Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Chapitre 2. Systèmes d'équations linéaires. Pivot de Gauss

L'objectif de ce court chapitre est d'introduire et de résoudre des systèmes de n équations linéaires à p inconnues. La technique principale, appelée *méthode du Pivot de Gauss* est très importante et on s'en servira énormément, notamment dans le cadre de l'algèbre linéaire (et donc des matrices). Il est indispensable de la maîtriser au plus vite.

On oublie alors toute tentation de résoudre par une substitution douteuse tout système rencontré et on appliquera scrupuleusement la méthode introduite ci-après.

1 Vocabulaire. Introduction

Définition

On appelle **système linéaire** (S) de n équations à p inconnues un système d'équations de la forme

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccl} a_{1,1}\,x_1 & + & a_{1,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}\,x_p & = & b_1 \quad (L_1)\\ a_{2,1}\,x_1 & + & a_{2,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}\,x_p & = & b_2 \quad (L_2)\\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \quad\;\; (L_i)\\ a_{n,1}\,x_1 & + & a_{n,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}\,x_p & = & b_n \quad (L_n)\end{array}\right.$$

où les $a_{i,j}$ sont des nombres réels fixés appelés **coefficients du système** et les $(b_i)_{i=1,\dots,n}$ sont des réels fixés qui constituent le **second membre** du système. Les $x_1,\dots,x_p$ sont les p **inconnues** du sytème.
Par commodité, chaque équation est repérée par un nom : L_i pour i-ème ligne.
Une solution du système est un **p-uplet** $(x_1;x_2;\cdots;x_p)$ pour lesquels toutes les équations sont vérifiées.
Résoudre le système (S), c'est trouver l'ensemble des solutions de ce système.

Tout étudiant a déjà rencontré par exemple des systèmes de deux équations à deux inconnues pour lesquelles deux méthodes de résolution ont été présentées: par substitution ou combinaisons linéaires. On verra dans la suite qu'on va généraliser la méthode de combinaisons linéaires. On peut commencer par vérifier qu'on sait faire sans difficulté l'exercice suivant.

Exercice 1. Résoudre les trois systèmes suivants:

$$(i)\left\{\begin{array}{ccccr} x & + & y = & 1\\ x & - & y = & 1\end{array}\right. \qquad (ii)\left\{\begin{array}{ccccr} x & + & y = & 1\\ x & + & y = & 2\end{array}\right. \qquad (iii)\left\{\begin{array}{ccccr} x & + & y = & 1\\ x & + & y = & 1\end{array}\right.$$

Définition

Un système est dit :

- **compatible** lorsqu'il admet au moins une solution, **incompatible** s'il n'en admet aucune;
- **homogène** lorsque le second membre est constitué uniquement de coefficients nuls. On appelle **système homogène associé** à un système (S) le système obtenu en gardant les mêmes coefficients et en remplaçant le second membre par des 0;
- **de Cramer** lorsque $n = p$ et lorsque le système possède une unique solution;
- **triangulaire** (ou *échelonné*) lorsqu'il est de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n = b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n = b_2 \\ & & & & \ddots & & \vdots \quad = \vdots \\ & & & & & & a_{n,n}x_n = b_n \end{array}\right.$$

Enfin, deux systèmes sont dits **équivalents** lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.

Exercice 2. Justifier qu'un système homogène est compatible. Quel est l'ensemble des solutions d'un système homogène de Cramer d'inconnues $(x_1; \cdots; x_n)$?

2 Résolution des systèmes. Le Pivot de Gauss

L'idée est de résoudre le système en combinant des lignes pour éliminer des coefficients, car ce genre d'opérations permet toujours de se ramener à un système équivalent à celui de départ.
Plus précisément, un système où chaque équation ne contient qu'une seule inconnue serait idéal (il n'est pas toujours possible de s'y ramener) mais c'est ce qu'on va essayer de faire à chaque fois en faisant disparaître les autres inconnues de la lignes en mettant à contribution les autres lignes du système.

