Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Chapitre 12. Variables aléatoires réelles

Ce chapitre commence par introduire la notion de variable aléatoire puis s'intéresse ensuite plus particulièrement aux *variables aléatoires finies* et aux *variables aléatoires discrètes*, notamment via l'introduction de lois usuelles.

1 Introduction et généralités

Dans de nombreuses expériences aléatoires, on n'est pas intéressé directement par le résultat de l'expérience (*Pile, Face* couleur de la boule...), mais par une certaine *fonction* de ce résultat (nombre de *Pile* obtenus, nombre de boules restantes dans l'urne après un certain nombre de tirages, rang du premier lancer où pour la première fois se passe quelque chose, gain algébrique lors d'un jeu aléatoire, chiffre d'affaire d'une société...).

Une **variable aléatoire** va alors associer au résultat de l'expérience aléatoire une **valeur numérique**. La façon dont cette variable décrit l'expérience définit explicitement cette variable.

1.1 Variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable. On appelle **variable aléatoire réelle** (ou v.a.r) sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ toute application

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

L'ensemble $X(\Omega)$ s'appelle **l'univers image de** X. C'est l'ensemble des valeurs prises par X.

Exemple

- Une urne contient des boules numérotées de 1 à n. On pioche une boule au hasard dans cette urne et on note X le numéro de la boule piochée. On a alors $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
- Avec la même urne, on considère la variable aléatoire X qui vaut 1 si la boule piochée a un numéro pair et 0 sinon. Dans ce cas, $X(\Omega) = \{0, 1\}$.
- Toujours avec la même urne, on pioche successivement et avec remise jusqu'à obtenir la boule numérotée 1 et on note X le nombre de pioches effectuées. On peut avoir la boule 1 dès la première pioche, mais on peut piocher arbitrairement longtemps une autre boule donc ici $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

☞ Dès qu'on introduit une variable aléatoire, la **première chose à faire** (et souvent la première question posée) est de connaitre son univers image.

Notation

Soit X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. On notera toujours:

- Si $I \subset \mathbb{R}$,
$$(X \in I) \text{ est l'évènement } \{\omega \in \Omega; X(w) \in I\}.$$
- Si $a \in \mathbb{R}$,
$$\begin{array}{l}(X = a) \text{ est l'évènement } \{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) = a\}; \\ (X \leqslant a) \text{ est l'évènement } \{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) \leqslant a\}.\end{array}$$

Exercice 1. On tire, avec remise, huit fois consécutives une boule dans une urne qui en contient trois rouges et deux blanches. On note X la v.a.r comptant le nombre de boules blanches obtenues. Traduire en français les évènements suivants:
$$(X = 3), \qquad (X < 5), \qquad (X \geq 3) \cap (X < 7), \qquad (X = 2) \cup (X = 4) \cup (X = 6) \cup (X = 8).$$

À retenir!

L'univers Ω se partitionne toujours complètement selon les valeurs que prends une variable aléatoire. Plus précisément, l'ensemble
$$\{[X = x] : \ x \in X(\Omega)\}$$
forme toujours un **système complet d'évènements**.
Cette remarque est fondamentale; on utilisera tout le temps la formule des probabilités totales avec un s.c.e provenant d'une v.a.

1.2 Loi d'une variable aléatoire réelle

Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. On appelle **loi** de X l'application
$$\begin{array}{rccc}\mathbb{P}_X : & \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0;1] \\ & A & \longmapsto & P(X \in A)\end{array}$$

L'application $\mathbb{P}_X$ associe donc à une partie de $\mathbb{R}$ la probabilité que X y prenne ses valeurs. C'est une probabilité sur un certain espace probabilisable. Si cette définition est naturellement correcte, ce n'est pas réellement ça qu'on va manipuler dans les questions qui demandent de déterminer la loi d'une variable aléatoire, mais plutôt les éléments de la remarque qui suit.

À retenir!

☞ **En pratique**, dans le cas d'un univers Ω discret (fini ou infini), la loi d'une variable aléatoire sera la donnée de tous les couples
$$(x, P(X = x)), \qquad x \in X(\Omega).$$
☞ La loi sera la principale information dont on disposera sur une variable aléatoire, l'univers Ω étant le plus souvent implicite et non précisé.

Exercice 2. On tire au hasard une carte dans un jeu de 32. Un as rapporte 4 points, un roi 3 points, une dame 2 points, un valet 1 point et les autres cartes ne rapportent aucun point. On définit la variable aléatoire X correspondant au nombre de points obtenus. Expliciter la loi de X.

Exercice 3. Une urne contient 8 boules rouges et 5 boules blanches; on effectue des tirages au hasard et sans remise d'une boule. X est le rang d'apparition de la première boule rouge. Déterminer la loi de X.

