Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Chapitre 5. Ensembles. Applications. Dénombrement.

1 Ensembles

1.1 Généralités: ensembles et sous-ensembles

Définition

Si $u_1, u_2, \ldots, u_p$ (p étant un entier ≥ 1) sont des objets mathématiques quelconques (par exemple des nombres réels mais éventuellements des fonctions ou des vecteurs...), alors on peut former l'**ensemble** :

$$E = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}.$$

On dit alors que chaque u_i (pour $1 \leq i \leq p$) est un **élément** de E, ou que u_i appartient à E, et on écrit :

$$u_i \in E.$$

Si un objet x n'est pas un élément de l'ensemble E, on note $x \notin E$.

Exemple

Certains ensembles sont importants car on les utilise très souvent. On en a déjà introduits certains. Par exemple:

- l'ensemble vide, noté $\emptyset$. Il ne contient aucun élément;
- l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ des entiers naturels;
- l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels, dont $0, -1, \sqrt{2}, e$ sont des éléments.

Mais on verra également dans les prochains chapitres que d'autres ensembles seront utilisés (et importants) comme

- l'ensemble $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et m colonnes;
- l'ensemble $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ des fonctions infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$...

Dans les deux chapitres précédents, nous avons étudié les *suites réelles*, on peut alors introduire une notation pour l'ensemble de tels objets. Ainsi, il est courant de noter $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ l'ensemble des suites réelles.

Il est tout à fait possible de considérer un ensemble d'ensembles, comme

$$E = \{\{1; 2\}; \{1\}; \mathbb{N}\}.$$

Ici, les éléments de E sont eux-mêmes des ensembles. On fera donc attention à bien identifier le contexte dans lequel on se trouve.

☞ *Deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments.*

Remarque

L'ordre des éléments dans un ensemble, et leurs éventuelles répétitions n'importent pas. Par exemple:

$$\{1;2\} = \{2;1\} = \{1;1;2\}.$$

Définition

Le **cardinal** d'un ensemble E est le nombre d'éléments qui le composent. On le note $\mathrm{Card}(E)$ ou $\#E$. Il peut être fini ou infini.

Un ensemble de cardinal 1 s'appelle un **singleton** et un ensemble de cardinal 2 une **paire**.

Définition

Soient E et F deux ensembles. On dit que F est **inclus** dans E, ce qui s'écrit $F \subset E$, lorsque tout élément de F est aussi un élément de E:

$$(F \subset E) \iff (\forall x \in F,\ x \in E).$$

Lorsque F est inclus dans E, on dit que F est un **sous-ensemble** (ou une **partie**) de E.

Exercice 1. Écrire, à l'aide de quantificateurs, le fait qu'un ensemble F **ne soit pas inclus** dans un ensemble E.

À retenir!

L'ensemble vide est un sous-ensemble de tout ensemble.

Exercice 2. Vrai ou Faux?

(i) $\{1,1\} = \{1\}$
(ii) $2 \in \{\{2\}, 3, \{\{4\}\}, \emptyset\}$
(iii) $\{1\} = \{\{1\}\}$
(iv) $3 \in \emptyset$
(v) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
(vi) $\{1\} \subset \{\{1\}\}$
(vii) $\emptyset \subset \{1\}$
(viii) $\{\{\{3\}\}\}$ a un élément
(ix) $\{n \in \mathbb{N},\ 82 \leq n \leq 99 \text{ et } \exists k \in \mathbb{N},\ n = k^2\} = \emptyset$

À retenir!

Méthode : Inclusion de deux ensembles.

Pour montrer qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B, on fixe un élément quelconque x de A et on montre qu'il appartient aussi à B.

Exercice 3. Montrer que $A \subset B$, où

$$A = \{x \in \mathbb{R} :\ 3 \leq x \leq 4\} \qquad \text{et} \qquad B = \{x \in \mathbb{R} :\ x^3 - x^2 - x - 5 \geq 0\}.$$

Propriété

Soient A, B et C trois ensembles. Alors

(i) $$(A \subset B \text{ et } B \subset C) \Longrightarrow (A \subset C).$$

(ii) $$(A \subset B \text{ et } B \subset A) \Longleftrightarrow (A = B).$$

La proposition précédente permet en particulier d'établir la méthode suivante, pour montrer que deux ensembles sont égaux.

À retenir!

Méthode : Égalité de deux ensembles.

Pour montrer que deux ensembles A et B sont égaux, on peut procéder comme suit:

- Ou bien on peut écrire **en extension** (c'est à dire en donnant tous leurs éléments) les deux ensembles et on vérifie que ce sont les mêmes;
- Ou bien on procède par **double inclusion**:
  $$(A = B) \Longleftrightarrow (A \subset B \text{ \textbf{et} } B \subset A).$$
  C'est à dire qu'on commence par montrer que $A \subset B$ et ensuite, on montre que $B \subset A$.

Propriété

Cardinal et Inclusion.

Il est clair que si $F \subset E$, alors $\text{Card}(F) \leq \text{Card}(E)$. On peut en déduire alors le résultat suivant, dont la démonstration est un petit exercice facile (mais instructif): si E et F sont deux ensembles avec un nombre fini d'éléments avec $F \subset E$ et si $\text{Card}(F) = \text{Card}(E)$, alors $E = F$.