Propriété

Les opération suivantes conduisent à un système équivalent au système précédent:

(1) $L_i \leftrightarrow L_j$: échanger les lignes i et j.
(2) $L_i \leftarrow aL_i$, où $a \in \mathbb{R}^*$: multiplier la ligne i par a.
(3) $L_i \leftarrow L_i + bL_j$, où $i \neq j$, $b \in \mathbb{R}^*$: ajouter b fois la ligne j à la ligne a.
(4) $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$, où $i \neq j$, $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}^*$: remplacer L_i par $aL_i + bL_j$.

Méthode / Algorithme

Algorithme du pivot de Gauss (total). Pour résoudre le système (S):

(1) On rédige "Résolvons le système par la méthode du pivot de Gauss";

(2) On réordonne éventuellement les lignes du systèmes de sorte à avoir un coefficient **non nul** *en haut à gauche.*

(3) Première étape. On utilise le coefficient (non nul) $a_{1,1}$ (appelé *pivot* de cette étape) en facteur de la première inconnue (disons x_1) dans la première ligne pour faire disparaitre le coefficient x_1 de toutes les autres lignes. Plus précisément, pour tout $k \geq 2$, on remplace la ligne L_k grâce à l'opération $L_k \leftarrow L_k - \frac{a_{k,1}}{a_{1,1}} L_1$.

(4) On recommence avec la deuxième inconnue. Éventuellement, on réordonne les lignes entre la deuxième et la dernière. Le deuxième pivot est alors le coefficient en facteur de x_2 dans la deuxième ligne et on l'utilise pour faire disparaître les occurrences de x_2 sur **toutes** les autres lignes (y compris L_1).

(5) On reproduit le processus jusqu'à obtenir ou bien un système diagonal (une inconnue par ligne), ou bien une ligne de zéros, ou encore une ligne faisant apparaître une incompatibilité. Auquel cas, on ne peut plus poursuivre le Pivot et la résolution s'arrête.
On conclut en fonction de la situation :

   (a) si tous les coefficients d'une ligne sont nuls, sauf son second membre, alors le système n'a pas de solution.
   (b) s'il reste un nombre d'équations égal au nombre d'inconnues, avec une seule inconnue par ligne alors le système est de Cramer et on conclut sans difficulté sur la solution.
   (c) sinon, les inconnues qui n'ont pas servi de pivot dans la résolutions sont considérées comme des paramètres. Elles restent libres mais les autres inconnues s'expriment en fonction d'elles.

Remarque

L'algorithme présenté ci-dessus s'appelle en fait *algorithme **total** du pivot de Gauss*. Une méthode alternative (très courante), appelée *algorithme partiel du pivot de Gauss*, consiste à se ramener à un système diagonal en effectuant les opérations que sur les lignes en dessous de celle qui contient le pivot puis, *remonter* le système par substitution. Sauf dans de rares cas où cela présente un réel intérêt, on évitera d'utiliser un pivot partiel.

Le **bon choix des pivots est fondamental** pour alléger les calculs. L'étape de réorganisation des lignes du système avant d'en entamer la résolution peut faire gagner beaucoup de temps et éviter des erreurs de calcul. Il est très pratique d'avoir un pivot égal à 1.

On peut s'écarter légèrement de cet algorithme pour :

- Simplifier une ligne avec l'opération $L_i \leftarrow \dfrac{1}{\lambda} L_i$ (cela permet par exemple d'obtenir un pivot égal à 1);
- Conclure directement que le système est incompatible lorsque deux lignes sont manifestement contradictoires;
- Supprimer une ligne identique (ou proportionnelle) à une autre;

Exemple

Résolvons le système (S) suivant par la méthode du pivot de Gauss.

