécessairement libre ou génératrice!

☞ La preuve est proposée en exercice, pour les étudiant.e.s déjà très à l'aide à manipuler des choses abstraites. On ne s'y attaquera donc pas forcément tout de suite.

Exercice 8. (*) On considère une famille $(u_1,...,u_p)$ libre (de p vecteurs de) $\mathbb{R}^n$ et une famille $(v_1,...,v_q)$ génératrice de $\mathbb{R}^n$ formée de q vecteurs.

(1) Montrer par l'absurde qu'il existe $j \in [\![1,q]\!]$ tel que $(u_1,..,u_{p-1},v_j)$ est encore une famille libre.

(2) (a) Montrer qu'on peut alors *piocher* des dans la famille génératrice des vecteurs $v_{j_1},v_{j_2},...,v_{j_p}$ de sorte à construire une nouvelle famille libre.
(b) Montrer que les indices j_k sont deux à deux distincts.
(c) Quel est le cardinal de la famille $(v_{j_1},..,v_{j_p})$? Conclure que $p \leq q$.

(3) Conclure qu'on a bien $p \leq n \leq q$. (*On pourra considérer une famille de vecteurs bien choisie qu'on sait être libre et génératrice.*)

3.4 Bases de $\mathbb{R}^n$

Définition

La famille $(u_1, u_2, ..., u_n)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est appelée **base** de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs u_i:

$$\forall\ v \in \mathbb{R}^n,\ \exists!\ (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i.$$

De manière équivalente, la famille forme une base de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si elle est à la fois **libre et génératrice** de $\mathbb{R}^n$.

On appelle alors le $n-$uplet $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ les **coordonnées** de v dans la base $(u_1, u_2, ..., u_n)$.

Exercice 9. Montrer que $\mathcal{F} = ((1,0,0);\ (1,1,0);\ (1,1,1))$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Quelles sont les coordonnées de $(1,1,0)$ dans cette base ?

Exemple (très) important

On appelle **Base canonique de** $\mathbb{R}^n$ la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$, où

$$e_1 = (1,0,...,0), \qquad e_2 = (0,1,0,...,0), \quad \ldots, \quad e_n = (0,0,...,0,1).$$

☞ La base est dite **canonique** dans le sens où elle apparait comme une base *naturelle* de $\mathbb{R}^n$: les coordonnées d'un vecteur dans la base canonique ne sont autres que les *composantes* (ou paramètres) de ce vecteur. Par exemple,

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$,

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

Remarque

On note les coordonnées d'un vecteur $u = (x_1, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans une base comme un vecteur colonne $U = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Ceci permet, grâce aux coordonnées dans la base canonique d'identifier l'espace $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; l'application qui à u associé U est bijective.

Théorème

$\mathbb{R}^n$ admet une infinité de bases.
Toutes ces bases ont le même cardinal : elles sont toutes formées de n vecteurs.

☞ Le nombre de vecteurs qu'il faut pour former une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ s'appelle alors la **dimension** de $\mathbb{R}^n$ et on peut écrire

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n.$$

Propriété

Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, ..., u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Si $p = n$, alors

$$\mathcal{F} \text{ est une base de } \mathbb{R}^n \iff \mathcal{F} \text{ est libre } \iff \mathcal{F} \text{ est génératrice de } \mathbb{R}^n.$$

☞ Ce résultat est **très pratique**. Lorsqu'on a le *bon nombre de vecteurs*, on choisit en général de montrer seulement le caractère libre ou générateur pour montrer qu'une famille forme une base au lieu d'avoir à vérifier les deux!

Exercice 10. Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$, où

$$v_1 = (0, -1, 1), \quad v_2 = (2, 1, -1), \quad \text{et} \quad v_3 = (3, 0, -1).$$

3.5 Bases d'un sous-espace

Considérons $F = \text{Vect}(u_1, u_2, .., u_p)$ un soues-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ enegendré par une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Cette famille est dite génératrice de F.
En revanche, elle n'est pas nécessairement libre.
Si elle l'est, on dit qu'elle forme une **base** de F. Si elle ne l'est pas, on en extrait une sous-famille libre qui reste génératrice de F pour en former une base.
Dans tous les cas, on appelle **base** de F toute famille libre et génératrice de F.
Comme précédemment, toutes les bases de F ont le même nombre d'éléments qu'on appelle la **dimension** de F.

