Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Chapitre 11. Intégration sur un segment

Dans tous le chapitre, on appelle *segment* un intervalle fermé et borné de la forme $[a, b]$ (où $a < b$ sont des réels).

1 Notion de primitive

Définition

On dit que la fonction F est une **primitive** de la fonction f sur l'intervalle I si F est dérivable sur I et si, pour tout $x \in I$,
$$F'(x) = f(x).$$

Propriété

Si F est une primitive de f, alors, pour tout réel κ, $x \mapsto F(x) + \kappa$ est encore une primitive de f. En particulier, si une fonction admet une primitive, elle en admet finalement une infinité.

Exemple

(1) La fonction $F_1 : x \mapsto x^3 + 2x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 3x^2 + 2$ sur $\mathbb{R}$.
(2) La fonction $F_2 : x \mapsto x^3 + 2x - 1711$ est encore une primitive de la fonction $x \mapsto 3x^2 + 2$ sur $\mathbb{R}$.
(3) La fonction $F_3 : x \mapsto 2\sqrt{x}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

☞ Une question naturelle est de savoir quelles sont les fonctions qui admettent des primitives, et comment les trouver.

☞ L'un des objectifs de ce chapitre est notamment de garantir l'existence de primitives pour des fonctions *continues*.

Une première observation concernant l'existence de primitives serait une lecture *inversée* des formules de dérivations. C'est à dire, partant d'une expression correspondant à la dérivée d'une fonction usuelle, obtenir une primitive en prenant une fonction dont la dérivée provient.

Dans le tableau suivant, c désigne une constante arbitraire (appelée **constante d'intégration**).

À connaître sur le bout des doigts

Fonction	Sur l'intervalle	Primitives
$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto x + c$
$x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{x^2}{2} + c$
$x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$x \mapsto x^a$ $(a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + c$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \ln(x) + c$
$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x + c$

☞ Bien sûr, si on a besoin d'une seule primitive, on peut choisir arbitrairement la constante d'intégration. En général on choisit $c = 0$, pour simplifier les calculs.

Exercice 1. Soient a, b deux paramètres positifs.
Déterminer, sur l'intervalle $[b; +\infty[$ une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{ab^a}{x^{a+1}}$.

2 Intégrale sur un segment - Généralités

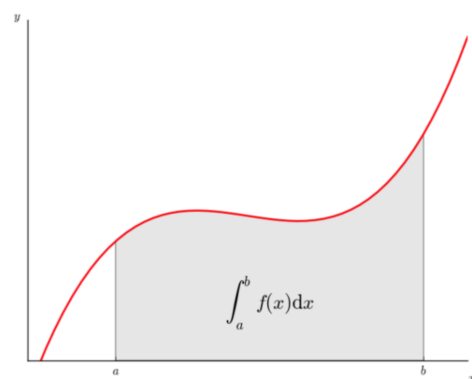
2.1 Intégrale d'une fonction positive - Aire sous la courbe

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive (*i.e.* $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$). Soient $a, b \in I$ avec $a < b$. On définit l'**intégrale** de f entre a et b, que l'on note

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

comme l'aire de la surface délimitée par les droites d'équation $x = a$, $x = b$, l'axe des abscisses et la courbe de f.



☞ Dans l'expression qui définit l'intégrale, x est une variable muette. Cela signifie qu'on peut la remplacer sans aucun problème par une autre lettre. On peut écrire par exemple

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

☞ Si $a > b$, on donne un sens à l'intégrale en posant

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t.$$

☞ La définition de l'intégrale assure notamment que $\displaystyle\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 2. Que vaut, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}t$?

Exercice 3. Calculer, à partir de la définition précédent, $\displaystyle\int_{-1}^2 |x|\mathrm{d}x$.

Exercice 4. Soit f une fonction positive définie sur $[a,b]$. Calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}t$.

Définition

Si f est continue mais pas nécessairement positive, on peut alors l'écrire comme différence de deux fonctions positives (correspondant aux parties positives et négatives de la fonction)

$$f = f^+ - f^-$$

et l'intégrale de f est alors la différence des intégrales de f^+ et f^-:

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f^+(t)\mathrm{d}t - \int_a^b f^-(t)\mathrm{d}t.$$

Il découle immédiatement et simplement de cette définition de l'intégrale des propriétés cruciales.

