Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Chapitre 4. Suites convergentes.

Après avoir introduit dans le chapitre précédent la notion de suite et les premiers outils d'étude, nous nous intéressons ici à leur comportement asymptotique, c'est à dire au comportement de la suite lorsque l'indice n tend vers l'infini.
On va donc introduire la notion de suite convergente, de suite divergente (à la fois vers l'infini et aussi sans limite) puis présenter les méthodes et les résultats qui permettent donc de déterminer la **nature** de la suite qu'on étudie. Enfin, on conclura ce chapitre en présentant la notion de série, qui est un cas particulier de suite (le terme général est défini par une somme).

1 Suites convergentes et divergentes

1.1 Suites convergentes

On dira d'une suite qu'elle est **convergente** (ou qu'elle converge), si ses termes se "rapprochent" de plus en plus d'une certaine valeur *limite* ℓ. Ceci s'écrit naturellement rigoureusement à l'aide de quantificateurs.

Définition

Soient (u_n) une suite numérique et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que (u_n) converge vers ℓ (ou que la suite (u_n) a pour limite ℓ) si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Il est important de bien comprendre ce que cela signifie. Cette définition veut dire que, pour un *écart* - ou une distance à ℓ - aussi petit.e que l'on veut ($\forall \varepsilon > 0$), on va pouvoir trouver un rang N ($\exists N \in \mathbb{N}$) à partir duquel tous les termes de la suite ($\forall n \geq N$) seront distants de ℓ d'au plus l'écart choisi ($|u_n - \ell| < \varepsilon$).

Une autre façon est aussi de formuler les choses comme ceci: la suite converge vers ℓ tout intervalle (ouvert) centré en ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N (ou encore tous les termes sauf un nombre fini - ceux dont le rang est inférieur à N). En effet,

$$|u_n - \ell| < \varepsilon \Longleftrightarrow \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon.$$

Exercice 1. Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 1 + \left(\frac{-1}{2}\right)^n$.

(1) Représenter graphiquement les sept premiers termes de la suite.
(2) Conjecturer, sans démontrer, sur la nature de (u_n).
(3) Déterminer graphiquement, pour $\varepsilon = 0.15$ puis pour $\varepsilon = 0.0625$, le plus petit N tel que

$$\forall n \geq N, \quad |u_n - 1| < \varepsilon.$$

Exemple

Regardons la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{1}{n^2+1}$. En regardant le terme général, ou en calculant éventuellement les premiers termes, on peut penser que la suite est décroissante et qu'on se rapproche de plus en plus de 0. On va montrer que c'est le cas, en vérifiant que la définition de convergence est satisfaite.

La *distance* de u_n à 0, qu'on va chercher à estimer, est exactement $|u_n|$. Comme la suite est ici à termes positifs, on doit donc estimer u_n.
Soit alors $\varepsilon > 0$ arbitrairement choisi et fixé (on garde en tête qu'il s'agit d'un nombre très petit). Peut-on alors trouver un rang à partir duquel tous les termes de la suite seront plus petits que ε? Ceci revient à trouver le plus petit entier n (qui dépendra naturellement de ε) tel que

$$u_n = \frac{1}{n^2+1} < \varepsilon.$$

Cette inéquation est facile à résoudre; on doit avoir $n > \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}$. Il suffit donc de prendre

$$N = \left\lfloor \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} \right\rfloor + 1$$

pour que tous les termes de la suite dont l'indice est plus grand que N soient plus petits que ε.

L'exemple précédent démontre rigoureusement la convergence de la suite vers 0. Il est important de l'avoir compris et de savoir le faire. Cela dit, en pratique on fera souvent appel à des suites dites *de référence* et à des règles de calcul pour déterminer la limite. Ces outils seront présentés dans la section suivante. Dans certains cas plus complexes, une étude plus précise et *qualitative* de la suite (à l'aide d'encadrements par exemple) peut s'avérer nécessaire pour appliquer des critères de convergence, comme on le verra dans l'avant dernière section de ce chapitre.

Exercice 2. Montrer, à l'aide de la définition, que la suite (v_n), définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{2n-3}{n}$ converge vers 2.

☞ Les démonstrations des deux propositions suivantes ne sont pas exigibles. Néanmoins, elles sont instructives et se permettent donc de figurer à la suite de leurs énoncés.

Propriété

Si la limite d'une suite existe, elle est unique.