Exercice 4. On jette une pièce de monnaie truquée dont la probabilité d'obtenir *Pile* vaut $0,3$ une infinité de fois et on appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier *Pile*. Déterminer la loi de X.

1.3 Fonction de répartition

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. On appelle **fonction de répartition** de X la fonction

$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0;1] \\ x & \longmapsto & P(X \leq x). \end{array}$$

☞ La fonction de répartition *caractérise* la loi d'une variable aléatoire, c'est à dire qu'elle contient toute l'information permettant de déterminer la loi de la v.a. Si l'impression première qu'on aura à l'issue de ce chapitre est qu'on s'en sert peu, celle-ci sera totalement mise à mal lors de l'introduction en deuxième année de la notion de variable aléatoire à densité ou de convergence en loi.

Propriété

Propriétés de la fonction de répartition.

Soit X une v.a.r sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ de fonction de répartition F_X. Alors,

(i) F_X est croissante;

(ii)
$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1;$$

(iii) F_X est continue à droite en tout point;

(iv) Si $a \leq b$, alors
$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

Exercice 5. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On pioche une boule au hasard et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue.

(1) Expliciter la loi de X (on n'oubliera pas de préciser $X(\Omega)$.
(2) Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'expression de $F_X(x)$.

Exercice 6. On lance simultanément deux dés cubiques équilibrés. On note X la v.a. correspondant à la somme des résultats obtenus et Y celle correspondant au maximum.

(1) Déterminer les lois des deux variables aléatoires X et Y.
(2) Représenter les fonctions de répartition F_X et F_Y.

2 Variables aléatoires indépendantes

La notion d'indépendance et ses conséquences seront nettement développées dans le Chapitre sur les couples de variables aléatoires dans le cours de deuxième année.

Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. On dit que X et Y sont **indépendantes** si, pour tous $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on a

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = P(X = i)P(Y = j).$$

Exercice 7. Une boîte contient trois jetons numérotés de 1 à 3.

(1) On pioche successivement et avec remise deux jetons dans l'urne et on note respectivement X et Y les variables aléatoires qui prennent la valeur des jetons piochés. Vérifier que X et Y sont indépendantes puis calculer $P(X = Y)$.
(2) Si le tirage est sans remise, les variables aléatoires sont-elles indépendantes ? (*On commencera par déterminer la loi de X, puis celle de Y.*)

3 Variables aléatoires finies

Dans toute la suite, on va s'intéresser au cas où l'univers $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ est fini. Ainsi, l'univers image $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_p\}$ le sera également.

En particulier, il est important de garder à l'esprit que

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1.$$

On constate alors qu'on a une formule très simple pour la fonction de répartition de X:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{i:\, x_i \leq x} P(X = x_i).$$

On a également déjà mentionné que, dans ce cas, la loi d'une v.a. est caractérisée par l'ensemble de tous les couples $(x_i, P(X = x_i)$ pour $i = 1, ..., p$. Choisissant de numéroter les x_i par ordre croissant, et observant que

$$(X = x_i) = (x_{i-1} < X \leq x_i),$$

on constate qu'on a la relation suivante **très importante**

$$F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}) = P(X = x_i)$$

ce qui confirme bien que toute l'information de la loi est portée par la fonction de répartition.

Exercice 8. Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X, Y deux variables aléatoires telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1, \ldots, 2n\}$ et

$$\forall k \in \{1, \ldots, 2n\}, \qquad P(X > k) = 1 - \frac{k}{2n}, \qquad P(Y > k) = \begin{cases} 1 - \dfrac{k}{2n}, & \text{si } k \text{ est pair} \\[2ex] 1 - \dfrac{k - \frac{1}{2}}{2n}, & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

Déterminer les lois de probabilités de X et de Y.

Exercice 9. On tire simultanément deux boules au hasard d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On appelle S la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus. Déterminer, pour tout k de $[\![1, n]\!]$, $F_S(k)$ puis donner la loi de S.

3.1 Espérance. Variance

Définition

Soit X une variable aléatoire de loi $\{(x_i, p_i), 1 \leqslant i \leqslant n\}$. On appelle **espérance** de X le nombre réel

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Exercice 10. On lance une pièce de monnaie équilibrée trois fois de suite. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de *Face* obtenus et soit Y la variable aléatoire prenant la valeur 1 si deux côtés identiques apparaissent successivement et 0 sinon.
Déterminer les loi de X et Y puis leurs espérances.

Exercice 11. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X de l'Exercice **??**.

Exercice 12. Soit X une V.A.R telle que $X(\Omega) = [\![2; n]\!]$ et pour tout k,

$$P(X = k) = \frac{1}{2^{n-1} - 1} \binom{n-1}{k-1}.$$

Vérifier que X définit bien une variable aléatoire et calculer $E(X)$.

Propriété

Propriétés de l'espérance.