Exercice 11. Pour chacun des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ ci-dessous, déterminer une base et préciser la dimension.

(i) $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x + 2y + 3z = 0\right\}$, $\quad (ii)$ $G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x + y + z = 0 \text{ et } x - 2y = 0\right\}$.

À retenir!

☞ Attention, contrairement à $\mathbb{R}^n$ on ne connait pas *a priori* la dimension des sous-espaces, il faut donc résoudre l'équation pour trouver une famille génératrice en premier lieu puis ensuite vérifier que la famille obtenue est libre pour enfin conclure qu'on a une base et le cardinal de celle-ci permettra d'en expliciter la dimension.

Propriété

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Alors,

(i) Si $F \subset G$, alors $\dim(F) \leq \dim(G)$;
(ii) Si $F \subset G$ et si $\dim(F) = \dim(G)$, alors $F = G$.

Exercice 12. Montrer que les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants sont égaux

$$F = \text{Vect}((1, 1, 3), (1, -1, -1)), \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}\left((1, 0, 1), (2, -1, 0)\right).$$

Exercice 13. (*) Soit (F_k) une suite croissante (au sens de l'inclusion) de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. On note (d_k) la suite (numérique) des dimensions, *i.e.* $d_k = \dim(F_k)$.

(1) Montrer que la suite (d_k) est convergente.
(2) Montrer qu'elle est *stationnaire*.
(3) Montrer qu'il existe un entier p tel que, pour tout $k \geq p$, $F_k = F_p$.

Exercice 14. On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad 2x + 3y - 5z = 0\right\}, \quad G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x - y + z = 0\right\}.$$

Les ensembles $F \cap G$ et $F \cup G$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$? Si oui, expliciter une base et préciser leur dimension.

Propriété

L'intersection de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ est encore un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (de dimension inférieure ou égale).

☞ Attention, la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est (en général) pas un sous-espace vectoriel.

3.6 Rang d'une famille de vecteurs

Définition

Si $(u_1, ..., u_p)$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, le **rang** de la famille est la dimension de l'espace qu'elle engendre :

$$\operatorname{rg}(u_1, ..., u_p) = \dim(\operatorname{Vect}(u_1, ..., u_p)))$$

Naturellement,

$$\operatorname{rg}(u_1, ..., u_p) = p \iff (u_1, ..., u_p) \text{ est libre}$$

4 Applications linéaires

4.1 Définition et premières propriétés

On sait qu'une *application linéaire* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est de la forme $f : x \mapsto ax$, où $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre constant. Ce dernier paragraphe généralise la notion d'application linéaire pour des applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

Définition

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application. On dit que f est linéaire si

(i) $\forall u, v \in \mathbb{R}^n,\ f(u+v) = f(u) + f(v)$;
(ii) $\forall u \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Remarque

(1) Les conditions (i) et (ii) signifient que f préserve les combinaisons linéaires. On peut d'ailleurs remplacer (et c'est d'ailleurs ce que l'on fait quand on veut montrer qu'une application est bien linéaire) ces deux conditions par la condition équivalente

$$(i') \qquad \forall u, v \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

(2) Il est capital de remarquer que si f est linéaire alors

$$f(0_{\mathbb{R}^n}) = f(0 \times 0_{\mathbb{R}^n}) = 0 \times f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{R^m}.$$

☞ Le vecteur nul (de l'espace de départ) est toujours envoyé sur le vecteur nul (de l'espace d'arrivée) par une application linéaire.

Exercice 15. Pour chacune des applications suivantes, dire si elle est linéaire ou non.

