Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Chapitre 3. Suites, sommes & récurrences.

Ce troisième et long chapitre est central dans ce cours. Il présente la notion de suite, les premières définitions associées et quelques suites classiques. On y introduit notamment le raisonnement par récurrence, très utilisé dans ce contexte (mais pas seulement!) et l'utilisation du symbole Σ.
La notion de convergence d'une suite réelle et toutes les questions de limites (y compris la notion de série) interviendront dans un chapitre ultérieur.

1 Notion de suite

Définition

Une **suite réelle** est une application d'une partie A de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

$$u: \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) := u_n \end{array}$$

On peut la noter u, $(u_n)_{n\in A}$ ou (u_n).

☞ Souvent, la suite u considérée aura pour ensemble de définition $\mathbb{N}$, on notera alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$.

Attention!

Il est bien important de différencier les choses suivantes: la suite $u = (u_n)$, c'est à dire l'application précédemment définie et le terme de rang n (c'est à dire le terme de la suite *indexé* ou *à la position* n), noté tout simplement u_n, qui lui est un nombre.

Exemple

Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ des nombres pairs. On a donc $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$ etc... On constate que, plus généralement, on a $u_n = 2n$.

La "formule" précédente s'appelle *expression du terme général*; elle permet de calculer directement le terme de rang n à partir de la valeur de n Une telle expression est très pratique mais n'est pas toujours facile à obtenir.

Exemple

La suite de *Fibonacci* est la suite (u_n) définie par ses premiers termes $u_0 = u_1 = 1$ et chaque terme suivant est la somme des deux termes précédents :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

On peut calculer *à la main* u_2, u_3, .. mais pas directement u_{17}, en tout cas pas sans un peu de travail. C'est un cas particulier de *suite récurrente linéaire d'ordre* 2.

1.1 Modes de génération d'une suite

Il existe plusieurs procédés pour définir une suite réelle, que nous présentons ici.

- Expression du type : $u_n = f(n)$

Une première manière de définir une suite est de donner l'expression de son terme général, c'est à dire une formule qui permet de calculer le terme u_n directement en fonction de son rang n, accompagnée de son ensemble de définition.

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}, \qquad n \geq 3.$$

On constate notamment que cette suite n'est définie qu'à partir du rang $n = 3$. On peut donc calculer, par exemple, les trois premiers termes:

$$u_3 = \frac{1}{6}, \qquad u_4 = \frac{1}{24}, \qquad u_5 = \frac{1}{60}.$$

Exercice 1. (Exemples faciles)

(i) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par $u_n = 2^{-n}$. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3.

(ii) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier n par $v_n = n^2 + 2n$. Exprimer, pour tout entier n, v_{n+1} en fonction de v_n.

- Définition par récurrence à un terme : expression du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Dans ce cas, la suite est définie par son premier terme et une formule qui s'applique à chaque terme successif pour calculer celui d'après. Il faut s'assurer que la suite est bien définie (c'est à dire qu'on ne tombe jamais sur un terme qui serait en dehors du domaine de définition de f) mais lorsque c'est le cas, on calcule de proche en proche tous les termes.

Nous rencontrerons très très souvent ce type de suite qui donnera lieu à un grand nombre d'exercices.

Exemple

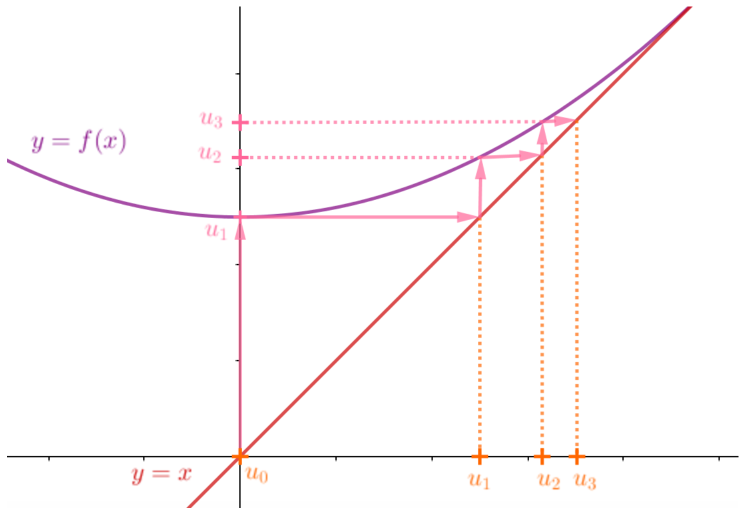
Soit la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_1 &= 0 \\ u_{n+1} &= -2u_n + 3, \qquad n \geq 1 \end{cases}$$

Le calcul des trois premiers termes donne donc $u_1 = 0$, $u_2 = 3$ et $u_3 = -3$. En revanche, le calcul de u_{17} nécessiterait le calcul préalable des 16 termes précédents... Cette suite est un exemple de suite classique : c'est une suite *arithmético-géométrique.*

Exemple

La figure ci-dessous, propose une représentation *en escalier* de la suite récurrente $u_{n+1} = (u_n^2 + 1)/2$, avec $u_0 = 0$, c'est à dire qu'on voit apparaître le processus de construction *récursif* de chacun des termes de la suite.



- Autres types de définition par récurrence :

Il est possible aussi que la définition par récurrence fasse intervenir plusieurs des termes précédents (comme la suite de Fibonacci vue ci-avant) ou bien qu'elle dépende à la fois des termes précédents et de n.