2.2 Premières propriétés

Propriété

Relation de Chasles.

Soient I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $a, b, c \in I$. Alors,

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Propriété

Linéarité de l'intégrale.
Soient I un intervalle, $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, pour tous $a, b \in I$,

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

et

$$\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Propriété

Positivité de l'intégrale.
Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive (*i.e.* pour tout $x \in I$, $f(x) \geq 0$). Alors, pour tous $a, b \in I$,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geq 0.$$

Corollaire

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et positive.

Alors, si f non identiquement nulle $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t > 0$.

Ou encore

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0 \Longleftrightarrow \forall t \in [a,b],\ f(t) = 0$$

Corollaire

Soient I un intervalle et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq g(x)$. Alors, pour tous $a, b \in I$,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Propriété

Inégalité triangulaire.
Soient I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, pour tous $a, b \in I$,

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

2.3 Intégrale d'une fonction continue et primitives

Théorème

Théorème fondamental de l'analyse.

Soient I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in I$. Alors

$$F : x \in I \longmapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

et **la** primitive de f qui s'annule en a.
À ce titre F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

La preuve, faite en classe, est très instructive et utilise un encadrement de l'intégrale par l'aire de rectangles et la continuité de f. Ce résultat se généralise à toute fonction continue, mais la preuve est ici admise.

Corollaire

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une (infinité de) primitive(s) sur I

Corollaire

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et G une primitive de f. Alors,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = G(b) - G(a).$$

☞ Il est fréquent d'utiliser la notation suivante. Si $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, on note $[g]_a^b = g(b) - g(a)$. Ainsi, on peut écrire le calcul de l'intégrale sous la forme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b.$$

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes

$$(i) \int_0^1 u\mathrm{d}u, \qquad (ii) \int_{1/2}^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}, \qquad (iii) \int_{-1}^1 x^3\mathrm{d}x.$$

Exercice 6. (Une preuve d'une limite usuelle)

(1) Soit $x > 0$ fixé. Montrer que, pour tout réel $t \in [0, x]$,

$$\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+t} \leq 1.$$

(2) En intégrant par rapport à t entre 0 et x l'inégalité précédente, montrer que

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

(3) Retrouver alors un résultat bien connu.

Exercice 7. (D'après **EML 1993**)
Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale

$$J_n = \int_0^1 xe^{-x^2}(1-x)^n \mathrm{d}x.$$

(1) Déterminer les variations de la fonction $x \longmapsto xe^{-x^2}$ sur $[0;1]$.
(2) En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{\sqrt{2e}(n+1)}.$$

(3) En déduire la limite de la suite (J_n).

2.4 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

On définit l'intégrale d'une fonction continue par morceaux de façon évidente; on calcule l'intégrale sur chaque "morceau" où la fonction est continue, puis on fait la somme.

Exemple

On définit une fonction f sur $[0,1]$ en posant $f(x) = x$ si $x \in [0,1]$ et $f(x) = -x$ si $x \in [1,2]$. Alors f est continue par morceaux sur $[0,2]$ et:

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 -x\,\mathrm{d}x \\ &= -1.\end{aligned}$$

3 Méthodes de calcul d'intégrales

Si on peut parfois facilement trouver une primitive de la fonction que l'on cherche à intégrer à l'aide de combinaisons de fonctions élémentaires, ce n'est pas toujours le cas (et c'est parfois même impossible - la fonction $x \mapsto \exp(-x^2)$ par exemple). Ainsi, on présente ici quelques techniques de calcul pour les fonctions qui ne paraissent pas, de prime abord, triviales à intégrer.

3.1 Reconnaître une dérivée

On sait que si u est une fonction dérivable, la dérivée de $\ln(u)$ (sous réserve que $\ln(u)$ ait un sens) est $\frac{u'}{u}$. On sait aussi que la dérivée de e^u est $u'e^u$. Et on sait que la dérivée de u^a (ù a est une constante) est, sous réserve que u^a ait un sens, au^{a-1}. On peut présenter ces résultats "à l'envers" pour obtenir le tableau suivant

Fonction	Primitives	Remarques
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u) + c$	on suppose que u est à valeurs > 0
$u'e^u$	$e^u + c$	
$u'u^a$	$\frac{1}{a+1}u^{a+1} + c$	on suppose que u est à valeurs > 0 et que $a \neq -1$

Exercice 8. Calculer les intégrales

$$(i)\ \int_0^1 2x(x^2+1)^4\mathrm{d}x, \qquad (ii)\ \int_e^3 \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}, \qquad (iii)\ \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x;$$

$$(iv)\ \int_0^1 (2x-1)e^{x^2-x+1}\mathrm{d}x; \qquad (v)\ \int_0^2 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^3}}\mathrm{d}t; \qquad (vi)\ \int_2^3 \frac{2t}{1-t^2}\mathrm{d}t.$$

3.2 Intégration par parties

Théorème

Formule d'intégration par parties.