Preuve. Supposons qu'une suite (u_n) converge vers deux limites ℓ_1 et ℓ_2. On va alors appliquer la définition de la limite. Soit $\varepsilon > 0$. La convergence de (u_n) vers ℓ_1 assure l'existence d'un rang N_1 à partir duquel $|u_n - \ell_1| < \varepsilon$. Comme (u_n) converge également vers ℓ_2, la définition nous garantie qu'à partir d'un certain rang N_2, on a $|u_n - \ell_2| < \varepsilon$. *A priori*, ces rangs ne sont pas les mêmes. Si on veut être sûr de vérifier les deux inégalités, il faut prendre un indice quoi soit supérieur à N_1 et N_2. En étant supérieur au maximum des deux, on est bien supérieur aux deux. Soit donc $n \geq \max(N_1, N_2)$. On a, grâce à l'inégalité triangulaire,

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - u_n + u_n - \ell_2| \leq |u_n - \ell_1| + |u_n - \ell_2| \leq \varepsilon + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Mais ε a été arbitrairement choisi et peut être aussi petit qu'on veut. Mais la différence entre deux nombres réels ne peut être arbitrairement petite que si ces deux nombres sont égaux:

$$(\forall \varepsilon > 0, \quad |\ell_1 - \ell_2| \leq \varepsilon) \Longleftrightarrow \ell_1 = \ell_2.$$

Il n'y a donc qu'une seule limite possible. $\square$

Propriété

Si une suite (u_n) est convergente, alors elle est bornée. La réciproque est fausse.

Preuve. Supposons en effet que la suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, par définition de la limite (pour par exemple $\varepsilon = 1$), il existe un rang N à partir duquel

$$|u_n - \ell| \leq 1 \Longleftrightarrow \ell - 1 \leq u_n \leq \ell + 1 \Longrightarrow -|\ell| - 1 \leq u_n \leq |\ell| + 1.$$

Cet encadrement est vrai pour tous les termes sauf un nombre fini (ceux avant u_N). Mais, dans le pire des cas, ces termes ont un *maximum* (le plus grand d'entre eux, qui existe bien puisqu'on en a un nombre fini). Dans tous les cas, on a, pour **tout** $n \geq 0$,

$$|u_n| \leq \max\left(|\ell| + 1, \max(|u_0|, |u_1|, \cdots, |u_{N-1}|)\right)$$

et la suite est bien bornée. Il est très facile de voir que la réciproque est fausse en exhibant un contre-exemple, comme $((-1)^n)$ qui est bien bornée mais ne converge pas (voir ci-après). □

1.2 Suites divergentes

Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**. Il faut cependant faire attention à ce que veux dire la négation de la convergence; une suite divergente ne le fait pas nécessairement vers l'infini. Il n'y a juste pas de valeur limite dont on se rapproche.

En effet, la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ alterne indéfiniment entre 1 et -1. Elle ne converge pas mais ne tend pas non plus vers l'infini. On dira dans ce cas que la suite est **divergente sans limite**. La définition suivante permet de préciser un autre cas.

Définition

On dit qu'une suite (u_n) **diverge vers** $+\infty$ lorsqu'elle prend des valeurs arbitrairement grandes. C'est à dire si

$$\forall A \geq 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n \geq A.$$

Cela veut dire qu'on peut toujours trouver un rang N à partir duquel tous les termes seront plus grands qu'une valeur arbitraire A ou encore que, pour chaque valeur $A \geq 0$, l'intervalle $[A; +\infty[$ contient tous les termes à partir d'un certain rang.

Exercice 3. Montrer à partir de la définition que la suite (u_n), définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \sqrt{n-1}$, diverge vers $+\infty$.

Exercice 4. Adapter la définition précédente à la divergence vers $-\infty$ pour une suite (u_n).

2 Limites des suites de référence

On dispose de tout un panel de suites dont on connait la nature (et la valeur de la limite). Naturellement la preuve des résultats suivants se fait *via* la définition précédente mais, fort heureusement, on peut les utiliser tels quels sans avoir à tout re-démontrer à chaque fois.

Propriété

Limites de référence.

- **Suites géométriques:** $u_n = q^n$. Alors,

  (i) Si $|q| < 1$, la suite converge vers 0;
  (ii) Si $q = 1$, la suite est constante et converge donc vers 1;
  (iii) Si $q > 1$, la suite diverge vers $+\infty$;
  (iv) Si $q \leq -1$, la suite n'a pas de limite.