Exemple

On considère la suite (v_n) définie par

$$\begin{cases} v_0 &= 1 \\ v_{n+1} &= -4v_n + n^2 - n + 7, \qquad n \geq 0 \end{cases}$$

- De manière implicite:

Parfois, on sait que tous les termes de la suite sont bien définis comme solutions de certaines équations qu'on ne sait pas forcément résoudre à la main, ce qui empêche d'avoir une expression simple ou facile à manipuler et on doit aller chercher des résultats *qualitatifs* pour étudier ce type de suite.

Exercice 2.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4.$$

(1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n.
(2) Calculer u_1 et u_2.
(3) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n \in \left]0, \dfrac{2}{3}\right[$.

1.2 Monotonie

Définition

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) est:

- **croissante** si, pour tout entier $n, u_{n+1} \geqslant u_n$;
- **décroissante** si, pour tout $n, u_{n+1} \leqslant u_n$;
- **monotone** si elle est croissante ou bien décroissante.

Lorsque les inégalités sont strictes ont dit que la suite est strictement croissante ou décroissante ou monotone.

À retenir!

Voici plusieurs méthodes pour déterminer le sens de variation d'une suite.

- On peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- Si la suite est **strictement positive** (ce dont on devra s'assurer en premier lieu), on peut étudier la position de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1.

Exercice 3. Étudier la monotonie de la suite (u_n) définie par : pour tout entier n, $u_n = n^2 + 1$.

Remarque

On peut également s'intéresser à la monotonie *à partir d'un certain rang.*

Par exemple, considérons la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = -(n-1)(n-5)$. Les premiers termes de cette suite sont $v_0 = -5$, $v_1 = 0$, $v_2 = 3$, $v_3 = 4$ mais $v_4 = 3$. On constate alors que

$$v_{n+1} - v_n = -n(n-4) - (-(n-1)(n-5)) = -n^2 + 4n + n^2 - 6n + 5 = -2n + 5.$$

Or, $-2n+5 < 0$ dès que $n \geq 3$. Il suit que la suite (v_n) est strictement décroissante, à partir de $n = 3$.

1.3 Suites bornées

Définition

Considérant toujours une suite réelle (u_n), on dira que celle-ci est:

- **majorée** si il existe un nombre réel M tel que, pour tout entier n, $u_n \leqslant M$;
- **minorée** si il existe un nombre réel m tel que, pour tout entier n, $u_n \geqslant m$;
- **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Propriété

Soit (u_n) une suite réelle. On a alors

$$(u_n) \text{ est bornée} \quad \iff \quad \exists M \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M.$$

Exercice 4. Démontrer la proposition ci-dessus.

Exercice 5. Montrer que la suite (u_n) est bornée, où (u_n) est définie pour $n \geq 1$ par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{1+n^2} + \frac{3}{\sqrt{2n-1}}.$$

1.4 Opérations sur les suites

À partir de deux suites, on peut en construire d'autres. Plus précisément:

Définition

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$ un coefficient constant. Alors, on peut définir les opérations suivantes sur les suites:

- La somme des deux suites:
$$(u_n)_{n\geq 0} + (v_n)_{n\geq 0} = (u_n + v_n)_{n\geq 0};$$
- Le produit des deux suites:
$$(u_n)_{n\geq 0} \times (v_n)_{n\geq 0} = (u_n v_n)_{n\geq 0};$$
- La multiplication d'une suite par un terme constant:
$$\lambda(u_n)_{n\geq 0} = (\lambda u_n)_{n\geq 0}.$$

Exercice 6. On considères deux suites bornées (u_n) et (v_n).

(1) Montrer que la somme des deux suites est encore une suite bornée. La réciproque est-elle vraie?
(2) Mêmes questions avec le produit des deux suites.

2 Raisonnement par récurrence

Le principe de récurrence sert à démontrer des propositions du type "pour tout entier n, $\mathcal{P}(n)$ est vraie". Plus précisément :

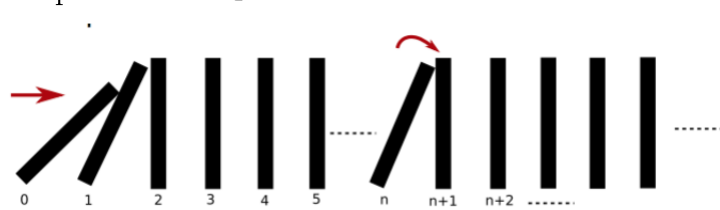
Théorème

Principe de récurrence.

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété qui dépend de $n \in \mathbb{N}$. Si

(i) La propriété est vraie pour $n = 0$;
(ii) Pour tout entier n, la véracité de la propriété au rang n entraîne celle de la propriété au rang $n+1$;

alors la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.



À retenir!

Il y a donc deux étapes pour démontrer qu'une propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par récurrence.
L'**initialisation** : on vérifie que c'est vrai au départ.
L'**hérédité** : on vérifie que la propriété se *propage*. Le fait de supposer que la propriété est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ s'appelle l'**hypothèse de récurrence**.

Ces deux étapes sont toutes deux indispensables.

Remarque

Si on veut montrer qu'une propriété est vraie pour tout $n \geq 1$ ou plus généralement pur tout $n \geq n_0$, il suffit d'initialiser au rang n_0 et de faire l'hypothèse de récurrence pour un certain $n \geq n_0$.

Attention!

Au cas où un doute subsisterait, on mentionne quand même que raisonner par récurrence n'a de sens que pour démontrer une propriété indexée par des entiers.
Il est bien sûr capital que chaque entier soit suivi de l'entier d'après. Cette propriété n'a pas de sens pour des réels quelconques.

Exemple

Montrons que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2.$$
On raisonne bien évidemment par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ (attention, ici on commence à $n = 1$). La propriété au rang n est alors
$$\mathcal{P}(n): \qquad 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2.$$

- initialisation. Pour $n = 1$, on a d'une part $2n-1 = 1$ et d'autre part $1^2 = 1$. Donc la propriété est bien vraie.