(1) $f_1 :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (2x, x+y)$;
(2) $f_2 :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x+y, x-2y, 0)$;
(3) $f_3 :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x+y, x-2y, 1)$;
(4) $f_4 :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto 7x$;
(5) $f_5 :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 - y^2$;

Exemple (très) important

Application linéaire associée à une matrice.

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. L'application $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ définie par
$$f_A(u) = v$$
où v est le vecteur de $\mathbb{R}^m$ de coordonnées dans la base canonique AU avec U coordonnées de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, est une application linéaire.

☞ Par exemple si
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
l'application f_A associée à A est l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par
$$f((x, y, z)) = (x + 2z, -x + y - z, z).$$

☞ La proposition suivante permet de voir qu'on peut toujours se ramener à ce type d'application linéaire. Autrement dit, toute application linéaire revient à faire une multiplication à gauche par une certaine matrice.

Propriété

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. On note $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m)$ celle de $\mathbb{R}^m$.

Il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telle que $f = f_A$.

La matrice A est appelée **matrice de f dans les bases canoniques**. Les colonnes de A sont les coordonnées des images par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ exprimées dans la base $\mathbb{R}^m$. On la note $A = \mathrm{Mat}\,(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

$$A = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & & f(e_n) \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{coordonnée selon } \varepsilon_1 \\ \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } \varepsilon_m \end{array} \end{array}$$

Exercice 16. Pour chacune des applications linéaires suivantes, écrire la matrice correspondante dans les bases canoniques.

(1) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2x - y, x + 3x)$;
(2) $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x + y - z, 3x, 2y - z)$;
(3) $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (y + 2z, 5x - y + z)$.

☞ La matrice de l'application identité $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est naturellement la matrice identité I_n.

Remarque

Si on choisit souvent en premier lieu de représenter une application linéaire par sa matrice dans les bases canoniques, on peut (et on est souvent amené à le faire) représenter l'application linéaire dans d'autres bases. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont des bases respectives de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$, la matrice de f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ (parfois notée $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F})$) est la matrice dont les colonnes sont les images des des vecteurs de la base de départ exprimées dans la base d'arrivée. On aura l'occasion d'en reparler.

Exercice 17. Soient $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2x - y, x + y)$, $\varepsilon_1 = (1, 1)$ et $\varepsilon_2 = (1, -1)$.

(1) Écrire la matrice A de f dans la base canonique.
(2) Montrer que $\mathcal{E} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
(3) Écrire la matrice B de f dans la base $\mathcal{E}$.

Comme A et B représentent le même endomorphisme dans des bases différentes, on dit que A et B sont semblables.

Propriété

Soient $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ deux applications linéaires de matrices respectives (dans les bases canoniques) A et B. Alors, l'application $g \circ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est linéaire et sa matrice, dans les bases canoniques, est la matrice AB.

Corollaire

Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire dont la matrice (dans la base canonique) est A. Alors, f est bijective si et seulement si A est inversible. De plus, f^{-1} est l'application linéaire dont la matrice, dans la base canonique, est A^{-1}.

Exercice 18. Montrer que les applications linéaires suivantes sont bijectives et préciser leur bijection réciproque.

(1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + 2y, -x + y)$;
(2) $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, -x + 2y - 2z, 3y + z)$.

4.2 Noyau et Image d'un application linéaire

Définition

Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire.
On appelle **noyau** de f, et on note $\mathrm{Ker}(f)$ l'image réciproque de $\{0_{\mathbb{R}^m}\}$:

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0_{\mathbb{R}^m}\} = f^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^m}\}).$$

On appelle **image** de f, et on note $\mathrm{Im}(f)$, l'image directe de $\mathbb{R}^n$ par f:

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R}^m : \exists x \in \mathbb{R}^n,\ y = f(x)\} = f(\mathbb{R}^n).$$

On appelle **rang** de f la dimension de son image:

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Propriété

Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Alors, $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$.

À retenir!