Définition

Si E est un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ **l'ensemble des parties** de E. Les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont donc les parties de E.

Exemple

Prenons $E = \{1; 2\}$. Cet ensemble, qui a deux éléments, admet quatre sous-ensembles qui sont: $\emptyset$ (qui ne contient pas d'élément), $\{1\}$ et $\{2\}$ (qui contiennent tous deux un élément) et E lui-même. Ainsi, on écrira
$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset;\ \{1\};\ \{2\};\ \{1; 2\}\}.$$

☞ Dans le cadre des probabilités (discrètes), c'est sur l'ensemble des parties de l'univers que l'on définit l'application $\mathbb{P}$ de probabilité.

Exercice 4. Expliciter les ensembles suivants :

(i) $\mathcal{P}(\emptyset)$
(ii) $\mathcal{P}(\{5\})$
(iii) $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$
(iv) $\mathcal{P}(\{\{1\}\})$
(v) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$

1.2 Opérations sur les ensembles

Définition

Soient E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Alors, on peut considérer les éléments de A qui ne sont pas dans B, cet ensemble se note $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$ et se lit "A *privé de* B".

Définition

Soient E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

- On appelle **intersection** de A et B, et on note $A \cap B$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **et** à B.
- On appelle **union** de A et B, et on note $A \cup B$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ou** à B.

Deux ensembles A et B tels que $A \cap B = \emptyset$ sont dits **disjoints**.

Attention!

Le "*ou*" de la définition de l'union est un "*ou*" **inclusif**. C'est à dire que pour construire $A \cup B$, on prend les éléments qui sont dans A, dans B et aussi ceux qui sont dans les deux! En particulier $A \cap B \subset A \cup B$.

Propriété

Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Les propriétés suivantes sont toujours vraies:

(1) ... relatives à l'intersection
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap A = A$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(2) ... relatives à l'union
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup A = A$ et $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

(3) ... relatives à intersection et l'union
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Exercice 5. Pour $A, B, C, D \in \mathcal{P}(E)$, simplifier l'expression

$$(A \cap B) \cup (C \cap D).$$

Propriété

Formule du crible.

Soient E un ensemble fini et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Alors,

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}(A \cup B \cup C) &= \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(C) \\ &\quad - \mathrm{Card}(A \cap B) - \mathrm{Card}(B \cap C) - \mathrm{Card}(C \cap A) + \mathrm{Card}(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Exercice 6. On interroge un groupe de gens sur leurs goûts musicaux: 71 d'entre eux apprécient David Bowie, 56 d'entre eux aiment Leonard Cohen, 6 d'entre eux admettent timidement (sous garantie d'anonymat) adorer Justin Bieber. Parmi ces gens, 83 aiment au moins un des trois chanteurs, 45 aiment Cohen et Bowie, 2 aiment Bieber et Cohen et 4 aiment Bieber et Bowie.

(1) Combien de personnes aiment les trois chanteurs?
(2) Combien de personnes aiment Bowie et Cohen mais n'aiment pas Bieber?

Définition

Soient E et I deux ensembles, et $(A_i)_{i\in I}$ une **famille** de sous-ensembles de E indexée par I (c'est à dire que, pour tout $i \in I$, $A_i \in \mathcal{P}(E)$). On peut alors construire la réunion et l'intersection de tous les A_i:

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \iff \exists i \in I,\ x \in A_i$$

et

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \iff \forall i \in I,\ x \in A_i.$$

Exercice 7. Montrer, par récurrence, que si (A_n) est une suite de sous-ensembles d'un ensemble fini E, alors

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Card}(A_k).$$

Exemple

Considérons la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de $\mathbb{R}$, définie par $A_n = [-n; n]$ (la famille étant indexée par $\mathbb{N}$, on parlera plutôt de suite d'ensembles). On a par exemple $A_0 = \{0\}$, $A_1 = [-1; 1]$, etc... Il est alors facile de voir que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}.$$

Pour montrer chacune de ces égalités d'ensembles, on procède par double inclusion. Il est clair que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \mathbb{R}$. Prenons maintenant $x \in \mathbb{R}$ et montrons que $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Il suffit de trouver un entier naturel qui soit plus grand que x. Prenons alors $N_x = \lfloor x \rfloor + 1$. On a bien $x \in A_{N_x}$ et donc x est bien dans $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Pour l'autre égalité, il est également clair que $\{0\} = A_0 \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Soit alors $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Cela signifie que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in A_n$ ou encore $-n \leq x \leq n$. La seule possibilité est donc que x soit égal à 0 et donc $x \in \{0\}$.

Exercice 8. Déterminer les intersections et réunions d'ensembles suivants:

$$(i)\ A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^\star} \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right]; \quad (ii)\ B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^\star} \left]-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right[; \quad (iii)\ C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star} \left[\frac{1}{n}; +\infty\right[; \quad (iv)\ \bigcup_{a\in\mathbb{R}^\star} \left]\frac{1}{a}; +\infty\right[.$$

Définition

Soient E un ensemble et $A \in \mathcal{P}(E)$. On appelle **complémentaire de** A **dans** E l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A:

$$\complement_E(A) = \{x \in E :\ x \notin A\} = E \setminus A.$$

Attention!