- hérédité. Supposons que, **pour un certain** $n \geq 1$, la propriété soit vraie, c'est à dire qu'on ait bien
$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2.$$
Cette hypothèse est notre hypothèse de récurrence. On la note souvent [HR].
Montrons alors que la propriété est vraie au rang $n+1$, c'est à dire, montrons que
$$1+3+\cdots+(2n-1)+(2(n+1)-1) = (n+1)^2.$$
On a encore rien montré ici. On a juste écrit ce qu'on supposait vrai et ce qu'il fallait faire.
Dans une récurrence, il faut, au rang $n+1$, faire apparaître la quantité sur laquelle porte HR. šPlus précisément, on a
$$\begin{aligned} 1+3+\cdots+(2n-1)+(2(n+1)-1) &= 1+3+\cdots+(2n-1)+2n+1 \\ &= n^2+2n+1 \qquad \text{(D'après HR)} \\ &= (n+1)^2, \end{aligned}$$
ce qui est bien la propriété au rang $n+1$. Ainsi la propriété est héréditaire.

Par principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a bien
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 1+3+\cdots+(2n-1) = n^2.$$

Exercice 7. Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1+q+q^2+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Exercice 8. On considère la suite (u_n) définie par
$$u_1 = 0, \quad \text{et} \qquad u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

(1) Calculer les six premiers termes de la suites.
(2) Émettre une conjecture quant à l'expression du terme général de la suite.
(3) Démontrer, par récurrence, la conjecture précédemment énoncée.

Du principe de récurrence (simple) se déduisent[1] également deux autres principes de récurrence qui peuvent être parfois utiles.

Théorème

Principe de récurrence double.

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété définie pour tous les entiers n. Si:

(i) La propriété est vraie aux rangs $n = 0$ **et** $n = 1$;
(ii) Pour tout entier n, la véracité de la propriété au rang n **et** au rang $n+1$ entraînent la véracité de la propriété au rang $n+2$;

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n.

Exercice 9. Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_1 & = & 1 \\ u_{n+2} & = & 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $u_n = 3^n - 2^n$.

Théorème

Principe de récurrence forte.

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété définie pour tous les entiers n. Si
(i) $\mathcal{P}(0)$ est vraie ;
(ii) $\mathcal{P}(n)$ est **fortement héréditaire**, c'est à dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \cdots, \mathcal{P}(n) \text{ vraies }) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)\text{vraie},$$

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n.

Exercice 10. Considérons la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \qquad n \geq 0. \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq 2^n$.

3 Le symbole Σ

3.1 Sommes: utilisation du symbole Σ

On a utilisé, à plusieurs reprises, des pointillés $(\cdots)$ dans des formules pour symboliser une somme s'arrêtant au bout d'un certain rang. On introduit alors un symbole rendant plus facile à manipuler les expressions de ce type.

Définition

Soit (a_n) une suite, indexée sur les entiers et soient $p, q \in \mathbb{N}$ deux indices avec $p < q$. La somme des termes de la suite, entre les indices p et q se note

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q.$$

[1]Il est possible, avec une récurrence simple, de démontrer la véracité du principe de récurrence double ainsi que celle de la récurrence forte.

Attention!

Dans cette notation, la lettre i est *muette*; elle peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre **non déjà utilisée**:

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = \sum_{j=p}^{q} a_j = \sum_{n=p}^{q} a_n.$$

☞ Il peut arriver d'utiliser une notation relativement alternative $\displaystyle\sum_{p\leq i\leq q} a_i = \sum_{i=p}^{q} a_i$.

Propriété

Somme géométrique finie.

Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Remarque

Dans la proposition précédente, si $q = 1$, il est facile de simplifier la somme

$$\sum_{k=0}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n+1 \text{ fois}} = n + 1.$$

Règle(s) de calcul

Propriétés du symbole Σ.

Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les égalités qui suivent sont vraies sans condition sur les variables qui y figurent.

- Relation de Chasles
$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=p}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{q} a_k$$
- Changement d'indice
$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=p-1}^{q-1} a_{k+1} = \sum_{k=p+1}^{q+1} a_{k-1}$$
- Somme d'une somme
$$\sum_{k=p}^{q} (a_k + b_k) = \sum_{k=p}^{q} a_k + \sum_{k=p}^{q} b_k$$
- Multiplication par un terme constant
$$\sum_{k=p}^{q} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=p}^{q} a_k.$$

À retenir!

Un cas particulier de la relation de Chasles, très utile pour les récurrences, est que

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + a_{n+1}.$$

Propriété

Trois sommes à connaître. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

3.2 Sommes télescopiques

Dans certaines sommes, les termes se *neutralisent* deux à deux, et il ne reste finalement que les termes extrêmes.

Propriété

Sommes télescopiques.

Soient (a_n) une suite réelle et p, q deux entiers avec $p < q$. Alors,

$$\sum_{k=p}^{q} (a_{k+1} - a_k) = a_{q+1} - a_p.$$

Exemple

En remarquant que, pour tout entier $k \geq 1$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, on peut obtenir

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Exercice 11. En remarquant que $2k+1 = (k+1)^2 - k^2$, exprimer, suivant la parité de n, la somme des entiers impairs compris entre 1 et n.

