Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Chapitre 6. Probabilités élémentaires

1 Le langage des probabilités

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut prédire avec certitude le résultat. L'étude de cette expérience nécessite alors la description de tous les résultats possibles, appelés **issues**. L'ensemble de toutes les issues est appelé **univers** et est souvent noté Ω.

L'énoncé d'un exercice de probabilité (c'est à dire d'une expérience aléatoire) ne précise pas (toujours) l'univers Ω explicitement. C'est donc parfois à celui ou celle qui en fait l'étude de *décrire* cet ensemble d'une manière rigoureuse et commode afin de travailler dessus. Cette étape s'appelle la **modélisation** de l'expérience.
Parfois aussi, on ne fournit pas explicitement de description de Ω mais on décrit les *évènements* qui nous intéressent à l'aide des opérations de la théorie des ensembles.

Exemple

Regardons les univers avec lesquels on peut modéliser les expériences suivantes.

- **Expérience 1.** On lance un dé cubique à 6 faces et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure. Les résultats possibles sont alors $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ qui est un ensemble de cardinal 6.

- **Expérience 2.** On lance deux dés discernables (un rouge et un bleu par exemple) et on note les résultats obtenus. On voit alors qu'ici $\Omega = \{(i, j) : \ 1 \leq i \leq 6, \ 1 \leq j \leq 6\} = [\![1; 6]\!]^2$, qui est un ensemble à 36 éléments.

- **Expérience 3.** Cette fois les deux dés sont identiques, mais on note encore les résultats obtenus. Comme on ne peut plus faire la différence entre les deux dés, les deux résultats de l'expérience précédent $(1; 3)$ et $(3; 1)$ sont en particulier dans cette nouvelle expérience l'expression de la même issue $\{1; 3\}$. Ainsi, on a
$$\Omega = \{\{i; j\} : \ 1 \leq i \leq j \leq 6\}.$$
De plus,
$$\mathrm{Card}(\Omega) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq 6} 1 = \sum_{j=1}^{6} \sum_{i=1}^{j} 1 = \sum_{j=1}^{6} j = \frac{6 \times 7}{2} = 21.$$

À retenir!

Décrire convenablement l'expérience, puis très précisément les évènements qui nous intéressent sont le coeur de ce qu'il va falloir apprendre à faire, avant même de passer au calcul des probabilités. Il n'est pas possible de calculer une probabilité sans être passé par là!

Exercice 1.

(1) On lance n fois une pièce de monnaie. Quel univers peut modéliser la situation ? Combien comporte-t-il d'éléments?
(2) On joue à l'*Euromillion*. On doit pour cela cocher 5 cases d'une grille comportant les nombres de 1 à 50 puis cocher deux étoiles parmi 11. Quel univers peut modéliser la situation ? Combien comporte-t-il d'éléments?

Définition

Un **évènement aléatoire** est un fait qui peut se produire, ou non, suivant le résultat d'une expérience aléatoire. On le représente par l'ensemble des issues qui le réalisent. Il s'agit donc d'une **partie** de Ω. Un évènement ne comportant qu'une seule issue est appelé **évènement élémentaire** (et se représente par un singleton).

Exemple

- Dans l'Expérience 1 précédente, on peut par exemple considérer l'évènement "le résultat est un nombre pair" qui se représente par l'ensemble $\{2; 4; 6\}$.

- Lorsque Ω est un ensemble **fini** ou dénombrable, l'ensemble des évènements que l'on considère est le plus souvent l'ensemble de toutes les parties de Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$. En particulier, tout élément permet de former un évènement élémentaire et de plus Ω et $\emptyset$ sont des évènements appelés respectivement *évènement certain* et *évènement impossible*.

Exercice 2. On effectue l'expérience 2 précédente. Décrire les évènements suivants:

(i) A "la somme des nombres obtenus est supérieure ou égale à 10";
(ii) B "le produit des nombres obtenus est supérieur ou égal à 20".

À retenir!

☞ L'identification entre évènements et sous-ensembles de Ω permet d'utiliser les opérations élémentaires de la théorie des ensembles pour traduire certains évènements, notamment les notions suivantes:

- (A ou B) est modélisé par $A \cup B$.
- (A et B) est modélisé par $A \cap B$.
- la non réalisation de l'évènement A est modélisée par $\overline{A}$.

Naturellement, on peut combiner des opérations pour décrire des évènements plus complexes et toutes les règles de calcul sur les ensembles sur chapitre correspondant sont alors utiles et utilisées.

Exemple

José est le concierge d'un immeuble et possède donc à son trousseau un exemplaire de chacune des clés des appartements de l'immeuble, y compris celle de son domicile. En rentrant d'une soirée arrosée, il ne sait discerner laquelle ouvre sa porte d'entrée. N'ayant pas tous ses moyens, il remet dans le trousseau la clé après l'avoir testée, même si celle-ci n'est clairement pas la bonne. On note S l'évènement correspondant à la découverte de la bonne clé et à l'ouverture de la porte.

S'il est facile de comprendre l'évènement S et de le formuler "oralement", son expression permettant le calcul de la probabilité correspondante n'est pas si simple. Pour décrire précisément la structure de l'évènement, on a besoin d'introduire les évènements (pour $n \geq 1$ entier) A_n : "José réussit enfin à ouvrir la porte après n tentatives" et B_n : "la $n-$ième clé testée est la bonne". On peut alors écrire les choses comme suit

$$S \quad = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n-1}\overline{B}_k\right)\cap B_n\right).$$

Exercice 3. On lance n fois consécutives une pièce (où n est un entier). Si $k \in [\![1;n]\!]$, on note P_k l'évènement "on obtient *pile* au $k-$ième lancer", A_n l'évènement "on obtient que des *pile* au cours des n lancers", et B_n l'évènement "on obtient au moins une fois *pile* au cours des n lancers".

(1) Exprimer A_n à l'aide des P_k.
(2) Exprimer B_n à l'aide des P_k.
(3) Exprimer l'évènement "le premier *pile* apparaît au $n-$ième lancer".

Définition

Deux évènements sont dits **incompatibles** lorsqu'il est impossible qu'ils soient réalisés simultanément. Ces deux évènements étant représentés par A et B, éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$, il seront incompatibles si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

☞ Naturellement, un évènement et son contraire sont toujours incompatibles.

La notion de *partition* de l'univers introduite au chapitre précédent apparaît dans le cadre des probabilités sous une autre terminologie (mais c'est la même chose).