La notion de complémentaire d'un ensemble A dépend totalement de l'ensemble E. Lorsque le contexte est clair (**et uniquement dans ce cas**), on peut alléger la notation et la terminologie en parlant simplement de complémentaire de A et en le notant $\overline{A}$.

Propriété

Formules de Morgan.

Soient E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Alors

- $\overline{E} = \emptyset$; $\overline{\emptyset} = E$; $\overline{\overline{A}} = A$.
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$; $A \cup \overline{A} = E$.
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Définition

Soient E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une familles de parties non vides de E. On dit que $(A_i)_{i \in I}$ forme une **partition** de E si:

$$(i)\ \forall (i,j) \in I^2 :\ i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset, \qquad (ii)\ \bigcup_{i \in I} A_i = E.$$

Exercice 9. Montrer que la famille (A_n) définie, pour $n \in \mathbb{Z}$ par $A_n = [n; n+1[$ forme une partition de $\mathbb{R}$.

Définition

On appelle **produit cartésien** de n ensembles $E_1, E_2, \cdots E_n$ l'ensemble des $n-$uplets $(x_1, x_2, ..., x_n)$ tels que $x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2, ...,\ x_n \in E_n$.

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in E_i, i = 1, ..., n\}.$$

☞ *Le produit cartésien de n ensembles égaux à E se note simplement E^n.*

Exercice 10. À l'aide d'un dessin, exprimer simplement le produit $[0;2]^2 \cap [1;3]^2$.

2 Applications

2.1 Vocabulaire

Définition

Une **application** f est la donnée d'un ensemble E, appelé **ensemble de départ**, d'un ensemble F, appelé **ensemble d'arrivée**, et pour chaque élément x de E, d'un unique élément noté $f(x)$.

On dit que $f(x)$ est l'**image** de x par f. De plus, si y est un élément de F et que x est un élément de E qui vérifie $f(x) = y$, alors x est appelé **antécédent** de y par f.
Une application f de E dans F se note ainsi:

$$f:\ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Définition

Soit E un ensemble. L'application définie sur E et qui à tout élément $x \in E$ associe le même élément x est appelée **application identité** (ou tout simplement **identité**) de E. On la note

$$\mathrm{Id}_E : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

On introduit également les notations et la terminologie suivante. Il est capital de bien faire la distinction entre élément et ensemble et de manipuler tous les objets avec rigueur (et précaution).

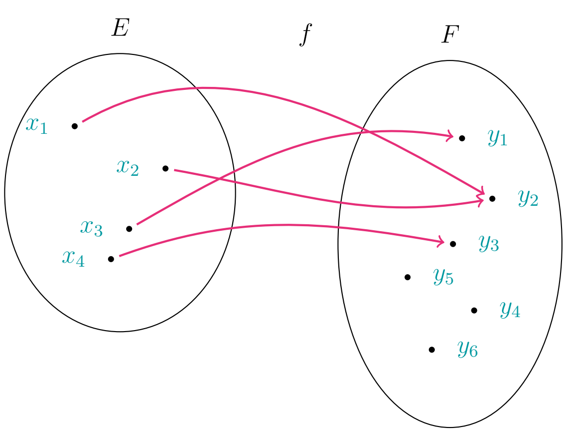
Définition

Soient f une application d'un ensemble E dans un ensemble F et $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$.

- On appelle **image directe** de A par f l'ensemble des images par f des éléments de A. On note
$$f(A) = \{y \in F : \exists x \in A,\ y = f(x)\}.$$
L'image directe de E par f s'appelle tout simplement **image de** f et se note
$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{y \in F : \exists x \in 2,\ y = f(x)\} = \{f(x) : x \in E\},$$
c'est l'ensemble des éléments *atteints* par f.

- On appelle **pré-image** de B par f l'ensemble des éléments de E dont l'image par f est dans B. On note
$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}.$$

Illustration



Sur ce dessin :

- $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$
- $F = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$
- $\mathrm{Im}(f) = \{y_1, y_2, y_3\} \subset F$
- $f(\{x_1, x_2\}) = \{y_2\}$
- $f^{-1}(\{y_5\}) = \emptyset$
- $f^{-1}(\{y_2, y_3\}) = \{x_1, x_2, x_4\}$

Attention!

Il est capital d'avoir à l'esprit que les ensembles définis ci-dessus sont des ensembles. La notation de la pré-image est une notation et **n'a rien à voir** avec la bijection réciproque f^{-1} (qui sera définie ci-après) et qui peut tout à fait ne pas exister. On fera de plus bien la différence entre $f(x)$ et $f(\{x\})$ qui ne sont pas des objets du même type!

Exercice 11.

(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{2x} + e^x$.
  (a) Déterminer $f(\{0\})$.
  (b) Déterminer $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$.
  (c) Montrer que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^\star$. A-t-on égalité? Justifier.