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$. Alors,

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

☞ On pourra retenir la formule d'intégration par parties sous la forme abrégée

$$\int uv' = [uv] - \int u'v.$$

Ainsi, l'intégration par partie ramène l'intégration de uv' à celle de $u'v$.

Exemple

A priori, il n'est pas évident de calculer une primitive de la fonction $x \mapsto xe^x$. Une intégration par parties permet de le faire. Posons $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$. On a donc $u'(x) = 1$ et on convient que $v(x) = e^x$. Par intégration par parties

$$\int_0^t xe^x\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_0^t - \int_0^t u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [xe^x]_0^t - \int_0^t e^x\mathrm{d}x = te^t - [e^x]_0^t = te^t - e^t + 1.$$

Ainsi, la primitive de $x \mapsto xe^x$ qui s'annule en 0 est $t \mapsto te^t - e^t + 1$ (on peut d'ailleurs le vérifier facilement a posteriori).

Exercice 9. (IPP, niveau 1)

(1) À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale

$$\int_1^e x\ln(x)\mathrm{d}x.$$

(2) À l'aide d'une intégration par parties, déterminer la primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ de ln qui s'annule en 1.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une ou plusieurs IPP successives, calculer les intégrales suivantes

$$(i)\ \int_1^e t^n\ln(t)\mathrm{d}t, \quad (ii)\ \int_0^1 (x^2+x)e^x\mathrm{d}x, \quad (iii)\ \int_1^e t^n(\ln t)^2\mathrm{d}t.$$

Exercice 11. À l'aide de plusieurs intégrations par parties successives, montrer que

$$\int_0^1 u^3(1-u)^3\mathrm{d}u = \frac{1}{20}\int_0^1 u^6\mathrm{d}u = \frac{1}{140}.$$

Exercice 12. Soit f la fonction définie sur $[0;1[$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

(1) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0;1[$.

(2) (a) Soit $x \in]0;1[$. Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t,$$

où $f^{(0)} = f$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}$ désigne la dérivée $k-$ième de f.
(*On pourra s'aider d'une intégration par parties.*)

(b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in [0;1[, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}.$$

(c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0,1[$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k + \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t.$$

3.3 Changement de variable

Théorème

Formule de changement de variable.

Soient φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$ et f une fonction continue sur l'intervalle $\varphi([a;b])$. Alors,

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

✎ En pratique, quand on fait un changement de variable pour calculer une intégrale du type

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x,$$

on commence par écrire "posons $u = u(x)$". Ensuite, on justifie que la fonction u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle d'intégration puis on utilise la formule mnémotechnique

$$\mathrm{d}u = u'(x)\mathrm{d}x.$$

Enfin, on ajuste les bornes d'intégration en remarquant que si x parcourt l'intervalle $[a,b]$, alors $u = u(x)$ parcourt l'intervalle $[u(a), u(b)]$.

Exemple

Calculons

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1}.$$

On pose $t = x+1$. On a donc $\mathrm{d}t = 1 \cdot \mathrm{d}x = \mathrm{d}x$. Donc

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Puisque x parcourt l'intervalle $[0,1]$, $t = x+1$ parcourt $[1,2]$. Finalement,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = [\ln t]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2).$$

Exercice 13. Calculer, avec un changement de variable, les intégrales

$$(i)\ \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2t+1}, \quad (ii)\ \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t, \quad (iii)\ \int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x, \quad (iv)\ \int_1^x \frac{\ln(t)^n}{t}\mathrm{d}t.$$

Exercice 14. Montrer, à l'aide d'un changement de variable affine, que la fonction $G:\ x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t$ (est bien définie sur $\mathbb{R}$ puis qu' elle) est paire.