- **Puissances:**

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty, & \text{si} \quad \alpha > 0 \\ 0, & \text{si} \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

- **Logarithme:**

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$$

Exercice 5. À partir des limites de référence, déterminer les limites éventuelles des suites suivantes:

$$(i)\ n^3 \quad (ii)\ n\sqrt{n} \quad (iii)\ \frac{n^2}{\sqrt{n}} \quad (iv)\ \frac{1}{n^{-0.001}} \quad (v) - 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \quad (vi)\ \frac{1}{10}\left(\frac{\ln(3)}{\ln(2)}\right)^n \quad (vii)\ \frac{1}{n}.$$

3 Opérations sur les limites

Connaissant la limite de deux suites, on peut parfois en déduire la limite de la suite obtenue par opérations sur les deux suites.
Voici donc une série de tableaux qui donnent les résultats de ces opérations. Dans le cas où il n'est pas possible de conclure en toute généralité, c'est à dire dans le cas d'une **forme indéterminée**, on notera "?" (et il faudra travailler un peu plus...)

Règle(s) de calcul

Multiplication par un réel. Soit (u_n) une suite ayant une limite et λ un réel non nul.

Le tableau suivant donne la limite éventuelle de (λu_n) selon la limites de (u_n).

Exemple. $\lim_{n\to+\infty} \frac{-3}{n^2} = 0.$

$\lim u_n$ \ λ	$\lambda > 0$	$\lambda < 0$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\lambda\ell$	$\lambda\ell$
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Somme. Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant des limites (finies ou infinies).

Le tableau suivant donne la limite éventuelle de $(u_n + v_n)$ selon les limites de (u_n) et (v_n).

Exemple. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + n^2 = +\infty.$

$\lim u_n$ \ $\lim v_n$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$		$+\infty$	?
$-\infty$			$-\infty$

☞ *En combinant la multiplication par -1 et la somme on peut aisément déduire les limites obtenues par* ***soustraction****.*

Règle(s) de calcul

Produit. Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant des limites (finies ou infinies).

$\lim u_n$ \ $\lim v_n$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell > 0$				$+\infty$	$-\infty$
$\ell < 0$		$\ell \cdot \ell'$		$-\infty$	$+\infty$
$\ell = 0$				?	
$+\infty$				$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$					$+\infty$

Le tableau ci-dessus donne la limite éventuelle de $(u_n v_n)$ selon les limites de (u_n) et (v_n).

$$\textit{Exemple.}\quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right)\left(\left(\frac{-1}{3}\right)^n + 2\right) = -2.$$

Inverse. Soit (u_n) une suite ayant une limite.

$\lim u_n$	$\ell \in \mathbb{R}^*$	$\pm\infty$
$\lim \frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{\ell}$	0

$$\textit{Exemple.}\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = -\infty.$$

Attention!

Lorsque $\lim u_n = 0$, il y a trois cas:

(i) Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, alors $\lim \frac{1}{u_n} = +\infty$

(ii) Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 0$, alors $\lim \frac{1}{u_n} = -\infty$

(iii) Sinon : $\frac{1}{u_n}$ n'a pas de limite !

☞ *En combinant la multiplication et le passage à l'inverse, on peut également déduire les limites obtenues par passage au* ***quotient****.*

$$\textit{Exemple.}\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} = -\infty.$$

Composition avec une fonction continue.. Soient (u_n) une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et f une fonction **continue** dont la limite en ℓ vaut a (avec également $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$). Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = a.$$

$$\textit{Exemple.}\quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{n^3} + 4} = 2.$$

4 Formes indéterminées. Croissances comparées

On peut, dans certains cas, lever l'indétermination d'une limite par des méthodes que l'on présente dans cette section.

Propriété

Croissances comparées.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $q > 0$.

(i) La suite $(n!)$ l'emporte sur les suites (q^n), (n^α) et $\left(\ln(n)^\beta\right)$.
(ii) La suite (q^n) l'emporte sur les suites (n^α) et $\left(\ln(n)^\beta\right)$.
(iii) La suite (n^α) l'emporte sur les suites $\left(\ln(n)^\beta\right)$.

