Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Chapitre 7. Éléments de calcul matriciel. Applications.

Ce Chapitre introduit la notion de matrice ainsi que les règles de calcul matriciel élémentaire. On utilise également la méthode du *pivot de Gauss* (vue au Chapitre 2) pour obtenir l'inverse d'une matrice (lorsque ceci est possible).
On présente également une application aux suites numériques (voire aux probabilités) du calcul d'une puissance d'une matrice.

Dans tout le chapitre n, p, q sont des entiers naturels non nuls.

1 Vocabulaire et Notations

Définition

Une **matrice** A à n lignes et p colonnes est un tableau défini par $n \times p$ éléments de $\mathbb{R}$ notés $a_{i,j}$ (pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$).

- Le nombre $a_{i,j}$ est le **coefficient** d'indice (i, j) de la matrice A: il se trouve à l'intersection de la $i-$ème ligne et de la $j-$ème colonne.
- La matrice A est parfois dite de **taille** ou de *format* (n, p) ou tout simplement *matrice* $n \times p$.
- L'ensemble des matrices de taille (n, p) à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et on note $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \phantom{a_{1,1}} & \phantom{a_{1,2}} & & j\text{-ème colonne} & & \\ & & & \downarrow & & \end{array} \\ i\text{-ème ligne} \rightarrow & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \end{array}$$

Exercice 1.

(1) À quels ensembles appartiennent les matrices suivantes ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & e \\ \pi & \sqrt{2} & 0{,}2 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = (3)$$

(2) Écrire sous forme de tableau la matrice $M = (i-j)_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 4}}$ et $N = ((-1)^{i+j})_{1 \leq i,j \leq 4}$.

Notation

On adopte le vocabulaire suivant :

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des **matrices carrées** de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$.
$\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des **matrices lignes** de taille p à coefficients dans $\mathbb{R}$.
$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des **matrices colonnes** de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Définition

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

- A est dite **matrice triangulaire supérieure** si $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i > j \implies a_{ij} = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

- A est dite **matrice triangulaire inférieure** si $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i < j \implies a_{ij} = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

- A est dite **matrice diagonale** si $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i \neq j \implies a_{ij} = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

- $A = (a_{i,j})$ est dite **matrice symétrique** si $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{j,i} = a_{i,j}$.

Remarque

Une matrice diagonale est également triangulaire (inférieure et supérieure) et symétrique.

Exemple

Certaines matrices jouent des rôles importants.

- $0_{n,p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la **matrice nulle**, dont tous les coefficients valent 0. On la note aussi 0.
- $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la **matrice identité** : diagonale, de taille n, dont les coefficients diagonaux valent 1 (elle est parfois simplement notée I_n).

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces deux matrices sont diagonales.

Exercice 2. Donner, dans chaque cas, un exemple de matrice 3×3: triangulaire supérieure, triangulaire inférieure, diagonale et symétrique (on choisira naturellement des matrices différentes de l'identité).

2 Opérations de base sur les matrices

2.1 Somme de matrices - Multiplication par un réel

Définition

On définit les opérations suivantes sur l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

- **Addition**: Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors, on définit la matrice somme par $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- **Multiplication par un réel**: Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On définit le produit de A avec λ par $\lambda\, A = (\lambda a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

À retenir!

Si l'on peut multiplier une matrice de toute taille par un réel, on ne peut **additionner** deux matrices que si elles ont **la même taille.**

Remarque

Les deux opérations ci-dessous permettent donc de faire des **combinaisons linéaires** de matrices (de même taille).

La somme (lorsqu'elle est définie) est commutative : $A + B = B + A$.
Comme on va le voir plus bas, le produit ne respecte pas cette propriété.

Exercice 3. À partir des matrices de l'Exercice 1, calculer $E + D$, $3B$ et $A - 3I_3$.

2.2 Produits de matrices

Attention!