Exercice 15. À l'aide du changement de variable $u = 1/x$, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^n \frac{1}{x^2}\exp\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

Exercice 16. Soit f une fonction continue sur un intervalle de la forme $[-a, a]$.

(1) Démontrer que si f est impaire, son intégrale entre $-a$ et a est nulle;

(2) Démontrer que si f est paire, son intégrale entre $-a$ et a vaut le double de son intégrale entre 0 et a.

4 Autres exercices

Exercice 17. On pose, pour tout entier naturel n, $\quad I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^t \mathrm{d}t$.

(1) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $I_n = I_{n-1} - \dfrac{1}{n!}$.

(2) En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a la relation $I_n = e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

(3) À l'aide d'un encadrement de l'intégrale I_n, montrer que $I_n \longrightarrow 0$, $n \to +\infty$.

(4) Déterminer alors la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Exercice 18. On pose, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t, \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2)\mathrm{d}t.$$

(1) Calculer I_1 puis montrer que la suite (I_n) converge vers 0.

(2) À l'aide d'une IPP, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $J_n = \dfrac{\ln(2)}{n+1} - \dfrac{2}{n+1}I_{n+2}$.

(3) En déduire la convergence de la suite (J_n).

(4) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nJ_n$.

Exercice 19. On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

(1) Justifier que tous les termes de la suite (I_n) sont bien définis.

(2) Déterminer la limite de la suite (I_n).

(3) Montrer que

$$I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}.$$

(4) À l'aide d'une intégration par parties astucieuse, montrer que

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{2}I_n - \frac{1}{2e}.$$

(5) En déduire la limite de (nI_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

(6) Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \dfrac{I_{2n+1}}{n!}$.

(a) Établir la relation

$$u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2e} \times \frac{1}{(n+1)!}.$$

(b) En déduire que, pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

(c) Donner, sous forme de somme, l'expression de I_{2n+1} en fonction de n.

Exercice 20. (Fonction définie par une intégrale)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(0) = \dfrac{1}{2}$ et, pour $x > 0$,

$$f(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{e^t + 1} dt.$$

(1) (a) Montrer que

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \forall t \in [0, x], \quad \frac{1}{e^x + 1} \leq \frac{1}{e^t + 1} \leq \frac{1}{2}.$$

(b) Établir alors que, pour tout réel x strictement positif, on a

$$\frac{1}{e^x + 1} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}.$$

(c) En déduire que la fonction f est continue (à droite) en 0.

(2) (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, puis vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on peut écrire

$$f'(x) = -\frac{4}{x^3} g(x),$$

où g est une fonction que l'on déterminera.

(b) Étudier les variations, puis le signe de la fonction g. En déduire que f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

(3) (a) Montrer que, pour tout réel t positif, on a

$$\frac{t}{e^t + 1} \leq 1.$$

(b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 21. (Fonction définie par une intégrale)

On considère la fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$G(x) = \int_{-x}^{x} \frac{2e^t}{\sqrt{1 + t^2}} \mathrm{d}t.$$

(1) Montrer que G est impaire.
(2) Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $G'(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
(3) Montrer que, pour tout $t \geq 0$,

$$\frac{2e^t}{\sqrt{1 + t^2}} \geq t.$$

En déduire que

$$\lim_{x \to +\infty} G(x) = +\infty.$$

(4) Dresser le tableau de variations complet de G.

Exercice 22. (Fonction définie par une intégrale)

(1) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On note F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x)=\begin{cases} f(0), & \text{si } x=0 \\ \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t, & \text{si } x\neq 0 \end{cases}$$
(a) Montrer, pour tout réel x non nul, l'égalité
$$g(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{F(x)-F(0)}{x}-\frac{F(-x)-F(0)}{x}\right).$$
(b) En déduire que g est continue en 0.
(c) Montrer enfin que g est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 23.
Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose
$$I\left(p,q\right)=\int_0^1 x^p\left(1-x\right)^q\mathrm{d}x.$$
(1) Montrer que , pour tout couple $(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$
$$I\left(p,q\right)=\frac{q}{p+1}I\left(p+1,q-1\right).$$
(2) En déduire que, pour tout couple $(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$
$$I\left(p,q\right)=\frac{p!q!}{(p+q)!}I\left(p+q,0\right).$$
(3) Déterminer$I\left(p+q,0\right)$ et montrer finalement que
$$I\left(p,q\right)=\frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