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} \boxed{1}x & + & y & + & z & = & 6 & L_1 \\ \cancel{2x} & - & y & + & z & = & 3 & L_2 \\ \cancel{3x} & & & - & z & = & 0 & L_3 \end{array}\right.$$

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & \cancel{y} & + & z & = & 6 & L_1 \\ & & \boxed{-3}\,y & - & z & = & -9 & L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \\ & & \cancel{-3y} & - & 4z & = & -18 & L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}\right.$$

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 3x & & & + & \cancel{2z} & = & 9 & L_1 \longleftarrow 3L_1 + L_2 \\ & & -3y & - & \cancel{z} & = & -9 & L_2 \\ & & & & \boxed{1}\,z & = & 3 & L_3 \longleftarrow \left(L_3 - \frac{-3}{-3}L_1\right)/(-3) \end{array}\right.$$

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 3x & & & & & = & 3 & L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_3 \\ & & -3y & & & = & -6 & L_2 \longleftarrow L_2 + L_3 \\ & & & & z & = & 3 & L_3 \end{array}\right.$$

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & & & & & = & 1 & L_1 \longleftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ & & y & & & = & 2 & L_2 \longleftarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ & & & & z & = & 3 & L_3 \end{array}\right.$$

Les solutions apparaissent alors clairement à la fin de l'algorithme: $\mathcal{S} = \{(1,2,3)\}$. En particulier, le système (S) est un système de Cramer.

Exercice 3. Résoudre par la méthode du pivot de Gauss, le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 4. Résoudre les deux systèmes suivants. Qu'en pensez-vous?

$$(S_1)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 5y & + & 9z & = & 180 \\ 9x & + & 10y & + & 5z & = & 40 \\ 10x & + & 9y & + & z & = & -50 \end{array}\right. \qquad (S_2)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 5y & + & 9z & = & 180 \\ 9x & + & 10y & + & 5z & = & 41 \\ 10x & + & 9y & + & z & = & -50 \end{array}\right.$$

3 Systèmes de Cramer

On a vu précédemment qu'un système homogène de n équations à n inconnues était de Cramer si et seulement si son unique solution était le $n-$uplet $(0;0;\ldots;0)$.
On peut également donner des critères selon lesquels un système sera de Cramer.

Théorème

Un système de n équations à n inconnues est un système de Cramer si la méthode du pivot de Gauss fait apparaître successivement n pivots (non nuls).

Théorème

Un système est de Cramer si et seulement si son système homogène est de Cramer.

Exercice 5. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre λ le système suivant est de Cramer.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 4 \\ -x & + & \lambda y & + & 2z & = & 5 \\ 7x & + & 3y & + & (\lambda-5)z & = & 7 \end{array}\right.$$

4 Autres exercices - Travaux dirigés

Exercice 6. Pour chacun des systèmes suivants, répondre aux questions suivantes :

(1) Est-il échelonné (*i.e.* triangulaire)?
(2) Si oui quelles sont les inconnues principales (*i.e.* les pivots) et quelles sont les inconnues secondaires?
(3) Résoudre le système.

$$a)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & 2y & + & 2z & = & 1 \\ & & & & 4z & = & 1 \end{array}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 3x & - & 2y & + & 2z & = & 1 \\ & & & & 4z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$c)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 5 \\ & & 22y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right. \qquad d)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & 2t & = & -1 \\ & & 2y & - & 2z & + & t & = & 1 \\ & & & & 2z & - & t & = & 2 \end{array}\right.$$

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$(i)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 2 \\ 4x & + & 4y & + & z & = & 3 \\ 6x & + & 7y & + & 2z & = & 5 \end{array}\right. \qquad (ii)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & + & t & = & 4 \\ x & - & y & + & 2z & - & t & = & -2 \\ 3x & + & y & + & z & & & = & 0 \end{array}\right.$$

$$(iii)\ \left\{\begin{array}{rcr} x+y-3z-t & = & 0 \\ 2x+y-5z+4t & = & 4 \\ x-2y+3t & = & -2 \\ -x+y+z-2t & = & -1 \end{array}\right.$$