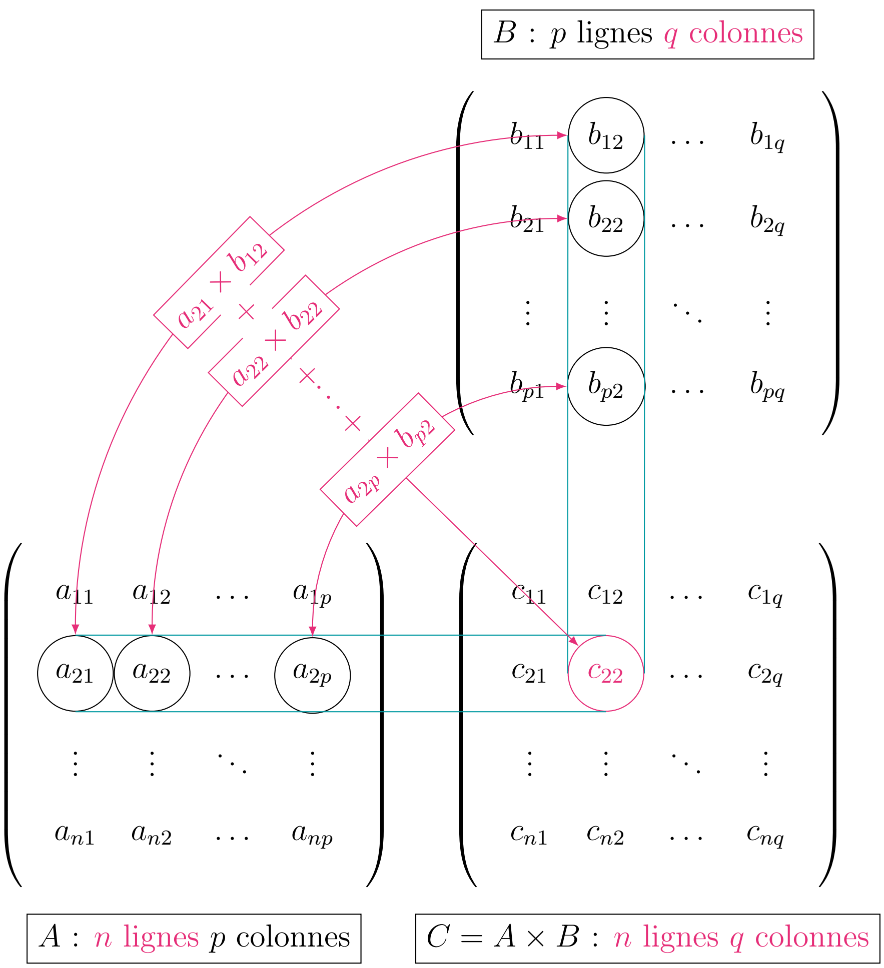
☠ Le produit de matrices n'est pas la matrice dont les coeffcients sont les produits terme à terme des coefficients des matrices !

Définition

On définit le **produit** d'une matrice A de n lignes et p colonnes avec une matrice B de p lignes et q colonnes comme la matrice de n lignes et q colonnes suivante:

$$\forall A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \forall B = (b_{k,j})_{\substack{1\leq k\leq p\\ 1\leq j\leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}),\ AB = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R}).$$

✎ Le coefficient (i,j) du produit AB est le produit de la i-ème ligne de A avec la j-ème colonne de B. On peut disposer (**sur son brouillon**) les calculs ainsi:



Attention!

On ne peut calculer le produit AB que si le nombre de colonnes de A égale le nombre de lignes de B.

En particulier, il peut être possible de calculer le produit AB mais pas le produit BA! Si les deux matrices sont carrées de même taille, on peut calculer AB et BA mais ces deux produits ne sont (en général) pas égaux.

On dit que le produit matriciel n'est **pas commutatif**.

Remarque

Le produit d'une matrice ligne $\ell = (\ell_j) \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})$ et d'une matrice colonne $c = (c_i) \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ est (une matrice à une ligne et une colonne, identifiée à)un nombre, égal à $\ell_1 c_1 + \cdots + \ell_n c_n$.

Exercice 4. À partir des matrices de l'Exercice 1, calculer les produits : ED, DE, $A{\cdot}I_3$, AC, $0_{2,3}A$, EB et BE.

Règle(s) de calcul

Propriétés du produit.