(2) Soit $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ (n, m) \mapsto n(m-1)$.
  (a) Déterminer $g(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ et $g^{-1}(\{0\})$.

Définition

Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux application. La **composée** de f par g est l'application notée $g \circ f$ définie sur E et à valeurs dans G qui à un élément $x \in E$ associe $g(f(x))$.

Attention!

$f \circ g \neq g \circ f$!

Exercice 12. Dans chacun des cas, expliciter $g \circ f$.

(1) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(1+x)$;
(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x+y$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (t, t+1, t^2)$.

2.2 Injections, Surjections, Bijections

Définition

Soit f une application de E dans F. On dit que:

- f est **injective** si tout élément de F possède au plus un antécédent par f:
$$\forall x_1, x_2 \in E,\ f(x_1) = f(x_2) \Longleftrightarrow x_1 = x_2.$$
- f est **surjective** si tout élément de F possède au moins un antécédent par f:
$$\forall y \in F,\ \exists x \in E\ :\ f(x) = y.$$
Ceci se reformule comme le fait que $\mathrm{Im}(f) = E$.

- f est **bijective** si tout élément F possède un unique antécédent par f:
$$\forall y \in F,\ \exists!\, x \in E\ :\ f(x) = y.$$
L'application de F vers E qui à y associe x s'appelle la **bijection réciproque** de f. On la note f^{-1}.

Remarque

On peut, à partir de la définition, remarquer les propriétés suivantes:

(1) L'application identité de tout ensemble E est toujours bijective.
(2) Une application f est bijective si elle est à la fois injective **et** surjective.
(3) Si $f : E \to F$ est bijective alors
$$\forall x \in E,\ \forall y \in F, \qquad (f(x) = y) \Longleftrightarrow (x = f^{-1}(y)).$$
(4) Si f est bijective de E dans F, on dira que f réalise une bijection de E sur F. Il est alors clair que f^{-1} réalise quant à elle une bijection de F sur E. De plus,
$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f.$$
(5) Si $f : E \to F$ est bijective alors
$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E.$$
(6) Si $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$, on peut dire que f réalise une bijection de A sur B si et seulement si
  (i) $f(A) = B$;
  (ii) tout élément de B possède un unique antécédent x **dans** A.

Exemple

L'exponentielle est la bijection réciproque du logarithme néperien:
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ \forall y \in \mathbb{R}, \qquad (\ln(x) = y) \iff (x = e^y).$$

À retenir!

Montrer qu'une application est bijective.

Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est bijective, on peut parfois montrer que tout élément de l'espace d'arrivée possède un unique antécédent par f dans l'ensemble de départ de manière explicite (c'est à dire qu'on choisit $y \in F$ arbitraire et on explicite l'unique x (qui dépendra de y) tel que $f(x) = y$) ou bien (le plus souvent) on montre en deux temps qu'elle est injective et surjective.

- Pour la surjectivité: on prend un élément quelconque y dans l'ensemble d'arrivée et on montre qu'il existe un élément x dans l'ensemble de départ tel que $f(x) = y$.
- Pour l'injectivité: on part de deux éléments quelconques x et y de l'ensemble de départ vérifiant $f(x) = f(y)$ et on montre qu'on a nécessairement $x = y$.
- On peut aussi directement montrer la bijectivé en résolvant l'équation $y = f(x)$ et en montrant qu'il y un unique x solution. L'expression de cette unique solution x en fonction de y donne alors l'expression de $f^{-1}(y)$:
$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Naturellement, pour infirmer l'une des deux propriétés, on peut fournir un contre-exemple.

Exercice 13. Les applications suivantes sont-elles injectives? surjectives? bijectives? Dans le cas d'une bijection, expliciter la bijection réciproque.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 1$.
(2) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2,\ n \mapsto (n,\ (n+1)^2)$.
(3) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par
$$h(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{si } n \text{ est pair} \\[2ex] -\dfrac{n+1}{2}, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$
(4) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

Propriété

Cardinaux et applications.

Soient E et F deux ensembles finis et f une application de E dans F.

(1) Si f est injective, alors $\mathrm{Card}(E) \leq \mathrm{Card}(F)$.
(2) Si f est sujective, alors $\mathrm{Card}(F) \leq \mathrm{Card}(E)$.
(3) Si f est bijective, alors $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.
(4) Si $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$ **et si** f injective, alors f est bijective.
(5) Si $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$ **et si** f surjective, alors f est bijective.

Propriété

Composée de bijections.

Soient $f: E \to F$ et $g: F \to G$ deux bijections. Alors $g \circ f$ est encore une bijection (de E sur G) et on a
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

3 Dénombrement

Dénombrer consiste à déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble donné (ou autrement dit, le nombre de possibilités d'une situation donnée). Pour ce faire, nous allons introduire plusieurs outils qui permettront d'obtenir ce décompte.

Tous les ensembles considérés dans cette section sont des **ensembles finis**. On commence par la proposition suivante.

Propriété

Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et m. Alors, $\mathrm{Card}(E \times F) = n \times m$. En particulier $\mathrm{Card}(E^d) = n^d$.