3.3 Sommes à deux indices

On considère maintenant une suite de réels $(a_{i,j})$ indexée par **deux indices** i et j. On cherche donc à écrire la somme de ses termes lorsque les deux indices parcourent un certain ensemble.
Ainsi, la *somme double*

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{i,j}$$

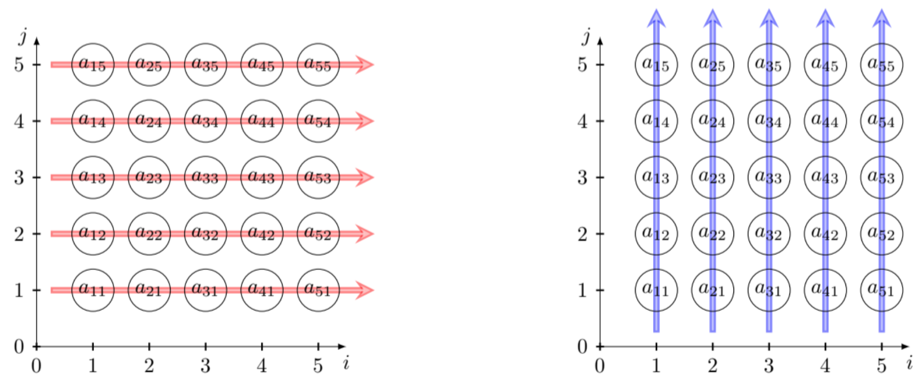
représente la somme de tous les termes $a_{i,j}$ dont le premier indice est compris entre 1 et n et dont le deuxième indice est compris entre 1 et m. Lorsque i et j parcourent le même ensemble $\{1, 2, \cdots, n\}$, la somme précédente s'écrira $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}$.

Propriété

Lorsque les indices ne dépendent pas l'un de l'autre, on peut permuter l'ordre de sommation, ce qui revient à lister les termes sommés dans un autre ordre.

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right).$$

Par exemple, pour $1 \leq i, j \leq 5$, on peut illustrer cette propriété avec le schéma suivant



$$\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{5} a_{ij} = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} a_{ij}$$

Attention!

Si les indices sont toujours des lettres muettes, il faut cependant bien comprendre que $a_{i,j} \neq a_{j,i}$ et être scrupuleux en permutant les symboles Σ.

Par exemple, si $a_{i,j} = \dfrac{(-1)^i}{j}$, on aura $a_{1,2} = -\dfrac{1}{2}$ alors que $a_{2,1} = 1$.

À retenir!

Pour calculer une somme double, on fixe un premier indice et on calcule séparément une des sommes en considérant l'indice fixé comme un paramètre. Une fois cette première somme exprimée en fonction de l'indice fixé, il reste à calculer la somme restante grâce à l'expression que l'on vient de trouver.

Exemple

En appliquant la proposition précédente:

$$\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} ij = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} ij \right).$$

Soit donc i **fixé**. La règle de multiplication d'une somme par un terme constant, on déduit que

$$\sum_{j=1}^{m} ij = i \times \sum_{j=1}^{m} j = i \times \frac{m(m+1)}{2}.$$

(En effet, i ne dépend pas de j, il se comporte donc comme une constante dans cette somme.) On peut donc réinjecter l'expression obtenue dans la somme sur les i:

$$\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} ij = \sum_{i=1}^{n} \left(i \frac{m(m+1)}{2} \right) = \frac{m(m+1)}{2} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)m(m+1)}{4}.$$

En particulier, si $m = n$, on obtient la formule

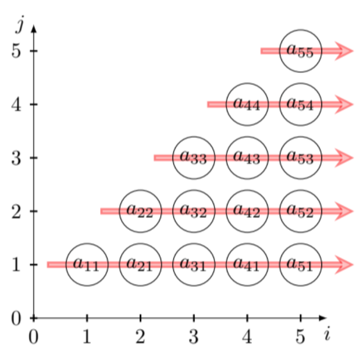
$$\sum_{1 \le i,j \le n} ij = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

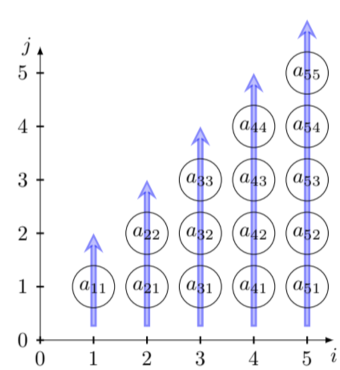
Exercice 12. Calculer $\displaystyle\sum_{1 \le i,j \le n} (i + j)$.

Attention!

Parfois, le deuxième indice varie en fonction du premier et l'ordre de sommation peut avoir une incidence sur la simplification des calculs. On fait donc attention à cette dépendance d'indices lors de la permutation de ceux-ci

$$1 \le j \le i \le n \iff \begin{cases} 1 \le j \le n \\ j \le i \le n \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le i \end{cases}$$





$$\sum_{j=1}^{5} \sum_{i=j}^{5} a_{ij} = \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{i} a_{ij}$$

Exemple

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i\le j\le n} \frac{i}{j+1} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j+1} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j+1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1}\sum_{i=1}^{j} i\\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1} \times \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{4}.\end{aligned}$$

Exercice 13. Calculer $\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le n} ij.$

4 Produits: Le symbole Π

Le symbole Π s'utilise de la même façon que Σ mais désigne un produit.

Définition

Soit (a_n) une suite, indexée sur les entiers et soient $p, q \in \mathbb{N}$ deux indices avec $p < q$. Le produit des termes de la suite, entre les indices p et q se note

$$\prod_{i=p}^{q} a_i = a_p \times a_{p+1} \times \cdots \times a_q.$$

Exemple

Le nombre $n!$ (appelée **factorielle** n) s'écrit donc

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Exercice 14. Que vaut $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} 2^i$?

Règle(s) de calcul

Propriétés du symbole Π.

Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les égalités qui suivent sont vraies sans condition sur les variables qui y figurent.