Définition

Soit $I \subset \mathbb{N}$ une partie (finie ou non) de $\mathbb{N}$. Soit $(A_n)_{n\in I}$ une famille (ou une suite) d'évènements. On dit que cette famille est un **système complet d'événements** si et seulement si

$$(i) \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{si} \quad i \neq j; \qquad\qquad (ii) \quad \bigcup_{k\in I} A_k = \Omega.$$

Exemple

- Une urne contient des boules numérotées de 1 à n, indiscernables au toucher. On pioche successivement et sans remise deux boules dans cette urne. On note, pour $k \in [\![1,n]\!]$, N_k l'évènement "on pioche la boule avec le numéro k au premier tirage". Alors, la famille
$$\{N_k :\ k \in [\![1,n]\!]\}$$
forme un système complet d'évènements.

- On lance une pièce de monnaie indéfiniment. On note, pour $j \in \mathbb{N}^*$, A_j l'évènement "le premier *Pile* arrive au $j-$ième lancer". Alors, la suite
$$\{A_j :\ j \in \mathbb{N}^*\}$$
forme un système complet d'évènements.

- L'ensemble des évènements élémentaires forme naturellement toujours un système complet d'évènements.

2 Probabilités sur un ensemble fini

Dans toute cette section, on considère donc un univers Ω **fini**.

2.1 Petite discussion introductive

Si on lance un dé cubique équilibré un grand nombre de fois, on constate que la fréquence d'apparition de chaque face se rapproche de 1/6, ce qui suggère une modélisation de l'expérience par une *probabilité uniforme* sur $\Omega = [\![1;6]\!]$:
$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}.$$
Si maintenant le dé est truqué, l'univers reste le même mais la probabilité d'apparition de chaque face n'est plus la même, par exemple on pourrait avoir
$$p(\{1\}) = p(\{2\}) = p(\{3\}) = p(\{4\}) = \frac{1}{16}; \quad p(\{5\}) = \frac{1}{4}; \quad p(\{6\}) = \frac{1}{2}.$$

☞ Ainsi, on pourrait définir deux probabilités différentes P et p sur le même univers Ω. Il est donc important de préciser ce qu'est une probabilité, et les évènements qu'elle peut "mesurer", d'où la notion d'espace probabilisable et la définition rigoureuse de probabilité qui suit.

2.2 Notion de probabilité sur un ensemble fini. Premières propriétés

Définition

Soit Ω un ensemble fini et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de ses parties. On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ **toute** application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0;1]$ telle que

(i) $P(\Omega) = 1$;
(ii) $\forall A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un **espace probabilisé**. De plus, pour chaque évènement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A)$ s'appelle la probabilité de A.

☞ Il n'est pas nécessaire dans le cadre du programme de mathématiques en D2 d'accorder trop d'importance à la notion d'espace probabilisé.

Définition

On considère un ensemble fini, non vide, Ω. On appelle **probabilité uniforme** sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ (ou plus simplement sur Ω) l'application

$$\begin{array}{rcl} P : \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0;1] \\ A & \mapsto & \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} \end{array}$$

Il est alors facile de vérifier que l'application P satisfait bien les conditions de la définition précédente: c'est bien une probabilité. De plus, si $\omega \in \Omega$, alors

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}.$$

En particulier, tous les évènements élémentaires ont la même probabilité.

☞ *La probabilité uniforme modélise une expérience dont toutes les issues sont* ***équiprobables***

Exercice 4. Les 28 tomes d'une encyclopédie sont rangés sur une étagère.

(1) Quelle est la probabilité que les tomes I et II apparaissent côte à côte et dans cet ordre sur l'étagère?
(2) Quelle est la probabilité que p premiers tomes $(1 \leq p \leq 28)$ apparaissent côte à côte et dans le bon ordre?

Propriété

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est un évènement, alors

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P\left(\{\omega\}\right).$$

En particulier, si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ alors

$$1 = \sum_{k=1}^{n} P\left(\{\omega_k\}\right).$$

Une probabilité est ainsi caractérisée par les valeurs $(P\left(\{\omega_1\}\right), ..., P\left(\{\omega_n\}\right))$, ce qu'on appelle **loi de probabilité de** P.

Exercice 5. Un joueur lance une bille sur une planche percée de n trous numérotés de 1 à n $(n > 2)$. La bille tombe toujours dans un trou (et dans un seul). La probabilité que la bille tombe dans le trou numéro 1 est $\frac{1}{3}$, celle qu'elle tombe dans le trou numéro 2 est $\frac{1}{3^2}$ et plus généralement celle du trou numéro k est $\frac{1}{3^k}$ (pour $1 \leq k < n$). Quelle est alors la probabilité qu'elle tombe dans le trou numéro n?

Propriété

Calcul des probabilités.

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé (fini) et A, B deux évènements. Alors,

(i) $P(\emptyset) = 0$;
(ii) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
(iii) Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$.

☞ Pour calculer la probabilité d'une union, on utilise la formule du crible de Poincaré.

Propriété

Formule du crible.

Soient A, B, C trois évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

et

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C).$$

Exercice 6. On tire, avec remise, une boule dans une urne, qui en contient une bleue, une blanche et une rouge, n fois de suite. On note p_n la probabilité que les trois couleurs apparaissent au moins une fois lors des n tirages et A l'évènement "la boule bleue n'apparaît pas pendant les n tirages", B l'évènement "la boule blanche n'apparaît pas pendant les n tirages" et C l'évènement analogue pour la boule rouge.

(1) Calculer $P(A \cup B \cup C)$.
(2) En déduire une expression de p_n en fonction de n.
(3) Calculer $\lim_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter le résultat.

Propriété

Unions disjointes.

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé (fini) et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'évènements deux à deux incompatibles. Alors,

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i).$$

En particulier, si $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'évènements,

$$1 = P(\Omega) = \sum_{i \in I} P(A_i).$$

Exercice 7. Une urne contient 3 boules jaunes, 3 boules bleues, 3 rouges, 3 vertes et 3 noires. On tire successivement, sans remise, 3 boules de l'urne. Déterminer la probabilité que le tirage soit unicolore.

Définition

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé (fini) et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ un évènement. On dit que :
(i) A est presque sûr si $P(A) = 1$;
(ii) A est négligeable si $P(A) = 0$.

2.3 Probabilités conditionnelles

Lorsque l'on réalise (successivement) une ou plusieurs expériences aléatoires, on peut voir tenir compte dans une prévision d'une information complémentaire. Imaginons par exemple qu'on lance un dé (cubique) équilibré. La probabilité d'obtenir un 6 est alors égale à $1/6$. Maintenant, on tient compte du fait que les faces du dés sont peintes, en vert pour les chiffres pairs, et en rouge pour les impairs. La probabilité d'obtenir un 6 **sachant** qu'on voit que la face est verte est alors de $1/3$. Cette probabilité est **conditionnée** par la couleur de la face, c'est une *probabilité conditionnelle*.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé dont B est un évènement non négligeable (*i.e.* $P(B) > 0$). Pour tout évènement A, on définit la **probabilité conditionnelle de A sachant B** par

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Le calcul des probabilités conditionnelles peut s'avérer difficile et les résultats contre-intuitifs, comme on pourra le voir avec l'exercice ci-dessous. Il est donc capital de faire preuve de rigueur et de vigilance lors des calculs et de la modélisation et la formulation de l'expérience et d'éviter de vouloir donner une réponde immédiate et fausse.