☞ Cela signifie que si l'on effectue un **produit** ou un **quotient** de ces familles de suites, la limite est celle de la suite qui l'emporte, en tenant compte des opérations sur les limites.

Exemple

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n!} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n(-1)^n}{2^n} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{0.001}}{\ln(n)^{1000}} = +\infty$$

Exemple

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)} = 2.$$

En effet,

$$\frac{1}{n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)} = \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n\left(n^2+1-n^2\right)} = \frac{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2$$

5 Théorèmes de convergence

Les méthodes de calcul des parties précédentes permettent, parfois, de déterminer la nature de suites explicites dont l'expression du terme général permet leur application.

Cela ne représente pas tous les cas de figure que l'on rencontrera. Parfois, une étude plus théorique est qualitative sur le comportement de la suite sera nécessaire. Nous en présentons des méthodes ici.

5.1 Limites & Inégalités

Propriété

Passage à la limite dans une inégalité.

Soient (u_n) et (v_n) deux suite **qui convergent** et telles que $u_n \leq v_n$ (ou $u_n < v_n$) à partir d'un certain rang. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Attention!

Le passage à la limite transforme **toutes les inégalités** (y compris les strictes) en **inégalités larges**.

Remarque

On constate que la condition de majoration doit être vérifiée *à partir d'un certain rang*. En effet, comme on s'intéresse à ce qui se passe *à l'infini*, on ne fait que peu de cas de ce qui se passe au niveau des premiers termes de la suite.

Propriété

Passage à la limite dans une égalité.

Si une suite (u_n) a une limite (finie ou infinie) alors toutes les *sous-suites* (u_{n+1}), (u_{n+2}), (u_{2n}), (u_{2n+1}), ... ont la même limite que la suite (u_n) dont elles sont extraites.

Exemple

On sait (justifier) que $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^n = 0$. Il suit, par exemple, que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2n}\right)^{2n} = 0.$$

Exemple

Candidat possible pour une valeur limite.

Considérons la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}.$$

On pourrait justifier, avec des arguments qui seront présentés un peu après, et les inégalités montrées, que la suite (u_n) est convergente, vers une *certaine* limite ℓ.
Mais on peut d'ores et déjà (sans encore justifier la convergence) déterminer les valeurs ℓ possibles pour la suite. Si (u_n) converge vers ℓ, alors (u_{n+1}) aussi. On a donc, par composition des limites (la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ étant continue,

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & \sqrt{u_n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & \sqrt{\ell+1} \end{array}$$

et ℓ vérifie l'équation $\ell = \sqrt{\ell+1}$ dont la seule solution est $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ce qui nous donne, **si jamais la suite est bien convergente**, la seule valeur possible pour sa limite.

Exercice 6. La suite (v_n), définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = -\frac{1}{v_n}$ peut-elle être convergente? Divergente vers l'infini?

À retenir!

Méthode du point fixe pour les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Soit (u_n) une suite vérifiant, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction **continue** sur un intervalle I - fermé ou semi-fermé - contenant tous les termes de la suite. Alors, **si** (u_n) converge vers une limite ℓ, cette limite est solution de l'équation $f(\ell) = \ell$ (on dit que c'est un *point fixe* de f).

Attention!

Cette méthode permet de trouver des limites **potentielles** mais ne prouve **en aucun cas** la convergence de la suite.

Par exemple, si la suite définie par $u_{n+1} = -u_n$ et $u_0 = 1$ avait une limite ℓ, cette limite vaudrait 0 (c'est le seul point fixe de $f : x \to -x$), mais on voit tout de suite que $u_n = (-1)^n$ ne converge pas.

Propriété

Comparaison à une suite divergente vers l'infini.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Alors,

(i) Si (u_n) diverge vers $+\infty$, il en est de même pour (v_n);
(ii) Si (v_n) diverge vers $-\infty$, il en est de même pour (u_n).

Exercice 7.

(1) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

(2) En déduire le comportement asymptotique de la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Propriété

Théorème d'encadrement dit *des gendarmes*.

Soient $(u_n), (v_n)$ et (w_n) trois suites telles que les deux conditions suivantes sont vérifiées:

- $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang;
- (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ.

Alors, (v_n) converge également vers ℓ.