On en déduit le résultat suivant, extrêmement utile:

Propriété

Il y a n^d façons de choisir, en tenant compte de l'ordre (et en acceptant les répétitions), d fois un élément parmi n.

Exemple

Il y a 9^7 nombres à 7 chiffres qui ne comportent aucun 1. En effet, on doit choisir 7 fois consécutives un chiffre parmi 9 qui sont 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

3.1 Permutations

Propriété

Soit E un ensemble fini. On appelle **permutation** de E toute bijection de E dans E.

Exemple

Considérons $E = \{1; 2; 3\}$. L'application $\sigma : E \to E$ telle que $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3$ et $\sigma(3) = 1$ est bien une bijection de E dans lui-même, c'est donc une permutation de E. On la note $\sigma = (1,\ 2,\ 3)$.

Propriété

Si $\mathrm{Card}(E) = n$, alors le nombre de permutations de E est $n!$.

Exercice 14. Déterminer toutes les permutations de $E = \{1; 2; 3\}$.

☞ *On utilise les permutations dans les problèmes où l'on veut* ***ordonner*** *tous les éléments d'un ensemble (sans répétition).*

Exemple

Le nombre de façons de placer 51 élèves de D2 sur les 51 chaises de la salle est le nombre de façons de permuter les 51 élèves sur les 51 chaises, c'est à dire 51! (ce qui est un nombre très très très grand!).

Exercice 15. Les 28 tomes d'une encyclopédie sont rangés sur une étagère.

(1) Quel est le nombre de rangements possibles?
(2) Quel est le nombre de rangements pour lesquels les tomes I et II apparaissent côte à côte et dans cet ordre sur l'étagère?
(3) Quel est le nombre de rangements pour lesquels les p premiers tomes ($1 \leq p \leq 28$) apparaissent côte à côte et dans le bon ordre?

3.2 Arrangements

Définition

Un **arrangement** de E est une disposition ordonnée d'un certain nombre d'élements de E.

Propriété

Si $\text{Card}(E) = n$ et si $1 \leq k \leq n$, le nombre d'arrangements de k éléments de E se note A_n^k et vaut
$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

☞ *On utilise les arrangements dans les problèmes où l'on veut* ***ordonner*** *k éléments d'un ensemble (sans répétition).*

Exemple

Le nombre de "mots" de trois lettres formés avec les lettres du mot "MATHS" est
$$A_5^3 = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60.$$

Exercice 16. Douze étudiants participent à un concours de mathématiques. Combien y a-t-il de "podiums" possibles?

3.3 Combinaisons et coefficients binomiaux

Définition

On appelle $k-$**combinaison** de E toute partie de E à k éléments. Le nombre de combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments se note $\binom{n}{k}$.

☞ L'ordre des éléments d'une combinaison n'a pas d'importance.

Exemple

Prenons à nouveau $E = \{1;2;3\}$.

- Les combinaisons de 2 éléments de E sont $\{1;2\}$, $\{1;3\}$ et $\{2;3\}$. On peut donc conclure que
$$\binom{3}{2} = 3.$$
- $\{2;3\}$ et $\{3;2\}$ sont deux combinaisons identiques.

Propriété

Les nombres $\binom{n}{k}$ sont appelés **coefficients binomiaux** (cette terminologie sera justifiée dans un chapitre suivant). De plus:

(1) Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est aussi égal au nombre de façon de choisir k objets distincts parmi n objets donnés.

(2) Dans un *arbre binaire* (succès-échec), le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est égal au nombre de chemins sur lesquels on obtient exactement k succès (et $n-k$ échecs) lors de n répétitions d'une expérience aléatoire de Bernoulli (ce qu'on reverra naturellement dans un prochain chapitre sur les probabilités).

Il apparaît alors important de trouver comment calculer explicitement chaque coefficient binomial en fonction de n et k. Toutes les formules suivantes sont à connaître et comprendre parfaitement, et sont capitales pour la suite, dans différents cadres d'application.

Propriété

Quelques coefficients binomiaux particuliers.

Pour tout entier n on a
$$\binom{n}{0} = 1; \qquad \binom{n}{1} = n \quad \text{et} \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Propriété

Formule du coefficient binomial.

Soient n un entier et $0 \leq k \leq n$. Alors,
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Il n'est pas difficile d'obtenir cette formule à partir de celle sur le nombre d'arrangement: l'ordre n'intervenant pas pour les combinaisons (contrairement aux arrangements), si les k éléments d'une combinaison sont choisis, il y a $k!$ permutations de ces éléments pour obtenir tous les arrangements possibles. Ainsi,
$$k!\binom{n}{k} = A_n^k \iff \binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Exemple

On retrouve bien $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\times 1!} = \frac{6}{2} = 3$.

La formule précédente permet en particulier d'établir des relations bien pratiques:

Propriété

Propriétés des coefficients binomiaux.

Soient n un entier et $0 \leq k \leq n$. Alors,

(Symétrie) $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

(Triangle de Pascal) $$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Exercice 17. Combien de mains de quatre cartes à jouer (choisies parmi 32) existe-t-il? Parmi ces mains, combien contiennent la dame de coeur?