Exercice 8. (Paradoxe des enfants, extrait de *Scientific American* (1959))

Mr. Jones has two children. The older child is a girl. What is the probability that both children are girls?
Mr. Smith has two children. At least one of them is a boy. What is the probability that both children are boys?

Propriété

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé dont B est un évènement non négligeable. Alors, l'application

$$\begin{array}{rcl} P_B : \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0;1] \\ A & \to & P_B(A) \end{array}$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Corollaire

La probabilité P_B vérifie donc toutes les règles de calcul des probabilités. Plus précisément, si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$,

(1) $P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A)$;
(2) Si $A_1 \subset A_2$, alors $P_B(A_1) \leq P_B(A_2)$;
(3) les formules du crible de Poincaré restent vrai en remplaçant P par P_B.

Remarque

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé. Pour tous évènements $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ avec $P(B) > 0$, on a

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A).$$

Cette observation est très pratique pour calculer des probabilités d'intersection à partir des probabilités conditionnelles.

2.4 Formule des probabilités composées

Il est également possible de conditionner par plusieurs évènements et le résultat précédent se généralise pour calculer la probabilité de l'intersection d'une famille finie d'évènements. On appelle cela *Formule des probabilités composées*. La démonstration se fait par récurrence et on invite le lecteur ou la lectrice à tenter de l'écrire.

Propriété

Formule des probabilités composées.

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'évènements tels que $P\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}\right) > 0$. Alors,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times \cdots \times P_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n).$$

Exemple

Une urne contient initialement une boule rouge et deux boules bleues. On pioche successivement, et selon le protocole suivant, trois boules dans cette urne. À chaque pioche, si la boule piochée est bleue, on la remet dans l'urne. Si par contre elle est rouge, on la remet mais on ajoute une boule rouge dans l'urne.
On s'intéresse à l'évènement Z "la boule bleue apparaît pour la première fois au troisième tirage". Pour pouvoir calculer $P(Z)$, il faut décrire Z avec des évènements plus "simples". On introduit donc les évènements (pour $i \in [\![1,3]\!]$) R_i (resp. B_i) "la boule piochée au $i-$ième tirage est rouge (resp. bleue)".
Si on connait la composition de l'urne (nombre de rouges, nombre de bleues) au moment où on fait le tirage, on est en mesure de calculer la probabilité d'obtenir telle ou telle boule.
On peut alors écrire, à l'aide de la formule des probabilités composées

$$\begin{aligned} P(Z) &= P(R_1 \cap R_2 \cap B_3) \\ &= P(R_1)P_{R_1}(R_2)P_{R_1\cap R_2}(B_3) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{1}{15} \end{aligned}$$

Exercice 9. On disposes de trois urnes $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ et $\mathcal{U}_3$ qui contiennent des boules blanches et noires:

- $\mathcal{U}_1$ contient 2 boules blanches et 3 noires;
- $\mathcal{U}_2$ contient 4 boules blanches et 2 noires;
- $\mathcal{U}_3$ contient 6 boules blanches et 1 noire.

On effectue trois tirages successifs en suivant le protocole qui suit:

- On tire au hasard une boule dans l'urne $\mathcal{U}_1$ et on note sa couleur. On place ensuite cette boule dans l'urne $\mathcal{U}_2$.
- On tire ensuite une boule dans l'urne $\mathcal{U}_2$, on note encore sa couleur et on la place dans l'urne $\mathcal{U}_3$.
- Enfin, on tire une dernière boule dans l'urne $\mathcal{U}_3$ dont on note la couleur.

Quelle est la probabilité que les trois boules tirées soient de la même couleur?

Exercice 10. Une galette des rois est découpées en N parts; une seule contient la fève et les $N-1$ autres rien du tout que du beurre et du gras. On distribue les N parts successivement aux N convives qui font la queue pour êtres servi.e.s.
Montrer qu'une fois positionnées dans la queue, toutes les personnes gourmandes de ce groupe ont la même probabilité d'obtenir la fève.

2.5 Évènements indépendants et mutuellement indépendants

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et A, B deux événements. Intuitivement, on dira que A et B sont indépendants si la réalisation de B ne change rien pour celle de A et inversement. Plus rigoureusement, on introduit la définition suivante.

Définition

Deux événements A et B d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ sont dits **indépendants pour la probabilité** P si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

En particulier, si $P(B) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$.

Attention!

La notion d'indépendance dépend de la probabilité qui équipe l'espace. En particulier, et contre l'idée intuitive que l'on pourrait avoir, deux évènements peuvent être indépendants pour un certaine probabilité P mais pas pour une autre! On sera donc vigilants. Cela dit, quand il n'y a pas d'ambiguïté sur la probabilité P, on dira simplement que les deux évènements sont indépendants.

Exercice 11. On effectue l'**Expérience 1** (on lance un dé cubique et on regarde le résultat). On munit $\Omega = [\![1, 6]\!]$ de l'ensemble de ses parties et de deux probabilités:

- P_1 est la probabilité uniforme sur Ω;
- P_2 est la probabilité "dé pipé" définie par :

$$P_2(\{6\}) = \frac{1}{3}, \quad P_2(\{5\}) = P_2(\{4\}) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad P_2(\{1\}) = P_2(\{2\}) = P_2(\{3\}) = \frac{1}{9}.$$

On considère les événements A "obtenir 4 ou 5" et B "obtenir 5 ou 6". Les évènements A et B sont-ils indépendants pour la probabilité P_1? Et pour la probabilité P_2?

Exercice 12. On considère une famille avec des enfants. On considère qu'il y a équiprobabilité de la répartition des sexes.

(1) On suppose qu'il y a deux enfants. Étudier l'indépendance des évènements:
  - A "la famille a des enfants de deux sexes";
  - B "la famille a au plus un garçon".

(2) Qu'en est-il de l'indépendance des ces mêmes évènements si la famille compte trois enfants?

Attention!

Deux évènements (non négligeables) **incompatibles ne sont pas indépendants**.
En particulier, si A est un évènement non négligeable alors A et $\overline{A}$ (qui sont bien incompatibles) ne sont pas indépendants!