Exemple

On peut voir que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n + 5(-1)^n}{2n} = \frac{3}{2}.$$
En effet,
$$\frac{3n-5}{2n} \leq \frac{3n + 5(-1)^n}{2n} \leq \frac{3n+5}{2n},$$
et il est facile d'obtenir, par factorisation au numérateur et dénominateur par n, que les deux suites qui encadrent le terme qui nous intéresse tendent toutes les deux vers $\frac{3}{2}$. Il suffit alors d'appliquer le résultat précédent.

Exercice 8. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.
Déterminer la limite, lorsque $n \to +\infty$, de la suite (u_n) où, pour tout $n \geq 1$, $u_n = \left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$.

5.2 Critère de convergence monotone

Comme on l'a vu dans le section précédente, on peut souvent avoir des informations sur une limite si on sait **déjà** que la suite converge. Le théorème suivant donne un critère d'**existence**. Il ne donne en aucun cas la valeur de la limite. Il est constamment utilisé.

Théorème

Théorème de convergence monotone.

Toute suite croissance **et** majorée est convergente.
Toute suite décroissante **et** minorée est convergente.
Toute suite croissante **et** non majorée diverge vers $+\infty$.
Toute suite décroissante **et** non minorée diverge vers $-\infty$.

Remarque

Il est difficile de montrer directement qu'une suite n'est pas majorée (ou minorée). On fait alors souvent l'hypothèse qu'elle l'est, puis on utilise le théorème de convergence monotone pour obtenir une *contradiction* permettant ainsi de conclure (par l'absurde donc) que ce n'est pas le cas.

Exemple

On veut étudier la nature (et déterminer la limite éventuelle) de la suite (u_n) définie pars

$$\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \frac{u_n^2+1}{2} \end{cases}$$

La fonction $f : x \mapsto \frac{x^2+1}{2}$ étant définie sur $\mathbb{R}$, la suite est bien définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Il est facile de voir que la suite est croissante: en effet

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2+1}{2} - u_n = \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2} = \frac{(u_n-1)^2}{2} \geq 0.$$

De plus, une récurrence immédiate permet de voir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n < 1$: c'est en effet vrai pour u_0, et si c'est vrai pour un certain $n \geq 0$, alors

$$0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{u_n^2+1}{2} < \frac{1^2+1}{2} \leq 1.$$

La suite étant croissante et majorée (par 1), elle est donc convergente. Notons alors ℓ sa limite. Par passage à la limite dans les égalités, cette limite est un *point fixe* de f (qui est continue partout), *i.e.* ℓ est solution de l'équation

$$\frac{\ell^2+1}{2} = \ell$$

dont la seule solution est 1. Ainsi, on peut conclure que (u_n) converge vers 1.

Parfois, connaître explicitement la limite est difficile et doit se contenter de son existence voire éventuellement d'un encadrement de celle-ci. C'est le cas dans l'exercice suivant.

Exercice 9. Soit (u_n), la suite définie pour $n \geq 1$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

(1) Montrer que (u_n) est croissante.
(2) (a) Montrer que,

$$\forall k \geq 2, \qquad \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

(b) En déduire que,

$$\forall n \geq 1, \qquad 1 \leq u_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2.$$

(3) Conclure quant à la convergence de (u_n) et donner un encadrement de sa limite éventuelle.

Remarque

Ce type de suite, dont le terme général est défini par une somme, s'appelle une *série*. On développe un petit peu cette notion plus bas.

5.3 Suites adjacentes

Propriété

Suites adjacentes.

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** si les quatre conditions suivantes sont **toutes** vérifiées:

- La suite (u_n) est croissante;
- La suite (v_n) est décroissante;
- Pour tout n, $u_n \leq v_n$;
- La différence $v_n - u_n$ tend vers 0, lorsque $n \to +\infty$.

Deux suites adjacentes convergent vers une même limite.

Attention!

Comme dans d'autres résultats, le théorème précédent garantie l'existence de la limite ℓ mais ne donne pas sa valeur. Cependant, on peut déduire des propriétés de monotonie des deux suites adjacentes que

$$\forall n, m, \qquad u_0 \leq u_n \leq \ell \leq v_m \leq v_0.$$

Exercice 10.

(1) Montrer que les suites

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}\right)_{n\geq 1} \qquad \text{et} \qquad \left(\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}\right)_{n\geq 1}$$

sont adjacentes. En déduire qu'elles convergent vers une même limite ℓ.