Le produit matriciel

(i) est associatif:
$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}),\ \forall C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R}),\ (AB)C = A(BC).$$
(ii) est distributif à gauche par rapport à $+$:
$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \forall B, C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}),\ A(B+C) = AB + AC.$$
(iii) est distributif à droite par rapport à $+$:
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \forall C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}),\ (A+B)C = AC + BC.$$
(iv) commute avec le produit externe:
$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}),\ (\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B).$$
(v) admet la matrice identité comme élément neutre:
$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ AI_p = A \quad \text{et} \quad I_n A = A.$$
(vi) n'est pas commutatif.

(vii) ne vérifie pas la propriété du produit nul (**on peut avoir deux matrices non nulles dont le produit est nul**).

À retenir!

Les multiples de l'identité commutent avec toutes les autres matrices:
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda I_n \cdot A = A \cdot \lambda I_n.$$

2.3 Puissances de matrice

Comme on le verra dans une section qui va suivre, calculer les puissances d'une matrice peut avoir de nombreuses et importantes applications. Comme on se doute, il ne s'agit sûrement pas d'élever à la puissance chacun des termes de la matrice en question...

Définition

Soient $k \in \mathbb{N}$ et A une matrice **carrée** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle **puissance** k-ième de A, et on note A^k, la matrice
$$A^0 = I_n \quad \text{et} \quad A^k = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}.$$

Exemple

Considérons la matrice 2×2
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Les règles du produit matriciel introduites ci-avant donnent immédiatement
$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0^2 & 1^2 \\ 1^2 & 0^2 \end{pmatrix}.$$
☠ On n'écrira donc jamais ce type d'horreur, qui témoignerait d'un manque total de compréhension du produit matriciel. Calculer les puissances d'une matrice (pour un entier n quelconque) est donc une question technique et pas si facile que ça.

Exercice 5. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer J^2 et J^3.
(2) Émettre une conjecture pour l'expression de J^k (pour $k \in \mathbb{N}^*$). Démontrer cette conjecture par récurrence.

Il existe cependant des situations où c'est facile. Mais c'est très limité.

Remarque

Toute puissance de la matrice identité est encore égale à l'identité:
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \quad I_n^k = I_n.$$

Il est également immédiat de voir que la puissance d'un multiple de l'identité (ou plus généralement d'une matrice diagonale) se calcule très facilement.

Propriété

Puissance d'une matrice diagonale.

Soit M une matrice (carrée) diagonale. Alors, M^k est encore diagonale, et ses éléments diagonaux sont les puissances $k-$ièmes des éléments diagonaux de M:
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$
C'est le seul cas de matrice où on peut calculer les puissances facilement.

Exemple

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \qquad (\lambda I_n)^k = \lambda^k I_n.$$

Attention!

On a déjà mentionné que le produit matriciel ne conservait pas la propriété du produit nul. Ce n'est donc pas parce qu'une matrice admet une puissance nulle que cette matrice est nulle...
En effet, en considérant

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

on observe que $N^3 = 0$. Pourtant N (et N^2 non plus) n'est pas nulle. Ce type de matrice s'appelle une matrice *nilpotente*.

Exercice 6. Calculer, si possible,

(1) A^2 **pour** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) A^2, A^3 , B^2, AB, BA, $A+B$, $(A+B)^2$, $A^2+2AB+B^2$ **pour**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(3) M^0, M^1, M^2, M^3, M^4, M^{100} **pour**

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Propriété

Soient $k, l, n \in \mathbb{N}$ et $A, B \in \mathcal{M}_p(R)$.

(1) $A^k A^l = A^{k+l}$.
(2) $(A^k)^l = A^{kl}$.

(3) **Lorsque** A **et** B **commutent**, on a :
- (i) $(AB)^k = A^k B^k$;
- (ii) $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$;
- (iii) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;
- (iv) $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$;

☞ Toutes les puissances d'une matrice carrée A commutent entre elles.

Les *identités remarquables* ci-dessus se généralisent par la très très utile formule ci-dessous, déjà rencontrée en version numérique dans le Chapitre 5.

Propriété

Formule du binôme.