Propriété

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et A, B deux événements **indépendants pour la probabilité P**, alors

(1) les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants.
(2) les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.
(3) les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

On peut alors s'intéresser à l'indépendance mutuelle de plusieurs évènements. Cependant, la généralisation de la notion d'indépendance est plus délicate qu'il n'y parait. Par exemple, si on a trois évènements A, B, C, on pourrait d'un côté regarder leur indépendance *deux à deux*:

$$(1) \qquad P(A\cap B) = P(A)\times P(B), \qquad P(B\cap C) = P(B)\times P(C) \quad \text{et} \quad P(C\cap A)P(C)\times P(A).$$

Mais on pourrait aussi vouloir que la probabilité de l'intersection des trois évènements soit égale au produit des trois probabilités:

$$(2) \qquad P(A\cap B\cap C) = P(A)\times P(B)\times P(C).$$

Or, ces deux conditions ne sont pas du tout équivalentes, comme le montre l'exercice ci-dessous.

Exercice 13. On lance deux fois un dé équilibré. On considère les évènements A "le premier numéro est pair", B "le deuxième numéro est impair" et C "la somme des deux numéros est paire".

(1) Calculer la probabilité de ces évènements.
(2) Ces évènements sont-ils indépendants 2 à 2 ? Mutuellement indépendants ?

La "bonne" définition est alors la suivante.

Définition

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et $A_1, \ldots, A_n$ un nombre fini d'événements.
On dit que $A_1, \ldots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** pour la probabilité P si pour tout sous-ensemble d'indices $I \subset [\![1, n]\!]$,

$$P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} P(A_i).$$

☞ La définition d'indépendance mutuelle est donc *plus forte* que l'indépendance "deux à deux" (qui est par conséquent une condition nécessaire mais non suffisante).

Ainsi, trois évènements A, B et C seront mutuellement indépendants les les relations (1) **et** (2) sont vérifiées.

Propriété

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et $A_1, \ldots, A_n$ des évènements mutuellement indépendants. Soit alors $(B_i)_{1\le i\le n}$ les évènements tels que $B_i = A_i$ ou bien $B_i = \overline{A}_i$. Alors, les évènements $B_1, B_2, ..., B_n$ sont encore mutuellement indépendants.

☞ On peut donc remplacer n'importe lequel des évènements d'une famille d'évènements mutuellement indépendants par son évènement contraire en conservant l'indépendance mutuelle.

Exercice 14. On lance une pièce équilibrée indéfiniment. On suppose les lancers successifs indépendants. Quelle est la probabilité, pour $n \in \mathbb{N}^*$, d'avoir n fois *Pile* consécutivement ?

2.6 Formule des probabilités totales

Le résultat qui suit est central et très utile. Parfois, calculer la probabilité d'un évènement est difficile car le cas est trop *général*. En conditionnant par les "bons" évènements, on peut alors se placer dans des cas particuliers qui rendent le calcul des probabilités possibles. Reste alors à "reformer" l'évènement de départ. C'est ce que permet cette formule qui deviendra vite l'outil préféré de tout le monde.

Propriété

Formule des probabilités totales.

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ un système complet d'évènements tous non négligeables. Alors, pour tout évènement B, on a

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B) \times P(A_i).$$

Exercice 15. On dispose de n urnes (numérotées de 1 à n) contenant des boules (indiscernables au toucher). L'urne 1 contient une boule numérotée 1. L'urne 2 contient deux boules numérotées 1 et 2. Plus généralement, l'urne k contient k boules numérotées de 1 à k.
On choisit au hasard (de manière équiprobable) une des urnes et on pioche une boule dedans. On note N_j l'évènement "la boule piochée porte le numéro i".

(1) Déterminer, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $P(N_j)$. *On exprimera le résultat sous forme d'une somme.*

(2) Vérifier que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} P(N_j) = 1$.

Remarque

Cette formule est notamment utilisée souvent pour un système complet de deux évènements A et $\overline{A}$ (non négligeables). Elle s'écrit alors

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P_A(B) \times P(A) + P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A}).$$

Exercice 16. On dispose de quatre urnes numérotées:

- $\mathcal{U}_1$ contient 4 boules blanches et 1 noire;
- $\mathcal{U}_2$ contient 3 boules blanches et 2 noires;
- $\mathcal{U}_3$ contient 2 boules blanches et 3 noires;
- $\mathcal{U}_4$ contient 1 boule blanche et 4 noires;

On choisit au hasard une urne parmi les quatre et on tire une boule à l'intérieur. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche?

2.7 Inversement du conditionnement: formule de Bayes

On peut se demander si il est possible d'"inverser" des probabilités conditionnelles. C'est à dire si, connaissant par exemple $P_B(A)$ on peut obtenir $P_A(B)$. C'est l'objet de la formule suivante, appelée *Formule de Bayes* qu'on énonce en deux temps, commençant par le cas particulier de deux évènements. Sa démonstration est facile et repose sur la formule des probabilités totales.

Propriété

Formule de Bayes.

Soit $(\Omega, P(\Omega), P)$ un espace probabilisé.

❶ *Version simple* :

Soient A et B deux événements non négligeables. On a alors :

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)} = \frac{P_A(B)P(A)}{P_A(B)P(A) + P_{\overline{A}}(B)P(\overline{A})}.$$

❷ *Version générale* :

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements tous non négligeables. Soit B un autre évènement également de probabilité non nulle.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a :

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P_{A_i}(B)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P_{A_k}(B)}.$$

Exercice 17. (Le paradoxe des maladies rares)

Vous êtes directeur de cabinet du ministre de la santé. Une maladie est présente dans la population avec la proportion d'une personne malade sur 10000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage: si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0,1%.

Que penser de ce test?

3 Probabilité sur un espace infini

Dans tout cette section, Ω est un ensemble qui peut maintenant être infini mais dont on peut *lister* les éléments $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}$.

3.1 Généralisation de la définition de probabilité

Définition

On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)$ toute application $P: \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0;1]$ telle que

(i) $P(\Omega) = 1$;

(ii) Si (A_n) est une suite d'évènements deux à deux incompatibles, alors

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un **espace probabilisé**.

Comme dans le cas des ensembles finis, on a les propriétés immédiates suivantes.

Propriété

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilité. Alors,

(i) $P(\emptyset) = 0$;

(ii) Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

(iii) Pour tous évènements disjoints A et B, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;

(iv) Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$;

(v) Pour toute collection d'évènements deux à deux disjoints $A_0, A_2, ..., A_N$,

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) = \sum_{k=0} P(A_n).$$

(vi) Les **formules du crible** restent valides:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C).$$

Remarque

La lectrice ou le lecteur aura naturellement remarqué que, si (A_n) est une suite d'évènements deux à deux distincts, alors la série $\sum_{n\geq 0} P(A_n)$ converge. En effet, c'est une série à termes positifs donc sa suite des sommes partielles est croissante et majorée par $P(\Omega) = 1$.