☞ En pratique, pour déterminer le noyau de f on résout l'équation $f(u) = 0$ et pour déterminer l'image de f (car f est linéaire) on regarde l'espace vectoriel engendré par $f(e_1), .., f(e_n)$:

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)).$$

Propriété

(Critères d'injectivité et de surjectivité).

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Alors,

(i) f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
(ii) f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^m$ si et seulement si $\operatorname{rg}(g) = m$.

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, y - z)$.

(1) Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques.
(2) Résoudre $f(x) = 0$. En déduire une base de $\operatorname{Ker}(f)$. L'application est-elle injective?
(3) Déterminer trois vecteurs u, v, w de $\mathbb{R}^2$ tels que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(u, v, w)$. En déduire une base de l'image de f. L'application est-elle surjective?

4.3 Le théorème du rang et ses conséquences

Le résultat suivant établit un lien entre image et noyau.

Théorème

Théorème du rang.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Alors

$$\dim(\operatorname{Ker}(f)) + \operatorname{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^n).$$

Exercice 20. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire.

(1) On suppose $n \geq p$. L'application peut-elle être surjective? Injective?
(2) On suppose $n \leq p$. L'application peut-elle être surjective? Injective?
(3) Montrer que si f est bijective alors, nécessairement, $n = p$.

Définition

Lorsque $n = m$, une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est appelée un **endomorphisme** de $\mathbb{R}^n$.

Dans le cas particulier d'un endomorphisme, il découle du théorème du rang le résultat crucial suivant.

Théorème

Endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Alors, on a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} f \text{ est injective} &\iff \operatorname{Ker}(f) = \{0\} \\ &\iff \operatorname{rg}(f) = n \\ &\iff \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^n \\ &\iff f \text{ est sujective} \\ &\iff f\text{est bijective} \\ &\iff \text{toute matrice représentant } f \text{ est inversible} \end{aligned}$$

☞ Un endomorphisme bijectif s'appelle un **automorphisme**.

4.4 Noyau, Image et rang d'une matrice

Dans cette section on considère une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
On peut alors associer à cette matrice une application linéaire, que l'on a précédemment notée f_A, de $\mathbb{R}^n$dans $\mathbb{R}^m$ et considérer son noyau, son image, son rang. Par abus de notation, on parle alors du noyau de la matrice, de l'image de la matrice et du rang de celle-ci.
Plus précisément, on a les définition suivantes.

Définition

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. On introduit les ensembles suivants.

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ u = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

En notant $c_i = (a_{1,i}, a_{2,i}, ..., a_{n,i})$ le vecteur dont les coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^m$ est le vecteur colonne correspondant à la $i-$ème colonne de A

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(c_1, c_2, .., c_n)$$

et

$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A)) = \dim(\mathrm{Vect}(c_1, c_2, .., c_n)).$$

☞ La $i-$ième colonne de A n'est rien d'autre que le vecteur colonne coordonnées de l'image par f_A du $i-$ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$: $f_A(e_i) = c_i$.

Théorème

Théorème du rang pour les matrices.

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Alors

$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A) = n.$$

Corollaire

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{rg}(A) = n \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(A) = \{0_{\mathbb{R}^n}\} \end{aligned}$$

Exercice 21. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sans aucun calcul, déterminer l'image, le rang et le noyau de A. La matrice est-elle inversible?

Propriété

Une matrice et sa transposée ont même rang.

Autres exercices

Exercice 22. Montrer que la famille $((1, 0, 0),\ (1, 1, 0),\ (1, 1, 1))$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 23. Les familles suivantes sont-elles libres ou liées? Préciser leur rang.