Soient A et B deux matrices carrées qui **commutent**. Alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i B^{n-i}.$$

Exercice 7. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = A - 2I$.

(1) Expliciter N et calculer N^2 puis N^3. En déduire, pour $k \geq 3$ l'expression e N^k.
(2) Donner une expression, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de A^n en fonction de n de I, de N et N^2.
(3) En déduire le tableau matriciel explicite de A^n.

2.4 Polynômes de matrices

Définition

Soient $P: x \mapsto= a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ une fonction polyniale et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On définit l'évaluation de P en A comme la matrice

$$P(A) = a_n A^n + ... + a_1 A + a_0 I_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}).$$

Lorsque $P(A) = 0_p$, on dit que P est un **polynôme annulateur** de A.

☞ On peut utiliser les propriétés des polynômes pour obtenir des informations sur les matrices (*inverse*, puissances). L'exercice suivant est un exemple très intéressant.
De plus, comme on le verra dans le cours de deuxième année, disposer d'un polynôme annulateur d'une matrice carrée peut être très utile dans le recherche des *valeurs propres* de celle-ci.

Exercice 8. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P: x \mapsto x^2 - 3x + 2$.

(1) Calculer $P(A)$.
(2) Soit $n \geq 3$. Effectuer la division euclidienne de X^n par P.
(3) En déduire l'expression de A^n.

2.5 Application: Puissances de matrices & suites numériques

On propose ici un exemple d'application du calcul des puissances d'une matrice carrée pour l'obtention des termes généraux de trois suites *croisées*.

Exercice 9. Soient (a_n), (b_n) et (c_n) trois suites réelles définies par

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_0 & = & 1 \\ b_0 & = & 2 \\ c_0 & = & 7 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 3a_n + b_n \\ b_{n+1} & = & 3b_n + c_n \\ c_{n+1} & = & 3c_n \end{array}\right.$$

L'objectif de l'exercice est d'obtenir l'expression des termes généraux des trois suites.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
(2) En déduire que $X_n = A^n X_0$.
(3) Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^2, N^3, puis N^p, pour $p \geq 3$.
(4) Montrer que, pour tout $n \geq 0$,

$$A^n = 3^n I_3 + 3^{n-1} n N + 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} N^2.$$

(5) Conclure.

3 Inverse d'une matrice

On sait que, pour tout nombre non nul $x \in \mathbb{R}^*$, il existe un *inverse* à ce nombre, que l'on note $1/x$ ou x^{-1} tel que $x \times x^{-1} = 1$.
Cette propriété n'est plus vérifiée par toute matrice matrice non nulle. Seulement certaines matrices vont avoir cette propriété.

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On dit que A est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n.$$

Auquel cas, la matrice B est unique. On l'appelle l'**inverse** de A et on la note A^{-1}.

L'ensemble des matrices carrées de taille n inversibles est souvent noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exemple

Naturellement, la matrice identité est inversible et elle est sa propre matrice inverse

$$I_n I_n = I_n \Longrightarrow I_n^{-1} = I_n.$$

En revanche, la matrice nulle n'est pas inversible. Ce qu'on montre, par l'absurde. En effet, si 0_n était inversible, il existerait une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $0_n \cdot B = I_n$. Or, on le sait bien, $0_n \cdot B = 0_n$, ce qui donne la contradiction voulue.

Exercice 10. (Obtention de quelques inverses)

(1) Vérifier que $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) Soit $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer K^2. En déduire que K est inversible ainsi que la valeur de K^{-1}.

(3) Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $M^2 + M$ et déduire que M n'est pas inversible.

Propriété

Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (c'est à dire qu'on suppose A et B toutes deux inversibles).

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$;
(2) AB est encore une matrice inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Propriété

Inverse d'une matrice diagonale.

Si M est diagonale alors elle est inversible si et seulement si **tous** ses éléments diagonaux sont non nuls.
Son inverse est alors égale à la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les inverses des éléments diagonaux de M:

$$\textbf{Si (et seulement si) } \lambda_i \neq 0, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1/\lambda_n \end{pmatrix}.$$

Remarque

Pour des matrices inversibles, les propriétés de calcul des puissances sont valables pour des puissances négatives.