3.2 Limite monotone

De plus, on est également amenés à introduire la notion de croissance et décroissance pour une suite d'évènements dont la définition est vraiment très intuitive.

Définition

Une suite d'évènements (A_n) d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est dite

- **croissante** si, pour tout $n \geq 0$, on a $A_n \subset A_{n+1}$;
- **décroissante** si, pour tout $n \geq 0$, on a $A_{n+1} \subset A_n$.

Théorème

Théorème de la limite monotone.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et (A_n) une suite d'évènements. Alors,

(i) Si (A_n) est croissante, alors la suite $(P(A_n))$ est convergente et

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

(ii) Si (A_n) est décroissante, alors la suite $(P(A_n))$ est convergente et

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

Exercice 18. On lance une infinité de fois un dé équilibré. À l'aide des évènements A_n "on obtient aucun 1 lors des n premiers lancers", montrer que presque sûrement, on obtiendra au moins un 1.

On peut déduire quasiment de manière immédiate le résultat suivant à partir du théorème de la limite monotone, en constatant que, si (A_n) est une suite d'évènements quelconques, la suite $\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$ est une suite croissante d'évènements.

Corollaire

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilité et (A_n) une suite d'évènements. Alors,

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$$

et

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right).$$

3.3 Formule des probabilités totales généralisée

Définition

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements . On dit que cette suite est un **système complet d'événements** si et seulement si

$$(i) \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{si} \quad i \neq j; \qquad (ii) \quad \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \Omega.$$

☞ Il suit de la définition que, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} P(A_n)$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1.$$

Propriété

Formule des probabilités totales généralisée.

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements et si B est un évènement, alors on a

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)P_{A_n}(B).$$

Exercice 19. On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules blanches et noires:

- U_1 est composée de 3 boules blanches et 1 boule noire
- U_2 est composée de 3 boules noires et 1 boule blanche.

On lance une pièce de monnaie truquée telle que $P(''face'') = \frac{2}{3}$. On lance la pièce jusqu'à obtenir pour la première fois *Face*:

- si le nombre de lancers nécessaires à l'obtention de *Face* est impair alors on tire une boule dans l'urne U_1;
- si le nombre de lancers nécessaires à l'obtention de *Face* est pair alors on tire une boule dans l'urne U_2.

Après avoir déterminé la probabilité, pour chaque $k \geq 1$, de l'évènement A_k "l'obtention du premier *Face* a lieu au $k-$ième lancer", utiliser la formule des probabilités totales généralisée pour déterminer la probabilité d'obtenir une boule blanche.

4 Exercices - Travaux dirigés

Exercice 20. (Saut en hauteur)
Un athlète fait du saut en hauteur. On numérote les différentes hauteurs dans l'ordre. On suppose que les sauts sont indépendants entre eux et que la probabilité de réussir le saut numéro n est de $1/n$.

L'athlète effectue les sauts dans l'ordre et s'arrête au premier échec.

On introduit, pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'évènement S_k "l'athlète réussit le $k-$ième saut".

(1) Que vaut, d'après l'énoncé $P(S_k)$ (en fonction de k)?

(2) On introduit l'évènement A_n : "l'athlète réussit les n premiers sauts".
   (i) Exprimer A_n à l'aide des évènements S_k.
   (ii) Justifier que $A_{n+1} \subset A_n$.
   (iii) En déduire que, presque sûrement, l'athlète rate un saut à un moment.

On introduit maintenant, pour $k \in \mathbb{N}^*$, F_k "le premier saut raté est le $k-$ième.

(3) Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(F_k)$.

Exercice 21.

(1) On tire au hasard simultanément 5 cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 coeurs?
(2) On tire au hasard et successivement, sans remise, 5 cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 coeurs?
(3) On tire au hasard et successivement, avec remise, 5 cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 coeurs?

Exercice 22. On lance trois fois consécutives un dé équilibré à 6 faces et les résultats sont respectivement notés a, b et c. On forme alors le polynôme aléatoire $P(x) = ax^2+bx+c$. Calculer la probabilité que:

(1) P ait une seule racine réelle.
(2) P ait deux racines réelles.
(3) P n'ait aucune racine réelle.

Exercice 23. (Dés Pipés)
On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir un 6 lors d'un lancer est $\frac{1}{2}$.

(1) On lance un dé au hasard parmi les 100 dés et on obtient 6. À l'aide de la formule de Bayes, déterminer la probabilité que le dé choisi soit pipé.
(2) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On choisit un dé au hasard parmi les 100. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé?
(3) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 24. On dispose de deux urnes, $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$. La première contient deux boules blanches et quatre noires alors que la seconde contient cinq boules blanches et sept noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes:

- On choisit une urne au hasard et on tire la boule dans l'urne choisie
- On note la couleur et on remet la boule dans l'urne dont elle provient
- Si la boule tirée est blanche, on fait le tirage suivant dans l'urne $\mathcal{U}_1$, sinon dans l'autre.

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note B_n l'évènement "la boule tirée au $n-$ième tirage est blanche" et $p_n = P(B_n)$.

(1) Calculer p_1.
(2) Trouver une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
(3) En déduire la valeur de p_n en fonction de n.

Exercice 25. On dispose de deux dés (cubiques) A et B:

- Le dé A a quatre faces rouges et deux faces blanches;
- Le dé B a deux faces rouges et quatre faces blanches.

On lance une pièce de monnaie, dont la probabilité d'obtenir "pile" est $\frac{1}{3}$: si on obtient "pile", on ne joue qu'avec le dé A, sinon on ne joue qu'avec le dé B.

(1) Quelle est la probabilité d'obtenir "blanc" au troisième lancer sachant qu'on a obtenu "rouge" aux deux premiers?
(2) On a obtenu n fois "rouge" en n jets du dé. Quelle est la probabilité d'avoir joué avec le dé A?

Exercice 26. Une pièce A donne *Face* avec la probabilité $\frac{2}{5}$, une pièce B avec la probabilité $\frac{7}{10}$. On lace une des deux pièces au hasard: si on obtient *Face*, on continue avec la même pièce, sinon on en change. On effectue comme cela n lancers. On cherche à obtenir p_n la probabilité d'obtenir *Face* au $n-$ième lancer. Pour cela, on introduit a_n la probabilité de lancer la pièce A au $n-$ième coup.