(2) Montrer que, pour tout $x \in [0;1[$,

$$\ln(1+x) \leq x \leq -\ln(1-x).$$

(3) En déduire que, pour tout $n \geq 1$,

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n} \leq -\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{n+k}\right)\right)$$

(4) En conclure que $\ell = \ln(2)$.

6 Notion de série

6.1 Généralités

Définition

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite. La **série** de terme général u_n est la suite (S_n) définie par

$$\forall n \geq n_0, \quad S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

Le terme S_n est appelé la **somme partielle d'indice** n de la série. La série est notée $\sum_{n\geq n_0} u_n$.

☞ Les outils d'études des suites peuvent alors s'appliquer aux séries dès lors qu'on considère la suite des sommes partielles.

Définition

La série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est dite

- **convergente** si et seulement si la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ des sommes partielles converge. Dans ce cas, sa limite est appelée la **somme** de la série et on note
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k.$$
- **divergente** si et seulement si $(S_n)_{n\geq n_0}$ a une limite infinie ou pas de limite.

☞ Étudier la **nature d'une série**, c'est déterminer si elle converge ou pas. Dans le premier cas, on cherche alors à expliciter sa somme si c'est possible, mais ce n'est souvent pas le cas.

À retenir!

☠ La quantité $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ est une **limite** (qui pourrait donc ne pas exister).

☞ On n'écrira donc **jamais** $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ **avant** d'avoir au préalable justifié la convergence de la série!

☞ Soit n_0 un entier **fixé**. Remarquant qu'on peut décomposer (par la relation de Chasles) une somme partielle

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k,$$

il est clair que la nature de la série ne dépend par de la somme des n_0 premiers termes, celle-ci étant constante. La valeur du premier terme de la série ne modifie donc pas le caractère convergent ou divergent mais en revanche, cela modifie, en cas de convergence, la valeur de la somme.

Définition

Soit $\sum_{k\geq n_0} u_k$ une série convergente. On appelle **reste** de la série, et on note (R_n) la suite définie, pour $n \geq n_0$, par

$$R_n = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

À retenir!

☞ Il découle immédiatement de la définition que le reste d'une série convergente tend vers 0:

$$\left(\sum_{k\geq n_0} u_k \text{ converge}\right) \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} R_n = 0.$$

Exercice 11. On considère la série $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$, dont on note S_n la somme partielle d'indice n.

(1) Montrer que la suite (S_n) est croissante.
(2) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.
(3) En déduire que la série est convergente. On note S sa somme.
(4) Déduire également de la Question (2), que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \geq n$, on a

$$\sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{p}.$$

En déduire une majoration du reste.

☞ On a un lien très utile entre somme(s) partielle(s) et terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n-1} u_k + u_{n+1} = S_{n-1} + u_n \Longleftrightarrow u_n = S_n - S_{n-1}.$$

En particulier, il en découle immédiatement le résultat suivant.

À connaître sur le bout des doigts

Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors la suite (u_n) converge vers 0.

☠ La convergence vers 0 du terme général est une condition **nécessaire** mais absolument pas suffisante. L'exemple classique est celui de la série harmonique, proposé ci-dessous.

Exercice 12. Soit H_n la somme partielle d'indice n de la *série harmonique* $\sum \dfrac{1}{k}$.

(1) Que vérifie le terme général de cette série?
(2) Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$

(3) En déduire la divergence de la série harmonique.

À retenir!

☞ En revanche, la non convergence vers 0 du terme général permet immédiatement de conclure à la divergence de la série. On dit d'ailleurs dans ce cas que la série **diverge grossièrement**.

Propriété

Soient $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ deux séries convergentes, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors la série $\lambda \sum u_n + \mu \sum v_n$, de terme général $(\lambda u_n + \mu v_n)$, est encore convergente. Sa somme est égale à la combinaison linéaire correspondante des sommes des deux séries.

☠ La réciproque de la proposition précédente est fausse. Il est tout à fait possible que $\sum(u_n + v_n)$ converge sans qu'aucune des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne converge. Par exemple,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}.$$

La série $\sum 1/k(k+1)$ est convergente, mais les deux séries $\sum 1/k$ et $\sum 1/(k+1)$ divergent.

Propriété

Séries télescopiques.