Attention!

☠ La somme de deux matrices inversibles n'est pas inversible en général. Par exemple I_n et $-I_n$ sont inversibles mais $I_n - I_n = 0_n$ ne l'est pas.

En calcul matriciel, lorsqu'une matrice est inversible cela permet d'obtenir de nouvelles règles de calcul. On peut "simplifier" par cette matrice dans les égalités, comme on le fait dans $\mathbb{R}$ à l'aide de la division. Cependant il ne faut pas oublier de tenir compte de la **non commutativité** des matrices.

Propriété

Soient $C \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$, et A et B des matrices telles que les produits suivants aient un sens.

Simplification à gauche: $CA = B \iff A = C^{-1}B$
$CA = CB \iff A = B$

Simplification à droite: $AC = B \iff A = BC^{-1}$
$AC = BC \iff A = B$

Propriété

Matrice inversible et équation matricielle.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, on a équivalence

(i) A est inversible
(ii) $\forall\ Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'équation matricielle $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ admet une unique solution.

Auquel cas, on a
$$X = A^{-1}Y.$$

3.1 Polynôme annulateur et inverse

Soit A une matrice carrée de taille n. La connaissance d'un polynôme annulateur de A, **si le coefficient constant de ce dernier est non nul**, peut permettre de conclure, par **factorisation** par A, à l'inversibilité de A et d'exprimer l'inverse comme polynôme de A.

Exemple

On considère la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier (exercice) que $P: x \mapsto x^2 + x - 2$ est un polynôme annulateur de A. Mais alors,

$$P(A) = 0 \iff A^2 + A - 2I_3 = 0 \iff A^2 + A = 2I_3 \iff A\left(\frac{1}{2}(A + I_3)\right) = I_3.$$

Or, on sait que A commute avec tout polynôme évalué en A. On a donc trouvé, sans trop d'efforts, l'inverse de A:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.2 Cas particulier des matrices 2×2

Le résultat donné dans cette sous-section ne peut être appliqué que pour des matrices 2×2. En tout cas en ce qui nous concerne. On deviendra convaincu de son efficacité dans un chapitre du cours de deuxième année sur les fonctions de deux variables.

Propriété

Caractérisation de l'inversibilité pour une matrice 2×2.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors,

$$A \text{ est inversible } \iff ad - bc \neq 0.$$

3.3 Pivot de Gauss et inverse d'une matrice

On l'a mentionné ci-avant, pouvoir inverser une matrice A revient à pouvoir trouver une unique solution au système $AX = Y$, ce qui revient à dire que ce système est de Cramer.
La méthode du pivot de Gauss pour la résolution de système permet alors d'obtenir plusieurs résultats.

Propriété

Soit A une matrice carrée de taille n.
Toute matrice obtenue à partir de A par des *opérations sur les lignes* (introduites dans la méthode du pivot de Gauss) a les même propriétés d'inversibilité que A.

Une première conséquence de ce résultat est le corollaire suivant qui caractérise les matrices triangulaires inversibles.

Propriété

Caractérisation de l'inversibilité des matrices triangulaires.

Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure). Alors, T est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Attention!

☠ Ce critère ne marche que si la matrice est triangulaire.
Il n'est pas question de dire qu'une matrice quelconque sans zéro sur la diagonale est inversible !
Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible (et pourtant n'a aucun zéro sur la diagonale).

☞ Si la question est uniquement de savoir si une matrice est inversible ou non, on peut donc lui faire subir un pivot de Gauss jusqu'à obtenir une matrice triangulaire qui aura les mêmes propriétés d'inversibilité que la matrice de départ et pour laquelle un critère est connu.

Exemple

La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?
On peut raisonner comme ceci. Les opérations sur les lignes préservent l'inversibilité donc

$$A \text{ inversible} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est inversible}$$

Or, cette dernière matrice est triangulaire supérieure sans zéro sur la diagonale; elle est donc inversible et il en est de même pour A.

En plus de permettre de savoir si une matrice est inversible, le pivot de Gauss permet de calculer l'inverse de la matrice.

À retenir!

Méthode du pivot simultané.