Exercice 18. Un ensemble E possède exactement 55 parties à deux éléments. Quel est le cardinal de cet ensemble?

Exercice 19. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ et en utilisant la formule du *triangle de Pascal*, que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad \text{et que} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

3.4 Méthodologie du dénombrement

On conclue ce chapitre par un "point méthode" pour savoir comment dénombrer les possibilités offertes par une situation donnée, à l'aide des outils précédemment introduits.

✎ **On décompose la situation:**

- Si la situation à étudier peut se décrire en plusieurs cas **disjoints** (à l'aide par exemple d'un "ou bien" ou "soit"), alors le dénombrement peut s'obtenir en **ajoutant** les dénombrement de chacun des cas.

- Si la situation à étudier peut être décrite par plusieurs **étapes successives** ("puis", "et", ...) alors le dénombrement peut s'obtenir en **multipliant** les dénombrements de chacune des étapes.

- Il peut être parfois beaucoup plus simple de dénombrer l'ensemble complémentaire.

✎ **On dénombre chaque composante de la situation décomposée:**

- Si l'ordre intervient et si les répétitions sont autorisées, il y a n^d façons de choisir d fois successives un élément parmi n.

- Si l'ordre intervient mais que les répétitions ne sont pas autorisées, il y a A_n^d façons de ranger d éléments parmi n.

- Si l'ordre n'intervient pas et que le répétitions ne sont pas autorisées, il y a $\binom{n}{d}$ façons de choisir d éléments parmi n.

Exercice 20. On tire successivement, avec remise, 5 boules dans une urne qui en contient 3 noires et 4 blanches. Combien y a-t-il de tirages:

(1) en tout?
(2) comportant 3 noires et 2 blanches?
(3) comportant au plus une noire?
(4) comportant au moins deux noires?

✎ **Le principe des bergers.** Pour compter le nombre de moutons de son troupeau, un berger compte toutes les pattes et divise le total par 4.

Exemple

Si on veut dénombrer le nombre d'anagrammes du "mot" ELEVEN TWO[a], on se rend compte qu'il devient difficile de tenir compte du fait que ce mot contient trois fois la lettre E, qui ne sont a priori pas différentiables. On va donc dans un premier temps dénombrer les anagrammes du même mot pour lequel on va différencier les lettres E, en les nommant E_1, E_2 et E_3. Le mot $E_1LE_2VE_3N$ TWO admet 9! anagrammes (car il se compose de 9 *caractères*). Or, toute permutation des trois E (il y en a 3!) ne change finalement pas le mot. Finalement, il y a $\frac{9!}{3!}$ anagrammes de ELEVEN TWO.

[a] On remarquera avec amusement qu'un des anagrammes de ELEVEN TWO est en fait TWELVE ONE (et les deux sommes font 13...).

Exercice 21. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot *AVADAKEDAVRA* ?

4 Exercices - Travaux dirigés

4.1 Exercices en vrac

Exercice 22. Soient E et F deux ensembles et $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$. Montrer, qu'en général,

$$\complement_{E\times F} A \times B \neq \complement_E A \times \complement_F B.$$

Exercice 23. Montrer que les deux ensembles suivants sont égaux et les représenter graphiquement

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x - y = 1\} \quad \text{et} \quad B = \{(t + 1, 4t + 3) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 24. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x^2(3y-5) \end{array}$$

L'application est-elle injective? surjective? bijective? Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R}_+^\star)$.

Exercice 25. (Composition itérée)

Si $f : E \to E$ est une application, on peut composer f avec elle même. En répétant ce processus, on peut le faire n fois. Plus précisément, on note, pour $n \geq 1$

$$f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f \quad (n \text{ fois}).$$

(1) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$. Que vaut f^n?
(2) Soit alors $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x/(x + 1)$. Expliciter f^2 puis f^3. Conjecturer puis démontrer, par récurrence, une formule pour f^n.

Exercice 26. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^\star$ définie par

$$f(x) = \frac{e^x + 2}{e^{-x}}.$$

Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Exercice 27. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer que:

(1) Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
(2) Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 28. On considère les deux applications

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^* \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x^3y^2z^6, x^4y^5z^{12}, x^2y^2z^5) \end{array}$$

et

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (\ln(x), \ln(y), \ln(z)). \end{array}$$

(1) Déterminer

$$g\left(\{1\} \times]1; +\infty[\times \mathbb{R}_+^*\right) \qquad \text{et} \qquad g^{-1}\left(\{0; 1\} \times]1; +\infty[\times \mathbb{R}_+\right).$$

(2) g est-elle injective? Surjective? Bijective?

(3) Expliciter $(g \circ f)(x, y, z)$ puis déterminer, pour $a, b, c > 0$, $(g \circ f)^{-1}\left(\{(a; b; c)\}\right)$. En déduire que $g \circ f$ est bijective puis que f est bijective.

Exercice 29. Calculer les coefficients binomiaux suivants:

$$a = \binom{4}{2}; \qquad b = \binom{6}{2}; \qquad c = \binom{6}{4}; \qquad d = \binom{6}{3};$$
$$e = \binom{7}{3}; \qquad f = \binom{15}{2}; \qquad g = \binom{15}{13}.$$

Exercice 30 (Manipulation de la factorielle)**.**

(1) Factoriser $n! - 2(n-2)!$.