Exercice 8. Résoudre les systèmes suivants:

$$a)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & -5 \\ 2x & + & 13y & - & 7z & = & -1 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ 4x & - & y & + & 3z & = & -1 \\ 2x & + & 5y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$c)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 3y & - & z & + & t & = & 1 \\ 2x & + & 13y & - & 7z & + & 2t & = & 2 \\ x & - & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & 7y & - & 4z & + & t & = & -1 \end{array}\right. \qquad d)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} y & + & z & + & t & = & -1 \\ x & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & t & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \end{array}\right.$$

$$e)\ \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 2 \\ x & + & 2y & = & 1 \\ x & + & y & = & 1 \end{array}\right. \qquad f)\ \left\{\begin{array}{rcrcr} u & + & w & = & 1 \\ v & + & w & = & 0 \\ u & + & v & = & 12 \\ u & + & 3v & = & 0 \end{array}\right. \qquad h)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & + & z & + & t & = & -5 \\ 2x & + & 3y & - & 3z & + & t & = & -1 \\ x & - & y & + & z & - & t & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 9. (Systèmes à paramètres)

(1) On considère le système

$$(E_\lambda)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} (1-\lambda)x & - & 3y & + & 6z & = & 0 \\ 6x & - & (8+\lambda)y & + & 12z & = & 0 \\ 3x & - & 3y & + & (4-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(a) Pour quelles valeurs de λ, le système (E_λ) est-il de Cramer?
(b) Résoudre le système selon les valeurs de λ

(2) Mêmes questions avec le système suivant

$$(F_\lambda)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & \lambda y & - & z & = & 0 \\ -x & - & y & - & \lambda z & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 10. Résoudre les systèmes suivants, en fonction de a, b, c et d:

$$(i)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 3y & - & 2z & = & a \\ -4x & + & 4y & + & 3z & = & b \\ 2x & - & 2y & - & z & = & c \end{array}\right. \qquad (ii)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & t & = & a \\ x & - & y & - & z & - & t & = & b \\ -x & - & y & + & z & + & t & = & c \\ -3x & + & y & - & 3z & - & 7t & = & d \end{array}\right.$$

$$(iii)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & 3z & = & a \\ 3x & + & y & - & 5z & = & b \\ 4x & + & 2y & - & z & = & c \\ x & & & - & 7z & = & d \end{array}\right.$$

Exercice 11. Résoudre les systèmes suivants en fonction du ou des paramètre(s):

$$(i)\quad \left\{\begin{array}{rcrcl} & & y & = & \lambda x \\ x & + & z & = & \lambda y \\ y & + & t & = & \lambda z \\ z & + & u & = & \lambda t \\ & & t & = & \lambda u \end{array}\right. \qquad (ii)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2mx & + & (m-1)y & + & (5-m)z & = & 0 \\ (m-1)x & + & 2my & + & (m+7)z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$(iii)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ ax & + & by & + & cz & = & d \\ a^2x & + & b^2y & + & c^2z & = & d^2 \end{array}\right. \quad \text{où } a,\ b,\ c \text{ et } d \text{ deux-à-deux distincts.}$$

Exercice 12. Déterminer trois réels a, b, c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{(x-3)^2}.$$

Exercice 13. (Système non linéaire). Déterminer tous les réels $x, y, z > 0$ tels que

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^3y^2z^6 & = & 1 \\ x^4y^5z^{12} & = & 2 \\ x^2y^2z^5 & = & 3 \end{array}\right.$$

(On pourra poser $X = \ln(x), Y = \ln(Y)$ et $Z = \ln(z)$.)

Exercice 14. Soient a et b sont deux réels et n est un entier naturel non nul. On considère le système (S) suivant:

$$(S)\left\{\begin{array}{lclcll} x_2 & = & ax_1 & + & b & \quad L_1 \\ x_3 & = & ax_2 & + & b & \quad L_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ x_n & = & ax_{n-1} & + & b & \quad L_{n-1} \\ x_1 & = & ax_n & + & b & \quad L_n \end{array}\right.$$

(1) Déterminer l'équation obtenue en effectuant l'opération:

$$L_n \longleftarrow a^{n-1}L_1 + a^{n-2}L_2 + \cdots + aL_{n-1} + L_n.$$

(2) En déduire l'ensemble des solutions du système S selon les valeurs de a et b.