On considère une matrice A carrée de taille n ($n \in \mathbb{N}^*$) dont **on sait** qu'elle est inversible. Pour calculer A^{-1}, on applique l'algorithme du pivot de Gauss **total** sur la matrice A avec comme second membre I_n, en le prolongeant jusqu'à obtenir la matrice identité à la place de A. La matrice obtenue à la place de I_n est alors A^{-1}.

Exemple

Reprenon la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
que nous savons être inversible.
Déterminons A^{-1} à l'aide d'un Pivot de Gauss simultané. On présente les choses comme ceci:
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
On commence donc par faire, comme précédemment, $L_3 \longleftarrow 2L_3 - L1$.
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$
On fait ensuite $L_1 \longleftarrow L_1 - L_3$ et $L_2 \longleftarrow L_2 + L_3$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$
Enfin, on se ramène à des coefficients diagonaux égaux à 1
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$
On peut alors **vérifier** que
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
et conclure que
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. Inverser les matrices P et Q ci-dessous à l'aide d'un pivot de Gauss simultané.
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3.4 Calcul de puissance de A *via* calcul de $P^{-1}AP$

Dans le but de calculer les puissances d'une matrice A, on peut être amener à (essayer de) "tranformer" la matrice A en une matrice plus simple (par exemple diagonale) à l'aide d'une matrice inversible. Si la recherche de la matrice P nécessite des éléments du cours de deuxième année (voir le chapitre *Diagonalisation*), on peut, si on nous donne la bonne matrice, utiliser cette technique dès à présent.

Exercice 12. On considère les matrices On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Par la méthode du pivot de Gauss, montrer que P est inversible et préciser P^{-1}.

(2) Déterminer $D = P^{-1}AP$. Expliciter alors la matrice D^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
(3) Vérifier que $A = PDP^{-1}$.
(4) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
(5) Conclure.

4 Transposition

Définition

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. La **transposée** de A est la matrice ${}^tA = (a'_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ où

$$\forall (i,j) \in [\![1;p]\!] \times [\![1;n]\!],\ a'_{i,j} = a_{j,i}.$$

Une matrice A égale à sa transposée (c'est à dire vérifiant ${}^tA = A$) est dite **symétrique**.

À retenir!

☞ La transposition est une opération qui échange les lignes et les colonnes d'une matrice.

Exemple

Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors,

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, B est symétrique.

Exercice 13. Calculer la transposée de chacune des matrices de l'Exercice 1.

Propriété

Propriétés de la transposition.

(i) $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad {}^t({}^tA) = A$.
(ii) $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}), \quad {}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$.
(iii) La transposition respecte les combinaisons linéaires :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \qquad {}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda\, {}^tA + \mu\, {}^tB.$$

(iv) Si A est une matrice carrée inversible, alors ${}^tA$ est encore inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

5 Exercices - Travaux dirigés

Exercice 14. On considère les trois matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer AB puis AC. La matrice A est-elle inversible?
(2) Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = 0$.

Exercice 15. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, où $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.

Exercice 16. Soient les deux matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Calculer A^2 et B^2 puis conjecturer une formule pour A^n et B^n ($n \in \mathbb{N}^\star$) à démontrer par récurrence.

Exercice 17. Soient A, B deux matrices carrées de taille n telles que $AB = 0$. Montrer que si $A \neq 0$ et $B \neq 0$ alors ni A ni B ne sont inversibles.

Exercice 18. À l'aide de la formule du binôme, expliciter, pour $n \in \mathbb{N}^*$, M^n, où
$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 19. Soit A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
et $B = A - 2I$. Calculer B^2 puis montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad A^n = 2^n Id + n2^{n-1}B$.

Exercice 20. Soient a et b deux réels, avec $b \neq 0$.
On considère la matrice M et N définies par
$$M = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer des réels x et y tels que $M = xN + yI$.

(2) Calculer N^2. Conjecturer une formule pour N^k que l'on démontrera par récurrence.