(2) Calculer

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{n}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2} \text{ et } \binom{n}{n-2}$$

(3) Simplifier $A_n = \dfrac{n!}{(n-2)!}$.

Exercice 31 (Vrai ou Faux?)**.**

(1) Pour tout entier naturel n, $(2n)! = 2n!$.

(2) Pour tout entier naturel n, $(2n+1)!$ est impair.

(3) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, $n!$ est pair .

(4) Pour tout entier naturel n, $(n+1)! - n! = n \times n!$.

(5) Pour tout entier naturel $n \geq 4$,

$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12}.$$

(6) Pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$\frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1).$$

Exercice 32. Résoudre dans $\mathbb{N}$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 5n$$

Exercice 33 (Formule de Van der Monde)**.** Une assemblée est composée de n hommes et de p femmes. On forme un comité comprenant a personnes $(0 < a \leq n + p)$.

(1) Combien y a t-il de comités comprenant k hommes et $a - k$ femmes?

(2) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{p}{a-k} = \binom{n+p}{a},$$

où on adopte la convention selon laquelle $\binom{j}{i} = 0$ si $i > j$ ou si $i < 0$.

(3) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

(4) En déduire aussi que

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}^2 = n(n-1)\binom{2n-2}{n-2}.$$

Exercice 34. (L'étudiante maniaque)
Une étudiante sérieuse souhaite ranger ses livres de cours sur une étagère. Sa collection regroupe 3 livres de Mathématiques, 2 livres de Langue Vivante et 4 livres d'ESH. Combien y a-t-il de façon de ranger les 9 livres:

(1) En tout?
(2) De sorte que tous les livres soient classés par matière?
(3) De sorte que les livres de mathématiques ne soient pas regroupés alors que c'est le cas pour les deux autres matières?
(4) De sorte que seuls les livres de mathématiques soient regroupés?

Exercice 35. (Les menus)
On cherche à organiser une soirée de Noël. Le service traiteur retenu nous propose, afin d'élaborer un menu, de choisir les plats qui seront proposés aux convives parmi tout un panel de bonnes choses. Plus précisément, on veut créer un menu composé d'une entrée à choisir parmi 2, d'un plat à choisir parmi 3 et d'un dessert. Le traiteur propose une liste comprenant 8 entrées, 10 plats et 6 desserts.

(1) Combien peut-on créer de menus différents ?
(2) Seules la moitié des entrées de la liste conviennent aux végétariens et seulement 3 plats principaux n'ont pas nécessité la mise à mort d'un animal. Combien y a-t-il de menus offrant systématiquement une alternative végétarienne à chacun des convives?

Exercice 36. (Secret Santa)
Un enseignant sympathique organise, juste avant les fêtes, un *Secret Santa* pour sa classe. Les n participants mettent leur nom dans une urne et chacun tirera un petit papier et devra offrir un cadeau à la personne dont le nom est inscrit sur le petit papier. On appelle tirage l'attribution d'un papier à chaque participant.

(1) Combien y a-t-il de tirages différents?
(2) L'enseignant adore les cadeaux. Il décide de glisser non pas un seul, mais p papiers avec son nom. Ni vu ni connu.
    (a) Combien y a-t-il de tirages différents dans cette nouvelle disposition? (Chaque participant continue de ne tirer qu'un seul papier).
    (b) Dans combien de ces tirages l'enseignant se fait-il un cadeau à lui-même?
    (c) Quel est le nombre de tirages pour lesquels les p papiers de l'enseignant sont tirés?

4.2 Mini-Problèmes

Exercice 37. (La meilleure façon de marcher)
Monsieur Fritzl emprunte un escalier à n marches pour aller à sa cave. Il descend cet escalier marche par marche ou en sautant une marche. On s'intéresse au nombre de façons différentes de descendre l'escalier à n marches, que l'on note a_n. Il est alors clair que $a_1 = 1$ (s'il n'y a qu'une seule marche, on ne peut descendre l'escalier que d'une seule façon).

(1) Déterminer a_2, a_3 et a_4.
(2) Déterminer une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n (on justifiera la réponse par un argument de dénombrement).
(3) Montrer, à l'aide d'une récurrence double et de la formule du triangle de Pascal, que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = a_n, \qquad \text{où, par convention, } \binom{m}{p} = 0 \text{ si } p > m.$$

(4) Montrer, en justifiant la réponse par un argument de dénombrement, que, si n et m sont deux entiers naturels, alors
$$a_{n+m} = a_n a_m + a_{n-1}a_{m-1}.$$

Exercice 38. (Eyes Wide Shut)

Dans une société secrète, n couples se rendent à une soirée spéciale, tous masqués, un membre avec un masque noir, l'autre avec un masque blanc. À l'arrivée, on sépare les couples, on numérote les porteurs de masques noirs de 1 à n , et les porteurs de masque blancs de 1 à n. On les fait ensuite s'avancer dans le hall principal d'un manoir éclairé à la bougie, chaque masque noir choisissant au hasard un masque blanc pour partenaire.
On s'intéresse à la situation où tous les couples de départ sont *dérangés*, c'est à dire que personne ne se retrouve avec son partenaire légitime[1].