(1) Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n. En déduire l'expression, en fonction de n, de a_n.
(2) Exprimer p_n en fonction de a_n. Conclure.

Exercice 27. Une boîte A contient deux jetons portant le numéro 0 et une boîte B contient deux jetons portant le numéro 1. On tire au hasard un jeton dans chaque boîte et on les échange. On recommence cette opération n fois. On s'intéresse à la somme des jetons contenus dans la boîte A à l'instant $t = n$. Pour cela, on introduit les évènements :

- P_n : " la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant $t = n$ vaut 0 ";
- Q_n : " la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant $t = n$ vaut 1 ";
- R_n : " la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant $t = n$ vaut 2 ";

On pose également $p_n = P(P_n)$, $q_n = P(Q_n)$ et $r_n = P(R_n)$.

(1) Calculer p_0, q_0, r_0, p_1, q_1, r_1.
(2) Exprimer p_{n+1} (resp. q_{n+1}, resp. r_{n+1}) en fonction de p_n, q_n, r_n
(3) Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad q_{n+2} = \dfrac{1}{2}q_{n+1} + \dfrac{1}{2}q_n$.
(4) En déduire l'expression de q_n en fonction de n puis celle de p_n et de q_n.
(5) Déterminer les limites des trois suites. Interpréter ce résultat.

Exercice 28. Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans l'urne, en notant à chaque fois la couleur. On s'intéresse aux évènements:

- A_n "les deux couleurs sont présentes à l'issue des n tirages";
- B_n "on obtient au plus une boule noire".

(1) Déterminer les probabilités, en fonction de n, des évènements A_n et B_n.
(2) Étudier leur indépendance pour $n = 2$ et $n = 3$.

Exercice 29. (Chaussettes)
On range k paires de chaussettes dans n tiroirs, au hasard. Avec quelle probabilité les paires de chaussettes se retrouvent-elles toutes dans des tiroirs différents?

Exercice 30. Dans un groupe d'étudiants, il y a n filles et n garçons. On veut faire des groupes de deux pour des exposés et ces groupes seront choisis au hasard.

(1) Combien y a-t-il de listes ordonnées de paires d'étudiants?
(2) Combien de ces listes sont formées uniquement de groupes mixtes?
(3) En déduire la probabilité p_n que tous les groupes soient mixtes.
(4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\frac{2^{2n-1}}{n} \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n}.$$

(5) Quelle est alors la limite de p_n?

Exercice 31. (Pokerface)
Une main de poker est constituée de cinq cartes, choisies parmi 32. Il y a dans le jeu 4 couleurs (Trèfle $\clubsuit$, Pique $\spadesuit$, Coeur $\heartsuit$ et Carreau $\diamondsuit$) et 8 valeurs par couleur (7,8,9,10, Valet, Dame, Roi et As). Déterminer, en fonction de leur probabilité d'apparition, l'ordre des combinaisons (de la plus "forte" à la plus "faible") parmi

- le *brelan*: 3 cartes de la même valeur et rien de mieux;
- le *carré*: 4 cartes de la même valeur;
- la quinte *flush*: 5 cartes qui se suivent et qui sont de la même couleur;
- la *couleur*: 5 cartes d'une même couleur autre que la quinte flush;
- la *suite*: 5 cartes qui se suivent mais pas de la même couleur.

Exercice 32. (Évolution du cours d'un titre)
Soit a un réel fixé, élément de $\left]0; \frac{1}{2}\right[$.
Dans une bourse de valeurs, un titre donné peut monter, rester stable, ou baisser. Dans un modèle mathématique, on considère que:

- le premier jour, le titre est stable;
- si le jour n le titre monte, alors il montera également le jour $n+1$ avec probabilité $1-2a$, restera stable avec probabilité a et baissera avec probabilité a;
- si le jour n le titre est stable, alors il restera stable le jour $n+1$ avec probabilité $1-2a$, montera avec probabilité a et baissera avec probabilité a;
- si le jour n le titre baisse, alors il baissera encore le jour $n+1$ avec probabilité $1-2a$, restera stable avec probabilité a et montera avec probabilité a.

On note M_n (resp. S_n, B_n) l'évènement "le titre donné monte le jour n" (resp. "est stable le jour n", "baisse le jour n") et m_n (resp. s_n, b_n) la probabilité correspondante.

(1) Exprimer m_{n+1} en fonction de m_n, s_n et b_n. Même question avec s_{n+1}.
(2) Que vaut $m_n + s_n + b_n$? En déduire l'expression de b_n en fonction de m_n et s_n.
(3) Montrer que les suites (m_n) et (s_n) sont arithmético-géométriques.
(4) En déduire l'expression du terme général de chacune des trois suites et déterminer leurs limites. Interpréter.

Exercice 33. (Combat de dés)
Deux joueurs A et B s'affrontent aux dés selon les règles suivantes:

- A lance en premier le dé (qui est cubique et équilibré) et annonce son résultat.
- B lance à son tour le dé, consécutivement jusqu'à obtenir un résultat supérieur ou égal à celui de A, avec un maximum de N tentatives. Si il y arrive, il gagne, sinon il perd.

(1) Quelle est la probabilité que B gagne en un coup?
(2) Quelle est la probabilité (en foncion de N) qu'il perde?
(3) Calculer la probabilité précédente pour $N = 3$.

Exercice 34. (La roue de la fortune)
Une roue de loterie se compose de secteurs identiques, numérotés de 1 à 12.

Une personne fait tourner la roue devant un repère fixe. On suppose que chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère.

À chaque partie, un joueur mise une certaine somme d'argent en choisissant un, deux ou trois numéros sur les 12; il est gagnant si le secteur qui s'arrête devant le repère porte l'un des numéros qu'il a choisis.

Un joueur possèdant un crédit illimité, effectue une suite de parties en adoptant la stratégie suivante :

- Il mise sur le chiffre 1 à la première partie.
- S'il perd à la $n^{ième}$ partie, $n \geq 1$, il mise uniquement sur les chiffres 1 et 2 à la partie suivante et s'il gagne à la $n^{ième}$ partie, il mise sur les chiffres 1, 3 et 5.

(1) On note p_n la probabilité de l'événement A_n : « le joueur gagne la $n^{ième}$ partie ».
   (a) Calculer les probabilité conditionnelles $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$, en déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6}.$$
   (b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n et déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$.

(2) Soit $k \in [\![1;n]\!]$, on note B_k l'événement : « le joueur gagne une seule fois au cours des n premières parties et ce gain a lieu à la $k^{ième}$ partie' ».
   (a) À l'aide de la formule des probabilités composées, calculer $P(B_n)$.
   (b) Soit $k \in [\![1;n-1]\!]$, calculer $P(B_k)$.
   (c) En déduire la probabilté q_n que le joueur ne gagne qu'une seule fois au cours des n premières parties.