Exercice 24. (Sommes de Riemann à pas constant)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$. Le but de l'exercice est de montrer le résultat suivant

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

(1) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tous $x, y \in [0;1]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|.$$

(2) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, pour tout entier $k \in [\![0; n-1]\!]$, et pour tout réel $t \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$,

$$\left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq M\left(t - \frac{k}{n}\right).$$

(3) En intégrant l'inégalité précédente, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, pour tout entier $k \in [\![0; n-1]\!]$,

$$\left|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{2n^2}.$$

(4) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\left|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{2n}$$

puis que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

(5) **Application.** Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right).$$

Exercice 25. (Incontournable) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t.$$

(1) Montrer que (I_n) est décroissante.
(2) Montrer que, pour tout $u \in [0;1]$

$$0 \leq 1 - u \leq e^{-u}.$$

(3) En déduire, à l'aide du changement de variables $x = \sqrt{n}u$ que

$$I_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

(4) Montrer qu'il existe une constante $M \geq 0$ telle que

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{n}} e^{-x}\mathrm{d}x \leq M.$$

(5) En déduire la limite de (I_n).

(6) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$I_n = I_{n-1} - \frac{1}{2n} I_n$$

ce qui donne la relation de récurrence

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}.$$

(7) En déduire, par récurrence, que

$$I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Exercice 26. On rappelle qu'une fonction (numérique) sur l'intervalle J de $\mathbb{R}$ est dite *convexe* si elle vérifie la prpriété suivante:

$$\forall (t_1, t_2) \in J^2,\ \forall \lambda \in [0:1], \quad f(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leq \lambda f(t_1) + (1-\lambda) f(t_2).$$

On rappelle qu'une fonction f est *concave* si $-f$ est convexe. On désigne par E l'ensemble des applications f définies sur $[0;1]$ à valeurs dans $[0;1]$, continues et convexes sur $[0;1]$ et telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Pour toute application f de E, on note $\tilde{f}$ l'application associée à f, définie sur $[0;1]$ par $\tilde{f}(t) = t - f(t)$.

Enfin, on définit **l'indice de Gini** de l'application f, noté $I(f)$, en posant

$$I(f) = 2\int_0^1 \tilde{f}(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^1 (t - f(t))\mathrm{d}t.$$

(1) (a) Donner une interprétation géométrique de la propriété de convexité.
 (b) Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, rappeler la caractérisation de la convexité de f sur $[0;1]$ à l'aide de la dérivée f'.

(2) (a) Justifier que $\tilde{f}$ est concave sur $[0;1]$.
 (b) Montrer que $I(f) = 1 - 2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.
 (c) Représenter dans un même repère orthonormé les fonctions $t \mapsto t$ et f et donner une interprétation géométrique de $I(f)$.

(3) **Un premier exemple**
 Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(t) = t^2$ pour tout $t \in [0;1]$.
 (a) Montrer que f est élément de E.
 (b) Calculer $I(f)$.

(4) **Propriétés de l'indice de Gini**
 (a) Pour f élément de E, établir que $I(f) \geq 0$.
 (b) Montrer que $I(f) = 0$ si et seulement si $f(t) = t$ pour tout $t \in [0;1]$.
 (c) Montrer que pour tout f élément de E, $I(f) < 1$.
 (d) Pour tout entier $n > 0$, on définit f_n sur $[0;1]$ par $f_n(t) = t^n$.
  (i) Pour tout entier n strictement positif, calculer $I(f_n)$.
  (ii) En déduire que pour tout réel A vérifiant $0 \leq A < 1$, il existe f dans E tel que $I(f) > A$.

(5) **Minoration de l'indice de Gini**
 (a) Soit f élément de E. Montrer qu'il existe t_0 dans $]0;1[$ tel que $\tilde{f}(t_0) = \max_{t\in[0;1]} \tilde{f}(t)$.
 (b) Montrer que pour tout t de $[0;t_0]$, $\tilde{f}(t) \geq \tilde{f}(t_0)\dfrac{t}{t_0}$.
 (c) Montrer que pour tout t de $[t_0;1]$, $\tilde{f}(t) \geq \tilde{f}(t_0)\dfrac{t-1}{t_0-1}$.
 (d) En déduire que $I(f) \geq \tilde{f}(t_0)$.