Une suite (u_n) est convergente si et seulement si la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est convergente. Auquel cas, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(u_{k+1} - u_k) = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_0.$$

Exercice 13. Soient f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f : x \mapsto x - x^2$ et (u_n), de premier terme $u_0 \in]0;1[$, vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n) = u_n - u_n^2.$$

(1) Dresser le tableau de variations de f.
(2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0;1[$.
(3) Étudier la monotonie puis la convergence de (u_n). Déterminer sa limite.
(4) Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge et préciser sa somme.

6.2 Séries usuelles : géométriques (dérivées) et série exponentielle

À retenir!

☞ Lorsque le terme général d'une série s'écrit comme combinaison linéaire de termes généraux de séries (usuelles) qu'on sait être convergentes, on peut conclure à la convergence de la série.

À connaître sur le bout des doigts

Séries géométriques et dérivées.

Les séries

$$\sum_{n\geq 0} q^n, \qquad \sum_{n\geq 1} nq^{n-1}, \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geq 2} n(n-1)q^{n-2}$$

sont convergentes si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}, \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

La **série exponentielle** $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge pour tout réel x. De plus, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

☞ On utilise énormément ces résultats en probabilités; les séries géométriques apparaissent dès qu'intervient la *loi géométrique*, la série exponentielle dès qu'intervient la *loi de Poisson*.

Exercice 14. Soit $p \in]0,1[$. Montrer que la série $\sum k^2(p^k(1-p)+(1-p)^k p)$ converge et calculer sa somme.

7 Autres exercices - Travaux dirigés

Exercice 15. (Vrai ou Faux?)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses?

(1) Si (u_n) et (v_n) divergent, alors (u_n+v_n) diverge.
(2) Si (u_n) et (v_n) divergent, alors (u_nv_n) diverge.
(3) Si (u_n) converge et que (v_n) diverge, alors (u_n+v_n) diverge.
(4) Si (u_n) converge et que (v_n) diverge, alors (u_nv_n) diverge.

Exercice 16. Donner la limite éventuelle des suites de terme général:

1) $-3n^2$	2) e^{-n}	3) $-3n^2+e^{-n}$	4) $n^{0.0001}-1000000000$
5) $\left(n^2+\dfrac{1}{n}\right)(e^{-n}+2)$	6) $\dfrac{e^{-n}}{-3n^2}$	7) $\dfrac{-3n^2}{e^{-n}}$	8) $\left(\dfrac{1}{n^3}+0.5\right)^n$
9) $\ln((\frac{1}{2})^n)$	10) $\ln(1+\frac{1}{n})$	11) $e^{(2-(\frac{1}{3})^n)\cdot\frac{1}{2n-1}}$	12) $\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})}$
13) $\frac{1}{\ln(1-\frac{1}{n})}$	14) $\frac{1}{\ln(1+(-\frac{1}{4})^n)}$	15) $n^{\frac{1}{\ln(n)}}$	16) $\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\ln(n)^2}}$

Exercice 17. Dans chacun des cas suivants, donner l'éventuelle limite, après avoir levé l'indétermination:

1) n^5-n^2+3	2) $e^n-n^{100}-\ln(n)^{10000}$	3) $\dfrac{-2n^3+2n}{n^2}$	4) $\dfrac{-2n^3+2n}{n^3}$
5) $\dfrac{-2n^3+2n}{n^4}$	6) $\sqrt{4n^2+n}-n$	7) $\sqrt{4n^2+n}-2n$	8) $\left(\dfrac{1}{n}\right)^n$
9) $n^{\frac{1}{n}}$			

Exercice 18. Soient (v_n) une suite qui converge vers 0 et (u_n) une suite telle que $|u_n| \leq v_n$, à partir d'un certain rang.

(1) Montrer que (u_n) converge vers 0.
(2) *Application.* Soit $\alpha > 0$. Montrer que $\left(\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ converge vers 0.

Exercice 19. Quelles sont les limites (finies ou infinies) possibles des suites vérifiant les relations de récurrence suivantes ?

(1) $u_{n+1} = 2u_n - \frac{1}{n}$
(2) $v_{n+1} = -2v_n - \frac{1}{n} + 1$
(3) $2(w_{n+2})^2 = w_{n+1} + w_n$
(4) $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$

Exercice 20. Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq a$, $v_n \leq b$ et $u_n + v_n \to a+b$, où $a, b \in \mathbb{R}$.
Montrer que $u_n \to a$ et $v_n \to b$.