- Regroupement par paquets

$$\prod_{k=p}^{q} a_k = \prod_{k=p}^{m} a_k \times \prod_{k=m+1}^{q} a_k$$

- Changement d'indice

$$\prod_{k=p}^{q} a_k = \prod_{k=p-1}^{q-1} a_{k+1} = \prod_{k=p+1}^{q+1} a_{k-1}$$

- Multiplication par un terme constant

$$\prod_{k=p}^{q} \lambda a_k = \lambda^{q-p+1} \prod_{k=p}^{q} a_k.$$

Exercice 15. Calculer

$$(i) \quad \prod_{i=1}^{n} \frac{i+1}{2} \qquad\qquad (ii) \quad \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right).$$

Suites usuelles

Les différents outils tout juste introduits nous permettent déjà d'établir des résultats sur des suites usuelles, qu'on peut donc utiliser sans tout démontrer à chaque fois.

4.1 Suites arithmétiques

Définition

Une suite (u_n) est dite **arithmétique** s'il existe une constante $r \in \mathbb{R}$ (appelée alors **raison** de la suite) telle que, pour tout entier n,

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Une récurrence immédiate permet de déduire l'expression du terme général d'une suite arithmétique.

Propriété

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de raison r. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = u_0 + nr.$$

Remarque

Si $p < n$, on peut également exprimer u_n à partir de u_p (ce qui est notamment pratique lorsque u_0 n'est pas le premier terme) avec la formule générale suivante qu'il est aisé de vérifier

$$u_n = u_p + (n-p)r.$$

À retenir!

Pour montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, on montre que la différence de deux termes consécutifs est constante. C'est à dire qu'on calcule, pour n entier quelconque, la différence $u_{n+1} - u_n$ et on montre que cette quantité ne dépend pas de n.
Une fois que c'est fait, on peut citer le cours pour en déduire l'expression du terme général.

☞ Il est aussi évident de constater qu'une suite arithmétique est croissante si et seulement si sa raison est positive ($r \geq 0$) et décroissante si et seulement si sa raison est négative ($r \leq 0$).

Propriété

Somme des termes d'une suite arithmétique.

Soit (u_n) une suite arithmétique. Alors, pour tout $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right).$$

Exercice 16. Soit (u_n) une suite arithmétique et soient m, n deux entiers avec $m < n$. Que vaut

$$\sum_{k=m}^{n} u_k?$$

Exercice 17. Calculer le plus rapidement possible les sommes suivantes

(i) $$1 + 2 + 3 + \cdots + 200$$

(ii) $$1 + 3 + 5 + \cdots + 199$$

(iii) $$5 + 3 + 1 - 1 - \cdots - 11$$

4.2 Suites géométriques

Définition

Une suite (u_n) est dite **géométrique** s'il existe une constante $q \in \mathbb{R}$ (appelée alors **raison** de la suite) telle que, pour tout entier n,

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

Comme pour les suites arithmétiques, une récurrence très facile permet de déduire l'expression du terme général d'une suite géométrique.

Propriété

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite géométrique de raison q. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = q^n u_0.$$

Remarque

Encore une fois, si $p < n$, on peut également exprimer u_n à partir de u_p à l'aide de la formule générale suivante que le lecteur vérifiera avec facilité

$$u_n = q^{n-p} u_p.$$

À retenir!

Pour montrer qu'une suite non nulle (u_n) est géométrique, on peut montrer que le quotient de deux termes consécutifs est constant. C'est à dire qu'on calcule, pour n entier quelconque, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et on montre que cette quantité ne dépend pas de n.
On peut aussi revenir à la définition et trouver la raison qui permet d'exprimer un terme en fonction du terme précédent multiplié par cette raison.

☞ Avec les notations et la terminologie que l'on vient d'introduire, on constate que la Proposition **??** établissait en fait la formule de la somme des termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme 1. On en déduit aisément la formule du cas général suivant.

Propriété

Somme des termes d'une suite géométrique.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Alors, pour tout $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right).$$

Exercice 18. Généraliser la formule précédente; *i.e.* calculer $\sum_{k=m}^{n} u_k$.

Exercice 19. Calculer

$$(i) \quad \sum_{j=2}^{n+1} 2^j \qquad\qquad (ii) \quad \sum_{k=1}^{n+3} \frac{2^{k+1}}{3^k}.$$

Exercice 20. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison q. Exprimer, à l'aide de u_0 et de q, le produit

$$\prod_{k=0}^{n} u_k.$$

4.3 Suites arithmético-géométriques

Définition

Une suite (u_n) est dite **arithmético-géométrique** si il existe un réel $a \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$ et un réel $b \neq 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque

On exclue de la définition le cas $a = 1$, correspondant à une suite arithmétique de raison b, et le cas $a = 0$, correspondant à la suite constante égale à b car on sait ils appartiennent à d'autres types de suites qu'on sait déjà étudier.

La méthode qui va suivre permet de trouver l'expression du terme général d'une suite arithmético-géométrique. C'est la démarche qu'**il faudra reprendre à chaque fois** que la situation se présentera.

À retenir!