Soit E un ensemble à n éléments. On appelle *dérangement* toute bijection de E dans E ne laissant **aucun** élément invariant. On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des dérangements de E et D_n son cardinal, *i.e* le nombre de dérangements de E. Par convention, on note $D_0 = 1$.

(1) Exprimer p_n en fonction de n et et D_n.
(2) Que vaut nécessairement D_1? Que vaut D_2? *On commencera par faire des dessins.*
(3) Soit $k \in \{0; 1; 2; ...; n\}$. Combien y a-t-il, en fonction de D_k de permutations de E laissant invariants exactement k éléments? En déduire que
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k = n!.$$
(4) À l'aide de la formule précédente, déterminer D_3, D_4 et D_5, en déduire p_3, p_4 et p_5.

(5) Soit $n \geq 2$.
  (a) On introduit
  $$\mathcal{D}_n^1 = \{\sigma \in \mathcal{D}_n : \ \sigma^2(1) = 1.\}$$
  Montrer que
  $$\#\mathcal{D}_n^1 = (n-1)D_{n-2}.$$
  (b) On introduit, en toute logique,
  $$\mathcal{D}_n^2 = \{\sigma \in \mathcal{D}_n : \ \sigma^2(1) \neq 1.\}$$
    (i) Soit $\sigma \in \mathcal{D}_n^2$. On note $k = \sigma(1)$. Soit τ alors la bijection de E qui permute 1 et k et qui laisse tous les autres éléments invariants. Quelle est la bijection réciproque de τ?
    (ii) Montrer que $\tau\sigma$ est une permutation de E qui ne laisse que 1 invariant.
    (iii) En déduire que $\psi : \ \sigma \mapsto \tau\sigma$ est une bijection de $\{\sigma \in \mathcal{D}_n^2 : \ \sigma(1) = k\}$ sur l'ensemble de dérangements de $\{2, 3, ..., n\}$. En déduire que
    $$\#\mathcal{D}_n^2 = (n-1)D_{n-1}.$$
  (c) Conclure (ou admettre) que, pour tout $n \geq 2$.
  $$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}).$$

(6) En déduire, par récurrence que
$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

[1] sinon, autant rester à la maison

Exercice 39. (Soirée déguisée) Afin de préparer la soirée de fin d'année d'une école de n étudiant.e.s, on a disposé dans la salle de détente un sac contenant p petits papiers sur chacun desquels est écrit le nom d'un personnage. Chaque étudiant tire au hasard un papier, puis le remet dans le sac, après avoir pris connaissance du personnage qu'il devra incarner. Il est donc possible que plusieurs personnes arrivent avec le même déguisement le jour de la soirée.

On appelle S_n^p le nombre de tirages pour lesquels tous les personnages seront présents à la soirée.

(1) Que vaut S_n^p si $p > n$? Et si $p = n$? Justifier.
(2) Que vaut S_n^1?
(3) On suppose que $p = 2$. On décomposant le nombres de tirages selon le nombre d'étudiants ayant tiré le premier personnage, montrer que $S_n^2 = 2^n - 2$.
(4) Montrer que

$$S_{n+1}^p = p\left(S_n^p + S_n^{p-1}\right).$$

(<u>indication :</u> on pourra compter le nombre de tirages possibles pour n étudiants, une fois qu'un des $n+1$ étudiants a déjà pioché, en différenciant deux cas, selon que le déguisement déjà tiré par l'étudiant est à nouveau pioché ou non.)

(5) On cherche à montrer, à l'aide d'une récurrence sur $n \geq 1$, que, pour tout $p \geq 1$,

$$(\star) \qquad S_n^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n.$$

(a) On suppose que $n = 1$. Vérifier que l'égalité est vraie si on a également $p = 1$.
(b) Montrer que l'égalité $(\star)$ est encore vérifiée si $n = 1$ et $p > 1$.
(c) On suppose que l'égalité $(\star)$ est vérifiée pour une certaine valeur de $n \geq 1$ et pour tout $p \geq 1$.
(i) Vérifier qu'elle est encore vérifiée au rang $n+1$ avec $p = 1$.
(ii) En utilisant la Question (4) de l'exercice précédent, puis à l'aide de la formule du triangle de Pascal, montrer que l'égalité $(\star)$ est encore vraie au rang $n+1$ pour $p > 1$.

Exercice 40. (Une formule de somme)
On **admet** que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1[$, la série $\sum_{n \geqslant k} \binom{n}{k} x^n$ est convergente et on note $s_k(x)$ sa somme :

$$s_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n.$$

(1) Vérifier, pour tout réel x de $[0,1[$:

$$s_0(x) = \frac{1}{1-x} \qquad \text{et} \qquad s_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

(2) Pour tout couple d'entiers naturels (n,k) tels que $n > k$, **montrer** :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

(3) Pour tout entier naturel k et pour tout réel x de $[0,1[$, déduire de la question précédente :

$$s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x)$$

(4) Montrer par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[, \quad s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$