(1) S' il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $X(\Omega) \subset [a, b]$ alors $a \leqslant E(X) \leqslant b$.

(2) **Positivité** - Soit X une V.A.R. positive c'est à dire, $X(\Omega) \subset [0; +\infty[$, alors $E(X) \geqslant 0$.

(3) **Linéarité de l'espérance**. Soient X, Y deux V.A.R sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On a alors
(i) $E(aX + b) = aE(X) + b$ (ii) $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

Exercice 13. On reprend les notations de l'Exercice 6 et on définit alors le gain algébrique du joueur comme le double de la différence entre la somme des deux dés lancés et 4. Pour chaque tirage, on note Y le gain algébrique du joueur.
Exprimer Y en fonction de X puis calculer $E(Y)$.

Définition

(1) Une variable aléatoire finie X est dite **centrée** si $E(X) = 0$.
(2) Soit X une variable aléatoire finie. La variable $Y = X - E(X)$ est appelée variable aléatoire centrée associée à X.

Définition

Soit X une variable aléatoire de loi $\{(x_i, p_i), 1 \leqslant i \leqslant n\}$. On appelle

- **Moment d'ordre** 2 le nombre réel $E(X^2)$;
- **Variance** de X le nombre réel
$$V(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i = E\left([X - E(X)]^2\right);$$
- **Écart-type** de X le nombre réel
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

☞ On aura observé que la variance est une quantité positive ou nulle. On évitera donc de conclure dans un exercice où on aurait trouvé un résultat négatif pour celle-ci...

☞ La variance représente la moyenne quadratique des écarts à la moyenne. La variance et l'écart-type sont des paramètres de dispersion; plus ils sont grands, plus la variable aléatoire est dispersée autour de sa moyenne.

Remarque

Pour une variable aléatoire finie le problème d'existence de ces quantités ne se pose pas (les sommes sont finies, il n'y a pas de problème de convergence). Cependant, on verra dans le cas de variables aléatoires discrètes infinies que l'espérance, le moment d'ordre 2 ou la variance d'une variable aléatoire n'existent pas nécessairement.

Propriété

Soit X une variable aléatoire finie. Alors,

- On peut (et on le fera la plupart du temps) calculer la variance à l'aide de la formule de *Kœnig-Huygens*
$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2;$$
- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,
$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$
- $V(X) = 0$ si et seulement si X est presque sûrement constante.

Exercice 14. Soit X une v.a. telle que $X(\Omega) = [\![1; n]\!]$ (où $n \in \mathbb{N}^*$).

(1) Justifier soigneusement que, pour tout entier $j \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X = j) = P(X > j - 1) - P(X > j).$$

(2) Montrer alors que

$$E(X) = \sum_{j=0}^{n-1} P(X > j).$$

3.2 Fonction d'une variable aléatoire finie

Soient X une V.A.R finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On peut définir la variable aléatoire $f(X)$ par

$$f(X) : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & f(X(\omega)) \end{array}$$

☞ En particulier, notant $Y = f(X)$, on a

$$Y(\Omega) = f(X(\Omega)) = \{f(x_i) : \ i = 1, ..., n\} = \{y_1, ..., y_q\}.$$

☞ De plus, on obtient la **loi** de $f(X)$ à partir de celle de X:

$$P(f(X) = y_i) = \sum_{k:\ f(x_k) = y_i} P(X = x_k).$$

☞ Le théorème qui suit est fondamental et très très très utilisé dans les sujets de concours (surtout le Top 3 mais pas que). Il permet de voir qu'il n'est pas nécessaire de connaître la loi de $f(X)$ pour calculer son espérance; il suffit de connaître celle de X:

Théorème

Théorème de transfert.

Soit X une variable aléatoire finie et $Y = f(X)$ une variable aléatoire image par une fonction f de X. Alors,

$$E(Y) = E(f(X)) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) P(X = x_i).$$

Exercice 15. On lance successivement deux dés (cubiques, équilibrés) et on note X la différence des résultats obtenus et $Y = |X|$. Déterminer $E(Y)$ de deux manières différentes.

4 Lois finies usuelles

4.1 Loi uniforme $\mathcal{U}([\![a; b]\!])$

Définition

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, avec $a < b$. On dit que X suit la **loi uniforme sur** $[\![a, b]\!]$, ce qui se note parfois $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$, si $X(\Omega) = [\![a, b]\!]$ et si

$$\forall k \in [\![a, b]\!], \quad P(X = k) = \frac{1}{b - a + 1}.$$

Exemple

Si X désigne le score obtenu en lançant un dé équilibré, alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 6]\!])$.

☞ La loi uniforme $\mathcal{U}([\![1, n]\!]$ est aussi utilisée dès qu'on pioche une boule numérotée entre 1 et n dans une urne par exemple...