(1) $((4,-16,10);\ (4,-5,3))$ dans $\mathbb{R}^3$.
(2) $((-1,0,1);\ (1,-1,1);\ (0,1,2))$ dans $\mathbb{R}^3$.
(3) $((1,1,1,1);\ (1,2,3,4);\ (1,2,8,16))$ dans $\mathbb{R}^4$.
(4) $((2,2,2);(0,1,1);(1,1,0);(1,1,1))$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 24. Montrer l'égalité des ensembles F et G définis ci-dessous

$$F = \mathrm{Vect}\left((1,1,0);(1,2,1)\right), \quad \text{et} \quad G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x+y-z=0\right\}.$$

Exercice 25. Montrer que la famille (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$, où

$$u = (-1,2,0), \quad v = (3,-5,-1), \quad w = (0,1,-2).$$

Expliciter les coordonnées d'un vecteur (x,y,z) dans cette nouvelle base.

Exercice 26. Écrire la matrice de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1,e_2,e_3\}$ puis celle dans la base $\mathcal{F} = \{-e_1, e_1-e_2, -e_1+e_2+4e_3\}$, où

$$f(x,y,z) = (x+2y-z, -y+z, 3z).$$

Exercice 27. Soit $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $g:\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ deux applications linéaires. Montrer que

$$g \circ f = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g).$$

Exercice 28. On considère l'application $u:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $(x,y,z) \mapsto (-x+y, x-y, -x+z, -y+z)$.
(1) Montrer que u est linéaire et préciser sa matrice dans les bases canoniques.
(2) On note $\mathcal{B} = \{e_1,e_2,e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = \{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4\}$ celle de $\mathbb{R}^4$.
  (a) Montrer que $\mathcal{F} = \{\varepsilon_1,\varepsilon_2,u(e_1),u(e_2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
  (b) Écrire la matrice de u de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{F}$.

Exercice 29. On note $\{e_1,e_2,e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on introduit les vecteurs

$$w_1 = (1,-3,0), \quad w_2 = (-1,2,0), \quad \text{et} \quad w_3 = (0,0,1).$$

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(e_1) = w_1, \quad f(e_2) = w_2 \quad \text{et} \quad f(e_3) = w_3.$$

(1) Exprimer w_1, w_2 et w_3 en fonction de e_1, e_2 et e_3.
(2) En déduire la matrice de f dans la base canonique.
(3) Expliciter $f(x,y,z)$ en fonction de x, y et z.
(4) Donner une base de noyau de f et une base de son image.
(5) L'application est-elle injective? surjective?

Exercice 30. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Justifier, **sans aucun calcul** que f est un automorphisme.
(2) Vérifier que $f \circ f \circ f \circ f = \mathrm{Id}$ (sans aucun calcul non plus) et en déduire l'expression de A^{-1} en fonction de A.
(3) Déterminer $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $E_{-1} = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$.

Exercice 31. (***) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique, notée N vérifie $N^2 \neq 0$ et $N^3 = 0$ (*On dit que N est nilpotente d'ordre* 3).
(1) Montrer qu'il existe un vecteur $u \neq 0$ tel que $f^2(u) \neq 0$. En déduire qu'en particulier $f(u) \neq 0$. Que vaut $f^3(u)$?
(2) Montrer qu'alors $\mathcal{F} = \{u, f(u), f^2(u)\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de f dans cette base?
(3) Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ et que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 32. (Extrait du DM n°13, Printemps 2017) On considère, dans $\mathbb{R}^4$,

$$v_1 = (1,3,-2,2), \quad v_2 = (2,7,-5,6), \quad v_3 = (1,2,-1,0), \quad \text{et} \quad F = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}.$$

(1) Montrer que v_3 est combinaison linéaire de v_1 et v_2. En déduire une base de F et sa dimension. De donner l'équation (ou le système d'équations) caractérisant F.
(2) Donner une base du sous-espace G suivant

$$G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ 4x - 2y + t = 0\right\}.$$

Exercice 33. Soit $\varphi : \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(x,y,z) = (2x - y + z, 3x + 2y - 3z)$. On note $\mathcal{B}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_2 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ celle de $\mathbb{R}^2$.

(1) Déterminer la matrice A de φ dans les bases canoniques.
(2) On introduit les familles de vecteurs $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ et $\mathcal{G} = \{g_1, g_2\}$ définies par

$$f_1 = e_2 - e_3, \quad f_2 = -e_1 + e_3, \quad f_3 = e_1 + e_2$$

et

$$g_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad g_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

 (a) Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que $\mathcal{G}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
 (b) Expliciter la matrice B de ϕ de la base $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{G}$.