Pour trouver la formule explicite d'une suite arithmético-géométrique vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = au_n + b,$$

on suit les étapes ci-dessous:

(1) On résout l'équation de point fixe $a\ell + b = \ell$.
(2) On introduit alors une suite auxiliaire (v_n), définie par $v_n = u_n - \ell$, dont on justifie la nature géométrique en précisant la raison q.
(3) On écrit alors l'expression du terme général de v_n, $v_n = q^n v_0$.
(4) On en déduit l'expression du terme général de u_n, valable pour toute valeur de n:

$$\begin{aligned} u_n &= v_n + \ell = q^n v_0 + \ell \\ u_n &= q^n(u_0 - \ell) + \ell. \end{aligned}$$

Exercice 21. En suivant la méthode précédente, donner l'expression du terme général de la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= 3u_n + 2, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

4.4 Suites à récurrence linéaire d'ordre 2

Définition

Une suite (u_n) est dite **récurrente linéaire d'ordre 2** si il existe un réel a et un réel $b \neq 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Dans le but de pouvoir étudier une suite vérifiant la relation de récurrence précédente, faisons d'ores et déjà quelques remarques.

Remarque

Considérons donc cette fameuse relation de récurrence

$$(\mathcal{R}) \qquad\qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(1) Il est important d'observer qu'une suite vérifiant $(\mathcal{R})$ est totalement déterminée par les valeurs de ses deux premiers termes.
(2) On observe également que si (a_n) et (b_n) sont deux suites vérifiant (R), alors la suite $(a_n)+(b_n)$ vérifie encore $(\mathcal{R})$ tout comme la suite $\lambda(u_n)$ pour n'importe quelle valeur $\lambda \in \mathbb{R}$.
(3) Une approche naïve serait alors de rechercher une suite géométrique (non nulle) de la forme (q^n) vérifiant $(\mathcal{R})$ et de construire d'autres suites vérifiant $(\mathcal{R})$ jusqu'à les obtenir toutes. Injectant ceci dans $(\mathcal{R})$, on constate que la raison q d'une telle suite devrait nécessairement vérifier l'équation du second degré

$$(E) \qquad\qquad q^2 - aq - b = 0.$$

Cette équation est alors appelée **équation caractéristique** de la suite (u_n).

On peut alors énoncer le résultat puis la méthode d'étude de telles suites.

Propriété

Terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Soit (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est notée (E) et son discriminant Δ. Alors,

(i) Si $\Delta > 0$ - et donc si l'équation (E) admet deux solutions réelles distinctes q_1 et q_2 - il existe deux réels λ, μ tels que

$$u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n, \qquad n \geq 0.$$

(ii) Si $\Delta = 0$ - et donc si l'équation (E) admet une unique solution réelle q_0 - il existe deux réels λ, μ tels que

$$u_n = (\lambda + n\mu)q_0^n, \qquad n \geq 0.$$

Dans les deux cas, les couples de réels (λ, μ) sont uniques. On les calcule notamment en injectant les deux premiers termes dans l'expression du terme général u_n.

À retenir!

Pour étudier une suite (u_n) récurrente linéaire d'ordre 2, on suit les étapes ci-dessous.

(1) On forme l'équation caractéristique (E) associée à la suite (u_n).
(2) On résout l'équation (E). En fonction des solutions, on écrit qu'un théorème du cours nous permet de connaître la forme du terme général u_n et qu'il reste donc à déterminer les deux paramètres λ et μ.
(3) On détermine λ et μ en résolvant un système de deux équations à deux inconnues, obtenu en injectant les deux premiers termes de la suite (u_n) dans l'expression du terme général.

Exercice 22. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression du terme général de la suite (u_n) définie par:

(i)
$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_1 &= 1 \\ u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

(ii)
$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 2 \\ u_{n+2} &= 6u_{n+1} - 9u_n \end{cases}$$

(iii)
$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 1 \\ u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

Autres exercices - Travaux dirigés

4.5 Raisonnement par récurrence

Exercice 23. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.

Exercice 24. Calculer les premiers termes des suites suivantes, conjecturer quant au terme général en fonction de n puis le démontrer:

(1) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$.
(2) $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_1 = 1$ et par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $u_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} u_n$.
(3) $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} = \sqrt{1 + (u_n)^2}$.
(4) $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et par : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} = u_n + 2^n$.

Exercice 25. Montrer, par récurrence sur $\mathbb{N}^*$, que

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4}.$$

Exercice 26. Soit (u_n) la suite définie par:

$$\begin{cases} u_0 &= 4 \\ u_{n+1} &= u_n^2 - 2, \qquad n \geq 0. \end{cases}$$

Montrer que:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \mathbb{N}$, *i.e.* u_n est un entier naturel pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (2+\sqrt{3})^{2^n} + (2-\sqrt{3})^{2^n}$.

4.6 Étude de monotonie et suites récurrences $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 27. Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par:

(1) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2, \quad n \in \mathbb{N}$.
(2) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + e^{u_n}, \quad n \in \mathbb{N}$.
(3) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \ln(1 + |u_n|), \quad n \in \mathbb{N}$.

Exercice 28.

(1) Montrer que la suite (u_n) définie par la formule ci-dessous est croissante.
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
(2) Plus généralement, si (a_k) est une suite à termes tous strictement positifs, montrer que la suite (u_n) ci-dessous est croissante, où
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$
(3) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = a_{2n}$, où la suite (a_n) est définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$ par la formule ci-dessous, est décroissante.
$$a_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^j}{j}.$$

Exercice 29. On considère la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 & = & 1/2 \\ u_{n+1} & = & u_n^2 + 3/16, \qquad n \geq 0. \end{cases}$$
(1) Étudier les variations de la fonction $f:\ x \mapsto x^2 + 3/16$ sur $[0;+\infty[$.
(2) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$. (*On dit que* $[0;+\infty[$ *est stable sous l'action de* f.)
(3) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
(4) Montrer que (u_n) est décroissante.
(5) Mêmes questions avec $u_0 = 1/8$.
(6) Déterminer le signe de $f(x) - x$. Interpréter.