Propriété

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$, alors
$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$
(c'est sans surprise " la moyenne des extrémités") et
$$V(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}.$$

Exercice 16. On effectue des tirages **sans remise** d'une boule dans une urne contenant $N-1$ boules blanches et une boule noire. On note X le rang d'apparition de la boule noire.
Montrer que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;N]\!])$.

4.2 Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$

Définition

On dit que X suit la **loi de Bernoulli de paramètre** p (avec $p \in [0;1]$), ce qu'on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, si $X(\Omega) = \{0,1\}$ et si
$$P(X=1) = p.$$

☞ On a alors nécessairement $P(X=0) = 1-p$.

La loi de Bernoulli intervient à chaque fois qu'il est question d'expérience aléatoire à deux alternatives possibles (souvent appelées succès et échec).

Exemple

On tire une boule dans une urne qui contient des boules blanches et des boules noires. On suppose que la proportion de boules blanches par rapport au nombre total de boules est p. On définit la variable aléatoire X comme étant égale à 1 si la boule tirée est blanche et égale à 0 sinon. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Propriété

Espérance et Variance de la loi de Bernoulli.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$.

4.3 Loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$

Définition

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in [0,1]$. On dit que X suit la **loi binomiale de paramètres** n et p, ce qu'on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, si $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et si
$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

☞ Lorsqu'on répète n fois, de façon indépendante, la même expérience de Bernoulli de paramètre p (disons que p est la probabilité d'un succès), alors le nombre de succès suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$.
C'est d'ailleurs grâce à cette remarque que l'on peut rapidement reconnaître une loi binomiale dans un exercice si la description correspond.

Exercice 17. Démontrer que la formule ci-dessus définit bien une loi de probabilité.

Exemple

- Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches par rapport au total est notée p. On tire n fois une boule, en la remettant dans l'urne à chaque fois. On note X le nombre total de boules blanches tirées. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

- On lance quatre dés équilibré et on note X le nombre de 6 obtenus. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(4,1/6)$.

Proposition 1. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

Remarque

On constate qu'il suffit de multiplier par n l'espérance et la variance d'une loi de Bernoulli pour obtenir celles de la loi binomiale correspondante.

Exercice 18. Un voyageur un peu inquiet à l'idée de prendre l'avion se renseigne sur le type d'aéronef effectuant le vol nécessaire à son voyage. Deux types d'avions effectuent la liaison, ils ont respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne. Quel avion devrait choisir le voyageur?

Exercice 19. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Déterminer, à l'aide du théorème de transfert, la valeur de $E(Y)$ où $Y = (-1)^X$.

5 Variables aléatoires discrètes

5.1 Généralités

Définition

Une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est dite **discrète** si on peut indexer son univers image $X(\Omega)$ à l'aide d'une partie de $\mathbb{N}$.
En particulier, X prend une infinité de valeurs et il existe une partie $J \subset \mathbb{N}$ telle que

$$X(\Omega) = \{x_i : \ i \in J\}.$$

Exemple

On lance une pièce jusqu'à l'obtention du premier *Pile*. Alors, la variable aléatoire X qui compte le nombre de lancers nécessaires est une variable aléatoire discrète, elle prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

☞ Notant $\{x_i : \ i \in \mathbb{N}\}$ les valeurs prises par X, la famille d'évènement $\{(X = x_i) : \ i \in \mathbb{N}\}$ forme un s.c.e et en particulier

$$\sum_{i=0}^{+\infty} P(X = x_i) = 1.$$

À retenir!

La loi d'une variable aléatoire discrète est la donnée de la suite des couples $\{(x_i, P(X = x_i)) : \ i \in \mathbb{N}\}$. La définition de fonction de répartition ne change pas

$$F_X(t) = P(X \leq t) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

☞ On insiste une fois de plus sur le lien entre la loi de X et sa fonction de répartition, qu'on présente à nouveau via la proposition suivante.

Propriété

Soit X une variable aléatoire discrète. On suppose que les valeurs de X sont rangées dans l'ordre croissant

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots$$

Alors, pour tout entier $k \geq 2$,

$$P(X = x_k) = F_X(x_k) - F(x_{k-1}).$$

Remarque

Sous les hypothèses de la proposition, la fonction F_X est constante sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}[$. La fonction F_X est donc *constante par morceaux* et présente des *sauts* en chaque point x_k. L'amplitude du saut en x_k est égale à $P(X = x_k)$.

5.2 Espérance d'une variable aléatoire discrète

Définition

Soit X une variable aléatoire discrète, de loi $(x_k, p_k)_{k \in \mathbb{N}}$. On dit que X admet une **espérance** si et seulement si la série $\sum p_k x_k$ est **absolument convergente**. Auquel cas, cette espérance se note $E(X)$ et vaut

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x_k.$$

À retenir!