(3) On introduit les matrices

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

 (a) Vérifier que P et Q sont inversibles et préciser P^{-1} et Q^{-1}.
 (b) Que vaut la matrice $Q^{-1}AP$?

Exercice 34. (Extrait du DM n°17, Printemps 2016) On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$. L'endomorphisme est-il injectif?
(2) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$. L'endomorphisme est surjectif?
(3) Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. En déduire que $f^n = 0$, pour $n \geq 2$.

Exercice 35. Dans $\mathbb{R}^4$, on note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique et on considère l'endomorphisme $f\, \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ défini par

$$f(e_1) = e_1 + e_2 + e_4, \quad f(e_2) = f(e_1) - e_3, \quad f(e_3) = -e_1 + e_2, \quad \text{et} \quad f(e_4) = -3e_1 - 2e_2 + e_3 - 2e_4.$$

(1) Écrire la matrice K de f dans la base $\mathcal{B}$.
(2) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. En déduire $\mathrm{Im}(f)$. Que peut-on dire de l'inversibilité de K?
(3) Déterminer la matrice de $f^2 = f \circ f$ dans la base canonique.
(4) On introduit alors les vecteurs

$$v_1 = e_1, \quad v_2 = f(e_1), \quad v_3 = e_3, \quad v_4 = f(e_3).$$

 (a) Montrer que la famille $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.
 (b) Exprimer, pour $i = 1,2,3,4$, $f(v_i)$ en fonction de v_1, v_2, v_3 et v_4. En déduire la matrice de f, notée L, dans la base $\mathcal{C}$.

(5) On introduit la matrice P dont les colonnes sont les vecteurs de la base $\mathcal{C}$.
 (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
 (b) Que vaut $P^{-1}KP$?

Exercice 36. On considère trois suites $(un), (v_n)$ et (w_n) définies par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1 \\ v_0 & = & 1 \\ w_0 & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & u_n + 2v_n - w_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n + 4v_n - 2w_n \\ w_{n+1} & = & -u_n - 2v_n + w_n \end{array}\right.$$

On introduit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

et on considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, c'est à dire que si un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ a pour coordonnées le vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{3,1}$ dans la base canonique, alors $f(u)$ a pour coordonnées AX dans la base canonique.

(1) Déterminer l'expression de $f(x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(2) (a) Calculer $A^2 - 6A$.
Montrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que A n'est pas inversible.
(b) Déterminer une base (u_1, u_2) de $\text{Ker}(f)$.
(c) Quel est alors le rang de f?

(3) (a) On pose $u_3 = e_1 + 2e_2 - e_3$. Calculer $f(u_3)$ et exprimer le résultat en fonction de u_3.
(b) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
(c) Expliciter la matrice D de f dans la base $\mathcal{F}$.

(4) On note P la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs u_1, u_2 et u_3 dans la base $\mathcal{B}$ (dans cet ordre). Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1} à l'aide d'un pivot de Gauss simultané.

(5) (a) Vérifier par le calcul que $A = PDP^{-1}$.
(b) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

(c) Expliciter la matrice A^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(6) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.
(a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$. Quelle est la valeur de X_0?
(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n = A^n X_0$.
(c) Donner les expressions des termes généraux des trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) (pour $n \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 37. (**) Soit $(v_1, v_2, ..., v_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel E de dimension finie $m \geq n$. Pour $k \in [\![1; n-1]\!]$, on pose $w_k = v_k + v_{k+1}$ et $w_n = v_n + 1$. Montrer que la famille $(w_1, w_2, ..., w_n)$ est libre si et seulement si n est impair.

Exercice 38. (***) Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $BA = I_2$.

Exercice 39. (**) Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $f \circ f = 0$.

(1) Montrer que $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$.

(2) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.