(3) En déduire pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de M^n en fonction de I, de N et de n. On montrera que
$$M^n = (a-b)^n I + \frac{(a+3b)^n - (a-b)^n}{4b} N.$$

Exercice 21. Soit U la matrice
$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier que $P : \ x \mapsto x^2 - 2x - 3$ est polynôme annulateur de U.
(2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer deux réels α_n et β_n coefficients du *reste* de la division euclidienne de $x \mapsto x^n$ par P
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^n = (x^2 - 2x - 3)Q(x) + \alpha_n x + \beta_n.$$
où Q est une fonction polynomiale qu'on ne demande pas d'expliciter.
(3) En déduire l'expression de U^n.

Exercice 22. On considère la matrice A ci-dessous
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) À l'aide du pivot de Gauss, vérifier que A est inversible et calculer son inverse.
(2) Calculer $A^2 - 4A + 3I$. En déduire une nouvelle preuve que A est inversible et donner une expression de A^{-1} en fonction de A et de I.

Exercice 23. Pour chacune des matrices suivantes, préciser si elles sont inversibles et, le cas échéant, déterminer leur inverse (par la méthode du pivot de Gauss).

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&2\\0&2&3\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix},\quad \text{et}\quad D=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&1\end{pmatrix}.$$

Exercice 24. On considère les deux matrices carrées réelles suivantes

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}1&1&-1&-3\\1&1&1&-2\\0&-1&0&1\\1&1&0&-2\end{pmatrix}$$

(1) (a) Calculer K^2.
(b) En déduire que la matrice K est inversible et déterminer K^{-1}.

(2) Soient a et b deux nombres réels. On note M la matrice définie par $M=aI+bK$.
(a) Montrer que $M^2=-(a^2+b^2)I+2aM$.
(b) En déduire que, si a et b sont tous les deux non nuls, alors la matrice M est inversible, et exprimer son inverse comme combinaison linéaire de I et M.
(c) *Application :* Justifier que la matrice ci-dessous est inversible et donner son inverse

$$\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}&1&-1&-3\\1&1+\sqrt{2}&1&-2\\0&-1&\sqrt{2}&1\\1&1&0&-2+\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Exercice 25. (Equation matricielle)
L'objection de l'exercice est de résoudre une équation matricielle, c'est à dire de trouver toutes les matrices $Z\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $Z^2=A$, où A est une matrice de la forme

$$A=\begin{pmatrix}a&1-a\\1-a&a\end{pmatrix},\qquad 0<a<1.$$

Dans toute la suite, on désigne par P la matrice $P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$.

(1) Calculer P^2 puis P^4. Montrer que P est inversible et trouver sa matrice inverse.

(2) Montrer que la matrice $D_a=P^{-1}AP$ est diagonale.

(3) Soit $Y=P^{-1}ZP$.

(a) Montrer que l'équation $Z^2=A$ est équivalente à l'équation $Y^2=D_a$.

(b) On pose alors $Y=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$.

(i) Écrire le système de quatre équations *à* quatre inconnues x,y,z et t qui est équivalent à $Y^2=D_a$.
(ii) Montrer (par l'absurde) qu'aucune solution ne vérifie $x+t=0$.

(c) En déduire que l'équation $Z^2=A$ admet 0, 2 ou 4 solutions, selon que $a<1/2$, $a=1/2$ ou $a>1/2$.

(d) Donner les quatre solutions de l'équation dans le cas où $a=5/8$.

Exercice 26. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice *nilpotente*, c'est à dire pour laquelle il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

(1) Calculer $(I_n - A)(I_n + A + A^2 + ... + A^{p-1})$.
(2) En déduire que $I_n - A$ est inversible et préciser son inverse.

Exercice 27. À l'aide d'un résultat du cours sur l'inversibilité des matrices 2×2, déterminer les réels $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible, où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 28. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Justifier que A est inversible.
(2) Montrer, par récurrence qu'il existe une suite (u_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On précisera la valeur de u_0 et une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.
(3) Déterminer, par sommation, l'expression du terme général de la suite.
(4) En déduire la tableau matriciel explicite de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(5) L'expression précédente est-elle toujours correct pour $n \in \mathbb{Z}$?

5.1 Exercices d'applications

Exercice 29. (De la poule ou de l'oeuf)

(1) Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et I la matrice identité de taille 3. On pose $J = M - I$.