Comme il n'est absolument pas garanti que la variable aléatoire X admette une espérance, on sera très **scrupuleux** sur la vérification de l'existence de celle-ci avant de manipuler des sommes de séries qui pourraient ne pas être convergente.
On présentera **toujours** le raisonnement de cette façon; une fois la loi de X connues, on écrira

$$X \text{ admet une espérance} \iff \sum_{k \geq 0} x_k P(X = x_k) \text{ converge absolument}$$

Or,

$$x_k P(X = x_k) = \dots..$$

et on donne un argument justifiant que la série converge (ou diverge) : on reconnait une combinaison linéaire de termes généraux de séries de référence convergentes, ou bien un argument de comparaison pour les séries à termes positifs.... Donc l'espérance existe (ou n'existe pas), et si elle existe, enfin, on peut passer au calcul.

Exercice 20. On lance une pièce équilibrée une infinité de fois et on note X le numéro du premier lancer qui a donné *Face*.
Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$.

Exercice 21. Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages successifs. Si on tire une boule noire, on s'arrête; si on tire une boule blanche, on la remet dans l'urne avec une autre boule blanche. Soit X la v.a égale au rang d'obtention de la boule noire. La v.a. X admet-elle une espérance?

Propriété

Propriétés de l'espérance.

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes et $a \in \mathbb{R}$.

- l'espérance est **linéaire** :
  - si X et Y admettent une espérance, alors il en est de même de $X+Y$ et $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$;
  - si X admet une espérance, alors il en est de même de aX et $E(aX) = aE(X)$.
- Soient X une variable aléatoire discrète admettant une espérance. Si $X \geq 0$, alors $E(X) \geq 0$.

Théorème

Théorème de transfert.

Soit X une variable aléatoire discrète. Soit $(x_k, p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la loi de X. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors, $Y = f(X)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum f(x_k)p_k$ est absolument convergente. Auquel cas,

$$E(f(X)) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(x_k)p_k.$$

6 Moments d'ordre r - Variance

Définition

Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et soit X une variable aléatoire discrète, de loi $\{(x_k, p_k)\}$. On dit que X admet un **moment d'ordre** r si et seulement si la série de terme général $x_k^r p_k$ est absolument convergente. Auquel cas, le moment d'ordre r de X se note $m_r(X)$ et vaut

$$m_r(X) = E(X^r).$$

☞ Le moment d'ordre 1 n'est autre que l'espérance $E(X) = m_1(X)$.

Propriété

Soit X une variable aléatoire discrète et soit $r, s \in \mathbb{N}^*$ tels que $r \leq s$. Si X admet un moment d'ordre s, alors X admet un moment d'ordre r.

Exercice 22. Soient r et s deux entiers supérieurs ou égaux à 1 tels que $r \leq s$.

(1) Montrer que, pour tout x réel,
$$|x|^r \leq 1 + |x|^s.$$
(2) Montrer que, si une variable aléatoire discrète X admet un moment d'ordre s, alors elle admet aussi un moment d'ordre r.

Définition

On dit qu'une variable aléatoire discrète admet une **variance** si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2. Auquel cas, la variance est définie par

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

et on peut également définir l'**écart-type** par

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

☞ La Proposition 6 assure qu'une variable aléatoire admettant une variance admet également une espérance.

Propriété

Propriétés de la variance.

(i) **Formule de König-Huygens.**
Si X admet une variance, alors
$$V(X) = E(X^2) - E(X) = m_2(X) - m_1(X)^2.$$

(ii) Si X admet une variance, alors, pour tous réels $a, b \in \mathbb{R}$, la v.a. $aX+b$ admet une variance et $V(aX+b) = a^2V(X)$.

7 Lois discrètes usuelles

7.1 Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$

Définition

Soit $p \in [0,1]$. On dit que X suit **la loi géométrique** de paramètre p, ce qui se note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et si
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=k) = p(1-p)^{k-1}.$$

Exercice 23. Démontrer que la formule ci-dessus définit bien une loi de probabilité.

☞ La loi géométrique intervient lorsqu'on répète à l'infini et de façons indépendantes la même expérience de Bernoulli de paramètre p et qu'on **attend** le premier succès. On utilise souvent la terminologie de *temps d'attente*.

Exemple

On lance une infinité de fois un dé équilibré et on note X le numéro du premier lancer qui donner "6". Alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(1/6)$.

Propriété

Espérance et variance de la loi géométrique.

Si $\hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors
$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Exercice 24. Un concierge rentre chez lui après sa journée de travail. Il dispose, sur son trousseau, de n clés dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais, fatigué, il ne se souvient plus laquelle. Il essaie les clés les unes après les autres en éliminant après chaque essai la clé qui n'a pas convenu. On note X la variable aléatoire comptant le nombre d'essais nécessaires à l'ouverture de la porte.