Exercice 35. (Faux Billets)
On suppose que p est un réel fixé de $]0;1[$ qui représente la probabilité qu'un billet de 100 euros soit faux.
On dispose d'un détecteur de faux billets imparfait qui allume une lumière qui est soit bleue lorsqu'il considère que le billet testé est vrai, soit rouge lorsqu'il considère que le billet testé est faux .
On note F : " Le billet testé est faux " et B : " La lumière qui s'allume est bleue ".
On note $P(\bar{F}|B) = \alpha$ et $P(F|\bar{B}) = \beta$, et on suppose dans tout l'exercice que $\alpha + \beta > 1$.

(1) En utilisant une formule des probabilités totales pour exprimer $P(F)$, montrer que
$$P(B) = \frac{\beta - p}{\alpha + \beta - 1}.$$
En déduire que $1 - \alpha \leqslant p \leqslant \beta$.

(2) Montrer que la probabilité que le détecteur valide un faux billet est
$$P_F(B) = \frac{(1-\alpha)(\beta - p)}{p(\alpha + \beta - 1)}.$$

(3) On suppose dans cette question uniquement que $\beta = \alpha = 0,95$ et on note
$$x = \alpha + p - 1 = p - 0,05.$$
Montrer que
$$1 - P_F(B) = \frac{0,95x}{0,9(x + 0,05)}.$$

Exercice 36. Une pièce A donne *Face* avec la probabilité $2/5$, une pièce B avec la probabilité $7/10$. On lance une des deux pièces au hasard: si on obtient *Face*, on continue avec la même pièce, sinon on en change. On effectue comme cela n lancers.

(1) On cherche à obtenir p_n la probabilité de l'évènement F_n: "On obtient *Face* au $n-$ième lancer". Pour cela, on introduit a_n la probabilité de l'évènement A_n: "on lance la pièce A au $n-$ième coup".
   (a) Que valent $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$? (On justifiera soigneusement la réponse.)

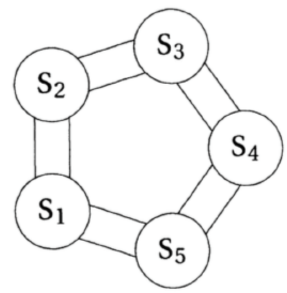
(b) Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n. En déduire l'expression, en fonction de n, de a_n.
(c) Exprimer p_n en fonction de a_n. Conclure.

(2) On introduit, pour $k \in [\![1; n]\!]$, l'évènement B_k: "on obtient *Pile* au $k-$ième lancer uniquement et *Face* à tous les autres".
(a) Déterminer $P(B_1)$ et $P(B_n)$.
(b) Déterminer ensuite $P(B_k)$ pour $k \in [\![2; n-1]\!]$.
(c) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une seule fois *PILE* au cours des n lancers?

Exercice 37. (Rencontre du deuxième type)

Deux personnes P_1 et P_2 ont rendez-vous dans un complexe formé de cinq sites S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5, disposés en pentagone et reliés par des routes, comme l'illustre le schéma ci-contre.

Ils arrivent au rendez-vous à l'heure prévue, mais suite à un malentendu, P_1 se présente au site S_1 et P_2 au site S_2.



Ils décident alors de partir à la recherche I'un de l'autre. Ils empruntent les différentes routes du complexe, avec les règles suivantes

- à partir d'un site, chacun choisit de se rendre sur l'un des deux sites voisins, les deux possibilités étant équiprobables;
- les déplacements des deux personnes se font simultanément;
- tous les choix de déplacement se font indépendamment les uns des autres.

Ils continuent à se déplacer ainsi jusqu'à se retrouver éventuellement sur un même site (ils ne se rencontrent pas le long des routes). Une fois retrouvés, ils ne se déplacent plus.

Pour tout entier naturel n, on définit les trois événements A_n, B_n, C_n:

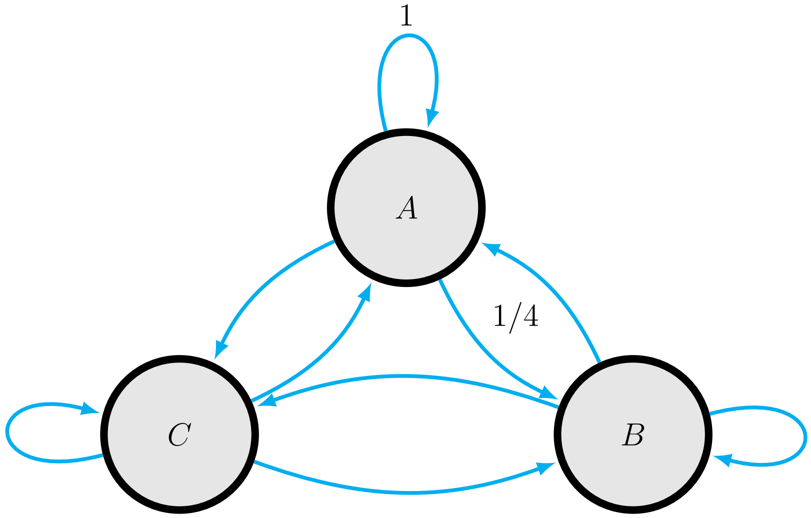
- A_n : "les deux personnes sont sur le même site après le n-ième déplacement";
- B_n : "les deux personnes sont sur des sites adjacents après le n-ième déplacement";
- C_n : "les deux personnes sont à deux routes de distance après le n-ième déplacement".

On note a_n, b_n, c_n les probabilités des événements A_n, B_n, C_n.

(1) Justifier que A_n, B_n, C_n forment un système complet d'événements.
(2) Déterminer les valeurs de a_0, b_0 et c_0.
(3) (a) Justifier soigneusement que

$$P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P_{A_n}(A_{n+1}) = 1.$$

(b) Déterminer toutes les probabilités conditionnelles analogues. On représentera les résultats en reproduisant et complétant le schéma ci-contre.



(4) Établir les relations suivantes pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} a_{n+1} &= a_n + \dfrac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} &= \dfrac{3}{4}b_n + \dfrac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} &= \dfrac{1}{4}b_n + \dfrac{1}{2}c_n \end{cases}.$$

(5) (a) Exprimer b_{n+2} à l'aide de b_{n+1}, b_n et c_n puis exprimer c_n en fonction de b_{n+1} et b_n pour obtenir enfin une relation entre b_{n+2}, b_{n+1} et b_n.