Exercice 30. Reprendre l'exercice précédent avec la suite
$$u_{n+1} = u_n \ln(1 + u_n), \qquad n \geq 0,$$
avec dans un premier temps $u_0 = 2$ puis avec $u_0 = 1$.

Exercice 31. On considère la suite (u_n) définie par
$$u_0 \in \mathbb{R}, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{u_n + 1}$$
(1) Que se passe-t-il si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -1$?
(2) Dans toute la suite, on prend $u_0 = 0$. Montrer que la suite (u_n) est bien définie (*i.e.* que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe) et que $u_n \geq 0$.
(3) On note $f : x \mapsto 1/(x+1)$. Dresser le tableau de variations de f sur $[0;+\infty[$.
(4) On note $g = f \circ f$. Exprimer $g(x)$ en fonction de x puis déterminer les variations de g sur l'intervalle précédent.
(5) On définit $v_n = u_{2n}$. Montrer que $v_{n+1} = g(v_n)$.
(6) En déduire que (v_n) est croissante.
(7) Montrer que la suite (u_{2n+1}) est décroissante.

4.7 Calcul de sommes

Exercice 32. Écrire les sommes suivantes avec le symbole $\sum$

i) $2^5 + 3^5 + 4^5 + \cdots + n^5$ *ii)* $1 - a + a^2 - a^3 + \cdots + (-1)^n a^n$

iii) $\dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^4}{4} + \dfrac{a^6}{6} + \cdots + \dfrac{a^{2n}}{2n}$ *iv)* $\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{4}{5} + \cdots - \dfrac{2014}{2015} + \dfrac{2015}{2016}$

v) $\ln(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n)$. *vi)* $\dfrac{1}{1} + \dfrac{2}{2} + \dfrac{2^2}{3} + \dfrac{2^3}{4} + \cdots + \dfrac{2^{2015}}{2016}$

Exercice 33. Écrire les sommes suivantes en faisant en sorte que la première valeur de l'indice soit 0 :

$$\sum_{i=10}^{20} i\,, \quad \sum_{k=-4}^{180} \frac{k}{k+5}, \quad \sum_{i=2}^{45} 1, \quad \sum_{i=1}^{n} i.$$

Exercice 34. Calculer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{k=2}^{2014}(3k+2), \quad B = \sum_{k=4}^{1000}(8k-3), \quad C = \sum_{j=3}^{50}(3j^2+1), \quad D = \sum_{i=3}^{11} i(i-1)(i-2), \quad E = \sum_{p=945}^{2016} 3.$$

Exercice 35. Calculer les sommes suivantes :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n}(2k+1), \quad B_n = \sum_{k=0}^{n+1}(6k^2+4k+1), \quad D_n = \sum_{k=1}^{2n} k(2k-1)(k+1)$$

Exercice 36. Calculer les sommes suivantes :

$$A_n = \sum_{\alpha=0}^{n} \frac{3}{10^\alpha}, \quad B_n = \sum_{i=0}^{2n} 3 \times 4^{i+1}, \quad C_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{5 \times 2^j}{3^{j+1}}, \quad D_N = \sum_{i=0}^{N+1} 3^{2i+1},$$

$$E_r = \sum_{k=0}^{3r} \frac{2^{2k}}{3^{4k}}, \quad F_k = \sum_{s=0}^{k} \frac{2^{3s-1}}{3^{2s+2}}, \quad G_s = \sum_{m=0}^{3s} \frac{2}{5^{3m+2}}, \quad H_l = \sum_{p=0}^{2l+1} x(1-x^2)^{p+1}$$

Exercice 37. (Sommes télescopiques)

(1) Vérifier rapidement que les égalités suivantes :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \qquad \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right)$$

et

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{k} - \frac{3}{k+1} + \frac{3}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right).$$

(2) Calculer alors les sommes suivantes

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

Exercice 38. (Sommes doubles) Calculer les sommes suivantes:

$$\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i}(i-1)(n-j+1), \quad \sum_{1\le i,j\le n} a^{i+j}, \quad \sum_{1\le i\le j\le n} a^{i+j}.$$

Exercice 39. Calculer les sommes suivantes

$$(i)\ \sum_{1\le i,j\le n}(i-j), \quad (ii)\ \sum_{1\le i,j\le n}\max(i,j), \quad (iii)\ \sum_{1\le i,j\le n}|i-j|, \quad (iv)\ \sum_{0\le i<j\le n}\binom{j}{i}2^i$$

$$(v)\ \sum_{1\le i,j\le n}(i+j)^2, \quad (vi)\ \sum_{1\le i,j\le n}\frac{i}{i+j}, \quad (vii)\ \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(i^k), \quad (viii)\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}(-1)^{i+j}.$$

4.8 Suites classiques

Exercice 40. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3, \quad n \geq 0$.

(1) Montrer $v_n = u_n + 2n - 1$ est le terme général d'une suite géométrique.
(2) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
(3) Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de n.

Exercice 41. Soient (u_n) et (v_n) les deux suites définies pour tout $n \geqslant 0$ par

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n).$$

(1) On pose $t_n = u_n - v_n$ et $s_n = u_n + v_n$.

 (i) Montrer que (t_n) est une suite géométrique puis que (s_n) est constante.
 (ii) En déduire l'expression de t_n (resp. s_n) en fonction de t_0 (resp. s_0).

(2) Donner alors les expressions de u_n et de v_n en fonction de n, de u_0 et de v_0.
(3) Écrire un programme `Scilab` qui demande d'entrer un entier n au clavier et qui calcule et affiche les valeurs de u_n et de v_n.