(1) Quelle est la loi de X? Quel est le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clé?
(2) Il s'avère en fait la soirée était bien arrosée et que le concierge est également sous l'emprise de l'alcool, en plus de la fatigue. Après chaque essai, il remet la clé qu'il vient d'essayer dans le trousseau. Quelle est maintenant la loi suivie par X? Que vaut son espérance?

7.2 Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Définition

Soit $\lambda > 0$. On dit que X suit **loi de Poisson** de paramètre λ, ce qui se note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et si
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Exercice 25. Démontrer que la formule ci-dessus définit bien une loi de probabilité.

☞ La loi de Poisson est aussi appelée loi des évènements rares, parce que $P(X = k)$ décroît très vite vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$. Contrairement aux lois binomiale ou géométrique, on ne peut pas reconnaître une loi de Poisson à partir de la description d'une expérience aléatoire.

Propriété

Espérance et variance de la loi de Poisson.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors
$$E(X) = \lambda, \quad \text{et} \quad V(X) = \lambda.$$

Exercice 26. Soient X une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et $Y = 1/(X+1)$. Montrer, à l'aide du théorème de transfert que Y admet une espérance et la déterminer.

Exercice 27. Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** suivant toutes deux des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.

(1) Montrer que
$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu).$$
(2) Généraliser le résultat par récurrence (on admettra que si $X_1, ..., X_n, X_{n+1}$ sont mutuellement indépendantes, le *lemme des coalitions* permet d'affirmer que $X_1 + ... + X_n$ est indépendante de X_{n+1}).

Exercice 28. On tire un nombre entier X au hasard et on suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(a)$ (avec $a > 0$). Si X est impair, Josette gagne et reçoit X euros de José. Si X est pair et supérieur ou égal à 2, c'est José qui reçoit X euros de Josette. Si $X = 0$, la partie est nulle. On note p et q les probabilités respectives que Josette ou José gagnent.

(1) En calculant $p + q$ et $p - q$, déterminer p et q.
(2) Déterminer les espérances de gain de chaque joueur.

8 Autres exercices

8.1 Variables aléatoires finies

Exercice 29. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On en tire n en effectuant des tirages avec remise. On note X et Y le plus petit et le plus grand des nombres obtenus. Déterminer la loi de X et celle de Y. (On pourra utiliser les fonctions de répartition de chacune des deux v.a.).

Exercice 30. (Test à l'embauche)

Une entreprise souhaite recruter un cadre. Un total de n personnes se présentent pour le poste. Chacune passe, à tout de rôle, un test dont la probabilité de réussite est p (avec $p \in]0; 1[$). La première personne à réussir le test est engagée. On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si la $k-$ième personne à passer le test est engagée et $n + 1$ si personne ne réussit le test.

(1) Déterminer la loi de X.
(2) Calculer, pour tout $x \neq 1$, la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.
(3) En déduire l'espérance $E(X)$.
(4) Quelle est la valeur minimale de p à choisir pour avoir plus d'une chance sur deux de recruter l'un des candidats?

Exercice 31.
On dispose que n urnes numérotées de 1 à n. L'urne k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une des urnes et on note X la variable aléatoire correspondant au numéro de l'urne choisie. Si $X = k$, on tire au hasard une boule dans l'urne k et on note Y la variable aléatoire correspondant au numéro de la boule choisie.

(1) Quelle est la loi de X?
(2) Que vaut $Y(\Omega)$?

(3) Pour $k \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$, déterminer $P_{(X=k)}(Y = j)$ (on distinguera les cas $k \geq j$ et $k < j$).
(4) En déduire une expression de $P(Y = j)$ faisant intervenir une somme que l'on ne cherchera pas à calculer.
(5) Calculer $E(Y)$.

Exercice 32.
Une partie d'un jeu se déroule comme suit. On lance deux dés; si les scores des deux dés sont les mêmes, on marque deux points, si le score du premier est strictement supérieur à celui du second, on marque un point, sinon on ne marque aucun point. On répète n partie du même jeu (de manière indépendante). On note X_i la variable aléatoire correspondant au nombre de points marqués à la partie i et T_i le total du score après i parties.

(1) Déterminer la loi de chaque X_i ainsi que leur espérance.
(2) Exprimer T_i en fonction des X_j. En moyenne, combien de parties au minimum doit faire le joueur pour obtenir plus de 10 points?
(3) Déterminer la loi de T_1.
(4) Déterminer la loi de T_2.
(5) On cherche à déterminer la loi de T_3.
  (a) Préciser l'ensemble des valeurs prises par T_3.
  (b) Pour $j \in T_2(\Omega)$ et $k \in T_3(\Omega)$, déterminer $P((T_3 = k) \cap (T_2 = j))$.
  (c) En déduire la loi de T_3.