(b) En déduire une expression de b_n en fonction de n. On fera intervenir les nombres

$$\alpha = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{5+\sqrt{5}}{8}.$$

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\beta^n - \alpha^n\right).$$

(6) À partir de la somme $a_n + b_n + c_n$, déterminer la limite, lorsque n tend vers l'infini, de la suite (a_n).

(7) On note Z l'évènement "les deux personnes se rencontrent à un moment".

(a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n \subset Z.$$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \leq P(Z) \leq 1$$

(c) Quelle est la probabilité que les deux personnes ne se retrouvent jamais ?

Exercice 38. Déterminer la (ou les) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel(les) que l'application

$$P : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \longmapsto \frac{\lambda n^2(-2)^n}{n!}$$

définisse une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

Exercice 39. (Un aperçu de la loi de Poisson)
Dans une population, la probabilité qu'une famille ait n enfants est estimée par la valeur

$$p_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad \text{avec } \lambda \simeq 2.$$

(1) Vérifier que $P: \ n \mapsto p_n$ est bien une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
(2) On suppose que les sexes sont équiprobables et qu'il y a indépendance des sexes des enfants à l'intérieur d'une même famille.
  (a) Sachant qu'une famille a n enfants, qu'elle ait la probabilité que ce soit tous les garçons?
  (b) Calculer de la probabilité qu'une famille ait au moins une fille.

Exercice 40. On effectue une suite (infinie) de lancers indépendants d'une pièce équilibrée et l'on désigne par p_n la probabilité de ne pas avoir obtenu trois *Pile* consécutifs lors des n premiers lancers (et A_n l'évènement correspondant).
(1) Calculer p_1, p_2 et p_3.
(2) On introduit les évènements F_i "on obtient *Face* au $i-$ème lancer".
  (a) Que peut-on dire de l'ensemble composé des évènements F_1, $\overline{F}_1 \cap F_2$, $\overline{F}_1 \cap \overline{F}_2 \cap F_3$ et $\overline{F}_1 \cap \overline{F}_2 \cap \overline{F}_3$?
  (b) En déduire, pour $n \geq 4$, une expression de p_n en fonction de p_{n-1}, p_{n-2} et p_{n-3}.
(3) Déterminer la limite de p_n, lorsque $n \to +\infty$ (on pourra commencer par montrer que la suite (p_n) converge en montrant par exemple que la suite (A_n) est décroissante).

Exercice 41. Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire une boule dans l'urne, on note sa couleur puis, on la remet dans l'urne en rajoutant deux boules de la même couleur, et on répète l'opération jusqu'à ce que mort s'en suive.
(1) Quelle est la probabilité de A_n "les n premières boules tirées sont rouges"? (On pourra utiliser la formule des probabilités composées).
(2) Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges? (On pourra commencer par montrer que, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) < x$, puis considérer $\ln(P(A_n))$).
(3) Le résultat reste-t-il vrai si, au lieu d'ajouter deux boules, on en ajoute trois de la même couleur?

Exercice 42. (Guillaume Tell)
On lance (indéfiniment) des fléchettes sur une cible. À chaque tir, la probabilité de toucher le centre de la cible vaut $p \in]0;1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note A_n l'évènement "on touche consécutivement deux fois le centre de la cible pour la première fois avec le $n-$ième lancer". On note $a_n = P(A_n)$.

(1) Déterminer a_1, a_2 et a_3.
(2) À l'aide d'un système complet d'évènements représentant les premiers lancers, et une formule du cours que l'on nommera, montrer que

$$(\star) \qquad a_{n+2} = (1-p)a_{n+1} + p(1-p)a_n.$$

(3) On note A l'évènement "on touche deux fois de suite le centre de la cible" et $S = P(A)$.
  (a) Exprimer A à l'aide des A_n.
  (b) Exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+2}$ en fonction de S, a_1 et a_2.
  (c) En sommant l'égalité $(\star)$ entre 1 et $+\infty$, montrer que $S = 1$.
  (d) Que peut-on en conclure?

Exercice 43. On considère une suite d'évènements (A_n) supposés mutuellement indépendants. Après avoir montré que, pour tout x réel, $1 - x \leq e^{-x}$, montrer que la probabilité qu'aucun des A_n ne soit réalisé est inférieure ou égale à

$$\exp\left(-\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)\right).$$

Exercice 44. Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et (A_n) une suite d'évènements mutuellement indépendants.

(1) Montrer que

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} P(\overline{A}_n).$$

(2) On suppose que $P(A_n) \neq 1$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:

$$(i)\ P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (ii)\ \sum \ln\left(P\left(\overline{A}_n\right)\right) \text{ diverge}$$

Exercice 45. (Super Mario)

Un jeu vidéo à base de plombier et de champignons comporte N niveaux. Chaque niveau est de plus en plus difficile, la probabilité, à chaque tentative, de terminer l niveau k est de $1/(k+1)$.

© Nintendo

Une fois qu'un niveau est réussi, on n'a plus besoin de le refaire et chaque nouvelle tentative part du niveau suivant. Une personne s'achète le jeu et décide de n'y consacrer qu'une seule partie par jour. Chaque nouvelle partie est indépendantes des autres.
On introduit, pour $k \in [\![1; N]\!]$ et $n \geq 1$ les évènements A_n^k "on réussit le niveau k le $n-$ième jour" et S_n^k "la première réussite du niveau k se produit le $n-$ième jour" et S "on finit par terminer le jeu".

(1) *Cas* $N = 2$.
   (a) Exprimer S_n^1 à l'aide des évènement A_j^1. En déduire, pour tout $n \geq 1$, $P(S_n^1)$.
   (b) Décrire l'évènement $S_3^1 \cap S_7^2$ puis calculer sa probabilité.
   (c) Plus généralement, calculer, pour tous entiers $i \geq 1$ et $j \geq 2$ (en distinguant les cas $j \leq i$ et $j > i$) la probabilité

$$P(S_i^1 \cap S_j^2).$$

   (d) À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que, pour tout entier $j \geq 2$

$$P(S_j^2) = \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}.$$

   (e) Exprimer S à l'aide des évènements S_n^2. En déduire qu'on finit presque sûrement le jeu.

(2) *Cas* $N = 3$. *Attention, calculs très lourds.*
   (a) Montrer que, pour tous entiers $j \geq 2$ et $k > j$, on a

$$P(S_j^2 \cap S_k^3) = \frac{1}{4} P(S_j^2) \left(\frac{3}{4}\right)^{k-j-1}.$$

   (b) En s'inspirant de la partie précédente, en déduire que

$$P(S) = \frac{1}{4} \sum_{k=3}^{+\infty} \sum_{j=2}^{k-1} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-j-1} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}\right]$$

   (c) Conclure.