(a) (i) Calculer J^2 en fonction de J.
(ii) Montrer par récurrence qu'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels telle que pour tout entier naturel n on ait:

$$M^n = I + u_n J.$$

(iii) Exprimer alors u_{n+1} en fonction de u_n.
(iv) Pour tout entier n, on pose $v_n = u_n + 1/3$. Montrer que (v_n) est géométrique. En déduire u_n en fonction de n.

(b) Écrire M^n pour tout entier naturel n.

(2) Les poules pondent des oeufs que l'on classe suivant trois calibres A, B et C (petits, moyens et gros).

- Si une poule pond un oeuf de calibre A, l'oeuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, B ou C avec des probablilités respectives de $1/2$, $1/4$ et $1/4$;
- Si une poule pond un oeuf de calibre B, l'oeuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, B ou C avec des probablilités respectives de $1/4$, $1/2$ et $1/4$;
- Si une poule pond un oeuf de calibre C, l'oeuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, B ou C avec des probablilités respectives de $1/4$, $1/4$ et $1/2$;
- Pour n entier naturel non nul, on désigne par a_n, b_n et c_n les probablitités respectives pour que le nième oeuf pondu par une poule soit de calibre A, B ou C.

On pose alors $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

(a) (i) Calculer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. En déduire une matrice carrée U telle que $X_{n+1} = UX_n$ pour tout entier n.
(ii) Exprimer U en fonction de M. En déduire U^n en fonction de n.

(b) On suppose que le premier oeuf pondu par une poule est de calibre C. Déduire des question précédentes a_n, b_n et c_n en fonction de n, ainsi que leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 30. (Cadeaux de Noël aléatoires)

❄ **Partie 1.** Où l'on effectue la division d'un polynôme

(1) Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X) = X^2 - 5X + 4$.

❄ **Partie 2.** Où l'on calcule la puissance $n-$ième d'une matrice

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(2) Calculer $P(A)$.
(3) À l'aide de la division euclidienne de X^n par $P(X)$, expliciter A^n.
(4) En déduire alors que si $M = \frac{1}{10}A$, on a

$$M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \dfrac{4^n+2}{10^n} & \dfrac{4^n-1}{10^n} \\ 2\dfrac{4^n-1}{10^n} & \dfrac{2\times 4^n+1}{10^n} \end{pmatrix}$$

❄ **Partie 3.** Où l'on fait des cadeaux

Un individu manque cruellement d'originalité pour ses cadeaux de Noël. Chaque année, il offre à son père plus ou moins la même chose: une paire de chaussettes, une sélection de thé ou une bouteille de vin. La première année où il a commencé à faire des cadeaux, il a offert une paire de chaussettes. Il a remarqué ensuite la chose suivante:

- Si une certaine année il offre des chaussettes, alors il offrira l'année suivante des chaussettes, du thé ou du vin avec probabilités respectives 0.4, 0.3, 0.3;
- Si c'est du thé qu'il offre, l'année suivante, il offrira chaussettes, thé ou vin, avec probabilités 0.3, 0.4, 0.3;
- Enfin, si il offre du vin, l'année suivante ce sera toujours des chaussettes, du thé ou du vin, mais avec probabilités 0.2, 0.1, 0.7.

On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives d'offrir chaussettes, thé ou vin à Noël la $n-$ième année.

(5) Que vaut $a_n + b_n + c_n$?
(6) Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. Mêmes questions pour b_{n+1} et c_{n+1}.
(7) En déduire une expression de a_{n+1} en fonction de a_n et b_n ainsi qu'une expression de b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
(8) Vérifier que, si on introduit la matrice $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, alors $X_{n+1} = MX_n + B$, où M est la matrice de la partie précédente et $B = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix}$.
(9) Trouver une matrice $L \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $ML + B = L$.
(10) Montrer, par récurrence que $X_n = M^{n-1}(X_1 - L) + L$.
(11) En déduire l'expression des termes généraux des suites (a_n) et (b_n).
(12) Montrer qu'au bout d'un (long) moment, on a une chance sur deux d'offrir du vin.