Exercice 33.
On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On lance n fois une pièce équilibrée, les lancers étant supposés indépendants.

On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun *Pile* pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier *Pile*.

(1) (a) Déterminer, en argumentant soigneusement, l'ensemble $Z(\Omega)$.
  (b) Pour tout $k \in Z(\Omega)$, calculer $P(Z = k)$. On distinguera les cas $k = 0$ et $k \geq 1$.
  (c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k \in Z(\Omega)} P(Z = k) = 1$.

On dispose de $n+1$ urnes $U_0, U_1, \ldots, U_n$ telles que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne U_k contient k boules blanches et $n - k$ boules noires.

On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes de la façon suivante: si après les lancers de la pièce décrits dans la première question, la variable Z prend la valeur k (avec $k \geq 1$), alors on tire une par une et avec remise, k boules dans l'urne U_k et l'on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de ces tirages. Si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

(2) Déterminer $X(\Omega)$.

(3) (a) Déterminer, en distinguant les cas $i = 0$ et $1 \leq i \leq n$, la probabilité $P_{[Z=0]}(X = i)$.
  (b) Déterminer, en distinguant les cas $i = n$ et $0 \leq i \leq n-1$, la probabilité $P_{[Z=n]}(X = i)$.
  (c) Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, déterminer, en distinguant les cas $0 \leq \ i \leq \ k$ et $k < i \leq n$, la probabilité conditionnelle $P_{[Z=k]}(X = i)$.

(4) (a) Montrer que
$$P(X = 0) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \frac{1}{2^n}.$$
  (b) Montrer que $P(X = n) = 2^{-n}$.
  (c) Exprimer, pour tout i de $\{1, 2, ..., n-1\}$, $P(X = i)$ sous forme dune somme que l'on ne cherchera pas à réduire.

(5) Vérifier, avec les expressions trouvées à la question précédente, que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(X = i) = 1$.

8.2 Variables aléatoires discrètes

Exercice 34. (Loi de Pascal)

On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut p. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir r fois pile. Quelle est la loi de X?

Exercice 35.
Tous les jours, José fait le trajet entre son domicile et son travail. Un jour sur deux, il dépasse la vitesse autorisée. Un jour sur dix, un contrôle radar est effectué. On suppose que ces deux événements (dépassement de la vitesse limite et contrôle radar) sont indépendants, et que leur survenue un jour donné ne dépend pas de ce qui se passe les autres jours. Si le radar enregistre son excès de vitesse, José perd un point sur son permis de conduite. On note X_i le nombre de points perdus le jour i.

(1) Soit $x \in]-1;1[$ et $r \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\sum_{n\geq r} n(n-1)\cdots(n-r+1)x^{n-r} = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}.$$
(2) Pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Que représente S_n? Donner sa loi, son espérance, sa variance.
(3) En tant que jeune conducteur, José ne dispose que de 6 points sur son permis. On note T le nombre de jours de validité de son permis dans le cas où celui-ci lui est retiré. Sinon, on définit $T = 0$. Quelle est la loi de T? Son espérance?

Exercice 36.
Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p, $0 < p < 1$; la proportion de boules blanches est $1 - p$.
On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise. (Toute boule tirée de l'urne y est remise avant de procéder au tirage suivant.)

On note N_V la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et N_B la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

(1) Quelles sont les lois des variables aléatoires N_V et N_B ? Rappeler la valeur de leurs espérances.

On définit la variable aléatoire X de sorte que que $X = i$ si les i premières boules tirées sont blanches et la $(i+1)-$ème est verte, ou si les i premières boules tirées sont vertes et la $(i+1)-$ème est blanche.

(2) Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

(3) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que
$$E(X) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}.$$
(4) Montrer que $E(X)$ est minimale lorsque $p = \frac{1}{2}$, et calculer cette valeur minimale.

Exercice 37.
Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.

On définit X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales à la durée de l'opération des clients C_1, C_2,. C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 suivent la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0;1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1 - p$.

On note A l'événement, : "C_3 termine en dernier son opération". On se propose de calculer la probabilité de A. On remarque que l'événement A est égal à l'événement
$$((\min(X_1, X_2) + X_3) > \max(X_1, X_2)).$$

(1) Rappeler la loi de X_1 ainsi que son espérance $E(X_1)$ et sa variance $V(X_1)$. On définit la variable aléatoire Δ par $\Delta = |X_1 - X_2|$.

(2) Calculer la probabilité $\mathrm{P}(\Delta = 0)$.