Exercice 42. Soit (u_n) une suite telle que $u_0 = 2$ et

$$\forall n \geq 0, \qquad u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}u_n + 3.$$

(1) Soit alors (v_n) la suite définie par

$$\begin{cases} v_0 & = & 2 \\ v_{n+1} & = & \frac{1}{2}v_n + 3, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \leq v_n$.
(2) Expliciter v_n en fonction de n. En déduire une majoration de u_n.

Exercice 43. Soit (u_n) une suite vérifiant la relation de récurrence

$$(E) : \qquad u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 6, \quad n \geq 0.$$

On suppose en outre que $u_0 = u_1 = 0$.

(1) Montrer qu'il existe une unique suite constante (α_n) vérifiant la relation (E).
(2) Justifier que la suite (v_n) définie pour $n \geq 0$ par $v_n = u_n - \alpha_n$ vérifie la relation de récurrence:

$$(E') : \qquad v_{n+2} - 5v_{n+1} + 6v_n = 0.$$

En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n.

Exercice 44. On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ v_0 & = & -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} & = & 2u_n - v_n \\ v_{n+1} & = & u_n + 4v_n \end{cases}$$

(1) On considère la suite (p_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $p_n = u_n + v_n$. Montrer que (p_n) est géométrique. En déduire l'expression de p_n en fonction de n.
(2) À l'aide de la question précédente, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = 3v_n + 3^n.$$

(3) Montrer que la suite (z_n), définie pour tout n par $z_n = \dfrac{v_n}{3^n}$, est arithmétique. En déduire l'expression de son terme général.
(4) Donner enfin l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

4.9 Divers

Exercice 45. (Valeur approchée du nombre d'or)
Soit ϕ la solution positive de
$$x^2 - x - 1 = 0.$$

(1) Vérifier que $\phi = \sqrt{1+\phi}$.
(2) Justifier que $1 < \phi < 2$.
(3) Soit (u_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par
$$\begin{cases} u_1 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{1+u_n} \end{cases}$$

  (i) Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \geq 1$, on a $1 \leq u_n \leq \phi$.
  (ii) Montrer, par récurrence, que $u_{n+1} - u_n \geq 0$. En déduire le sens de monotonie de (u_n).
  (iii) Montrer, à l'aide des questions (1) et (2), que, pour tout $n \geq 1$,
$$|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{1}{2}|u_n - \phi|.$$
  (iv) En déduire, par récurrence, que, pour tout $n \geq 1$,
$$|u_n - \phi| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

(4) Déterminer le plus petit entier n à partir duquel on est sûr que l'erreur commise en approximant ϕ par u_n est inférieure à 0.01. On pourra utiliser le fait que
$$\frac{\ln(10)}{\ln(2)} \simeq 3,322.$$

Exercice 46. On considère la fonction
$$f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = (x + \ln x)\, e^{x-1}.$$

(1) Justifier que f est bien définie et dérivable sur $]0;+\infty[$. On note f' sa fonction dérivée. Pour $x \in]0;+\infty[$, calculer $f'(x)$.
(2) Établir que
$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \ln x + \frac{1}{x} > 0$$
(3) En déduire
$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad x + \ln x + 1 + \frac{1}{x} > 0.$$
(4) En déduire alors le sens de variation de f.
(5) Dresser le tableau de variation de f, comprenant la limite de f en 0 et celle en $+\infty$. Calculer $f(1)$ et $f'(1)$.
(6) Préciser la nature des branches infinies de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère du plan.
(7) Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$. On précisera la tangente au point d'abscisse 1.
(8) On considère la suite réelle (u_n) définie pour $n \geq 0$ par
$$\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{cases}$$

  (i) Montrer que si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$, alors il en est de même pour u_{n+1}. En déduire que, pour tout $n \geq 0$, u_n existe bien et que $u_n \geq 2$.
  (ii) Établir, par récurrence (et à l'aide de la question précédente) que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq e^n.$$
  (iii) En déduire que (u_n) n'est pas majorée.

Exercice 47. On considère la suite (u_n), définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

(1) Déterminer u_1 et u_2.
(2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. On pose alors $v_n = \ln(u_n)$.
(3) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, on a l'encadrement

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

(4) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq v_n \leq \frac{n+1}{2n}.$$

Exercice 48. On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur R_+ par

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}.$$

(1) Étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}_+$. Donner un équivalent de $f_n(x)$ en $+\infty$ et y préciser la limite de $f_n(x)$.
(2) On introduit la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = 1/3$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f_n(u_n).$$

(3) S'agit-il d'une suite récurrente comme celles étudiées dans ce chapitre?
(4) Calculer u_2 et u_3.
(5) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. En déduire la monotonie de (u_n).
(6) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n \leq \frac{1}{n}.$$

Exercice 49. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse aux fonctions, définies sur $\mathbb{R}$,

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k, \qquad f_n(x) = F_n'(x).$$

(1) Expliciter F_1, f_1, F_2 et f_2.
(2) Exprimer $F_n(x)$ en fonction de x (et sans symbole Σ).
(3) En déduire une expression simple de $f_n(x)$, pour $x \neq 1$.
(4) En justifiant que $f_{n+1}(1) = f_n(1) + (n+1)$, déterminer, en fonction de n, l'expression de $f_n(1)$.
(5) En écrivant $f_n(x)$ à l'aide du symbole Σ et à l'aide de la question précédente, déterminer la valeur de la somme, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}}.$$

Exercice 50.

(1) Déterminer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que le polynôme $P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex$ vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) - P(x-1) = x^4.$$

(2) En déduire l'expression d'un polynôme Q (de degré 5) tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30} Q(k)$.

Vérifier que $Q(0) = Q(-1) = Q(-1/2) = 0$. En déduire formule factorisée pour la somme ci-dessus.
(3) Redémontrer la formule trouvée à la question précédente par récurrence.