Exercice 21. Soit (u_n) la suite réelle définie, pour tout $n \geq 1$, par

$$u_n = \sqrt{n + \sqrt{n - 1 + \sqrt{\cdots + \sqrt{1}}}}$$

(1) Quel est le lien entre u_{n+1} et u_n?
(2) Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\sqrt{n} \leq u_n \leq \sqrt{2n}.$$

(3) Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 22. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$ et (u_n), (v_n) deux suites définies par

$$u_0 = a, \qquad v_0 = b, \qquad u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

(1) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $0 < u_n < v_n$.
(2) Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.
(3) Montrer que, pour tout $n \geq 0$,

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n).$$

(4) Déduire des questions précédentes que les deux suites convergent vers une même limite ℓ.
(5) En considérant la suite $(u_n v_n)$, déterminer ℓ.

Exercice 23. Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$ et $u_0 \geq 0$.

(1) Étudier le signe de $f(x) - x$. Quelles sont les limites possibles pour (u_n) ?
(2) On suppose que $u_0 \in [0; \frac{1}{4}]$.
  (a) Montrer que (u_n) est croissante.
  (b) La suite est-elle convergente? Divergente? Préciser sa limite éventuelle.
(3) On suppose que $u_0 \in [\frac{1}{4}; \frac{3}{4}]$.
  (a) Montrer que (u_n) est décroissante et minorée.
  (b) La suite est-elle convergente? Divergente? Préciser sa limite éventuelle.
(4) On suppose que $u_0 > \frac{3}{4}$.
  (a) Montrer que (u_n) est croissante.
  (b) La suite est-elle convergente? Divergente? Préciser sa limite éventuelle.

Exercice 24. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x\ln(1 + x)$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0; +\infty[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(1) (a) Montrer que f est C^2 sur $[0; +\infty[$ et calculer, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
  (b) En déduire les variations de f.

(2) (a) Étudier le signe de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$.
  (b) Quelles sont les limites possibles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

(3) On suppose dans cette question : $u_0 \in]e - 1; +\infty[$.
  (a) Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e - 1 < u_n \leq u_{n+1}$.
  (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

(4) On suppose, dans cette question : $u_0 \in]0; e - 1[$.
Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 25. On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur R_+ par

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}.$$

(1) Étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}_+$. Donner un équivalent de $f_n(x)$ en $+\infty$ et y préciser la limite de $f_n(x)$.

(2) On introduit la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = 1/3$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par la relation de récurrence
$$u_{n+1} = f_n(u_n).$$
(3) S'agit-il d'une suite récurrente comme celles étudiées dans ce chapitre?
(4) Calculer u_2 et u_3.
(5) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. En déduire la monotonie de (u_n).
(6) Montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ que l'on déterminera à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.
(7) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n \leq \frac{1}{n}.$$
(8) En déduite que la suite (nu_n) est croissante, puis qu'elle converge vers un réell $\ell' \in]0;1]$.
(9) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \leq 1.$$
(10) Conclure quant à la valeur de ℓ'.

Exercice 26. Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leurs sommes :

1) $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)}$ 2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$ 3) $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{3^n + n2^n}{n!}$ 4) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n(n-1)}{5^n}$

5) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{5^n}$, 6) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{4n^2+5n}{5^n}$, 7) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n n}{3^n}$, 8) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n n^2}{3^n}$,

9) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n n(n-1)}{3^n}$ 10) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ 11) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{4(-1)^{n+1}}{n!}$ 12) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{3^n}{(n+1)!}$

13) $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{3n+2^n}{4^n}$ 14) $\displaystyle\sum_{k\geq 0} (-1)^n \frac{n^2+1}{3^n}$.

Exercice 27. On considère la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ dont on note (T_n) la suite des sommes partielles.
(1) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$
$$2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right).$$
(2) En déduire que, pour tout $n \geq 1$,
$$2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) \leq T_n \leq 2\sqrt{n}.$$
(3) La série initiale est-elle convergente ?

Exercice 28. On veut établir la convergence et la somme de la série de terme général
$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \qquad (n \geq 2).$$
Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k$.
(1) Vérifier que $S_{2n+1} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (u_{2j} + u_{2j+1})$.
(2) En déduire une expression simple de S_{2n+1}.
(3) En déduire l'étude de la suite (S_{2n}).
(4) Conclure sur la série de terme général u_n.