(3) Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Justifier que
$$\mathrm{P}(X_1 - X_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X_2 = k)\,\mathrm{P}(X_1 = n + k).$$
   (b) En déduire que
$$\mathrm{P}(\Delta = n) = 2\frac{pq^n}{1+q}.$$

(4) (a) Montrer que Δ admet une espérance $E(\Delta)$ et la calculer.
   (b) Montrer que
$$E\left((X_1 - X_2)^2\right) = 2V(X_1).$$
   En déduire que Δ admet une variance $V(\Delta)$ et la calculer.

(5) Montrer que l'événement A est égal à l'événement $(X_3 > \Delta)$.

(6) (a) En déduire que
$$\mathrm{P}(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\Delta = k)\,\mathrm{P}(X_3 > k).$$
   (b) Exprimer $\mathrm{P}(A)$ à l'aide de p et q.

Exercice 38. (Les rois rouges)
Soit a un entier strictement positif. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges (carreau et coeur), et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants.

Dans un premier protocole, les cartes du jeu sont alignés sur une table de façon alétoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge. On note X la variable aléatoire qui prend la valeur du rang d'apparition du premier roi rouge.

(1) Que vaut $X(\Omega)$?

(2) Montrer que, pour tout $k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = \dfrac{2n - k}{n(2n-1)}$.

(3) Montrer que $E(X) = \dfrac{2n+1}{3}$.

Le joueur perd un euro chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a euros lorsqu'il obtient le premier roi rouge.
On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{ième}$ carte découverte, G_1 est égale à $a - k$.

(4) Exprimer G_1 en fonction de a et X. En déduire l'expression de $E(G_1)$ en fonction de a et n.

On étudie dans la suite un second protocole. Les $2n$ cartes du même jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes.

Le joueur perd un euro à chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a euros losqu'il obtient le premier roi rouge.

On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{ième}$ carte découverte ($k \leqslant n$), G_2 est égale à $a - k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 est égale à $-n$.

(5) Pour tout entier $k \in [\![1; n]\!]$, déterminer $P(G_2 = a - k)$.

(6) Vérifier que $P(G_2 = -n) = \dfrac{n-1}{2\,(2n-1)}$.

(7) Obtenir alors que
$$E\,(G_2) = \frac{3\,(3n-1)\,a - \left(7n^2-1\right)}{6\,(2n-1)}.$$

(8) Comment savoir quel protocole est le plus favorable au joueur ?

9 Un problème d'annale

On lance indéfiniment une pièce donnant *Pile* avec la probabilité p et *Face* avec la probabilité $q = 1-p$. On suppose que $p \in]0,1[$ et on admet que les lancers sont mutuellement indépendants.

Pour tout entier naturel k, supérieur ou égal à 2, on dit que le $k^{ième}$ lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du $(k-1)^{ième}$ lancer.

On note P_k (resp. F_k) l'événement : "on obtient *Pile* (resp. *Face*) au $k^{ième}$ lancer".
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.

Par exemple lorsque qu'on effectue les 3 premiers lancers et qu'on obtient l'événement $P_1 \cap F_2 \cap P_3$, il y a eu deux changements (aux $2^{ième}$ et $3^{ième}$ lancers). Ou encore, lorsqu'on effectue les 4 premiers lancers et qu'on obtient l'événement $F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4$, il y a eu un seul changement (au $3^{ième}$ lancer).

Partie 1 - Étude de quelques exemples

(1) Donner (en la justifiant) la loi de X_2.
(2) (a) Donner (en la justifiant) la loi de X_3.
(b) Vérifier que $E(X_3) = 4pq$ et que $V(X_3) = 2pq(3-8pq)$.
(3) (a) Trouver la loi de X_4.
(b) Calculer $E(X_4)$.

Partie 2 - Étude du cas $p \neq q$.

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

(4) Exprimer $P(X_n = 0)$ en fonction de p, q et n.

(5) (a) Montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall m \in \mathbb{N}, \quad b^m - a^m = (b-a)\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k}\right)$.
(b) En décomposant l'événement $(X_n = 1)$ en une réunion d'événements incompatibles, montrer que
$$P(X_n = 1) = \frac{2pq}{q-p}\left(q^{n-1} - p^{n-1}\right).$$

(6) En distinguant les cas n pair et n impair, exprimer $P(X_n = n-1)$ en fonction de p et q.

(7) Retrouver, grâce aux trois questions précédentes, les lois de X_3 et X_4.

(8) Pour tout entier naturel $k \geq 2$, on note Z_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le $k^{ième}$ lancer est un changement et 0 sinon.

(a) À l'aide du système complet d'événement (P_{k-1}, F_{k-1}), montrer que Z_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $2pq$.
(b) Écrire X_n à l'aide de certaines des variables Z_k.
(c) En déduire $E(X_n)$.

Partie 3- Étude du cas $p = q$.

(9) Vérifier, en utilisant les résultats de la partie 1, que X_3 et X_4 suivent chacune une loi binomiale.
(10) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, X_n suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.