Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Chapitre 8. Notion de continuité.

Ce chapitre présente une première notion de *régularité* des fonctions d'une variable (réelle) : la continuité, ainsi que ce que cette propriété implique sur le comportement de la fonction.
La notion de continuité (comme celle de dérivabilité que sera présentée au chapitre suivant) d'une fonction f étant une propriété *locale*, elle s'exprime toujours *autour* d'un point $x \in \mathbb{R}$. On introduit alors la notion de *voisinage* de x; il s'agit d'un (petit) intervalle ouvert autour de x.

De plus, on rappelle la définition formelle de limite précédemment introduite. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction, on dit que f admet une limite ℓ en $a \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

C'est à dire que $f(x)$ se rapproche autant qu'on veut de ℓ si x est dans un certain voisinage de a.

1 Continuité

1.1 Continuité en un point

Définition

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de x_0. On dit que f est **continue** en x_0 si f est définie en x_0 et si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Si f n'est pas continue en x_0, on dit que f est **discontinue** en x_0 ou que x_0 est un **point de discontinuité** de f.

- On dit que f est **continue à gauche** en x_0 si et seulement si f est définie en x_0 et si
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$
- On dit que f est **continue à droite** en x_0 si et seulement si f est définie en x_0 et si
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Propriété

Si f est une fonction définie sur un intervalle I et si $a \in I$ est un point qui n'est pas au bord de l'intervalle, alors

$$f \text{ continue en } a \iff f \text{ continue à droite et à gauche en } a.$$

Exercice 1.

(1) Étudier la continuité en 3 de la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}, & \text{si } x \in [0,3[\cup]3,+\infty[\\ \\ \dfrac{1}{4}, & \text{si } x = 3 \end{cases} \end{array}$$

(2) Étudier la continuité en 0 de la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x, & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}, & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array}$$

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $x_0 \in I$ et soit f définie sur $I \backslash \{x_0\}$. On dit que f est **prolongeable par continuité** en x_0 lorsque f admet une limite finie en x_0. L'application

$$\begin{array}{rcl} \tilde{f} : I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \neq x_0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) & \text{si} \quad x = x_0 \end{cases} \end{array}$$

est alors appelée le **prolongement par continuité** de f en x_0.

Remarque

- La fonction $\tilde{f}$ est évidemment continue en x_0
- Par abus de notation, la fonction $\tilde{f}$ est parfois notée f.
- On définit de même la notion de prolongement à gauche et à droite.

Exercice 2.

(1) La fonction $f : \mathbb{R}^\star \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$ est-elle prolongeable par continuité en 0?

(2) La fonction $g :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x\ln(x)$ est-elle prolongeable par continuité en 0?

(3) La fonction $h : \mathbb{R}^\star \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ est-elle prolongeable par continuité en 0?

1.2 Continuité et limite des suites

La continuité d'une fonction en un point, précédemment définie à l'aide des quantificateurs, peut se reformuler à l'aide des suites. Dire qu'on se rapproche arbitrairement de a peut se faire à l'aide d'une suite dont la limite est a. Plus précisément, on a le résultat suivant:

Théorème

Caractérisation séquentielle de la continuité.

Soit f une fonction définie au voisinage de a. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) f est continue en a;

(ii) Pour toute suite numérique (a_n) (dont les termes appartiennent au *voisinage* de a à partir d'un certain rang) qui converge vers a, on a que la suite $(f(a_n))$ converge vers $f(a)$.

À retenir!

On observera qu'il s'agit bien d'une équivalence.
Notamment, lorsqu'on étudie, comme on a pu le faire dans les chapitres précédents, une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ qu'on sait être convergente vers une limite ℓ, c'est grâce à la continuité de f sur l'intervalle où vivent les termes de la suite et la limite ℓ qu'on peut passer à la limite et écrire que ℓ satisfait l'équation de point fixe : $\ell = f(\ell)$ qui permet bien souvent de déterminer ℓ.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique (de période T) admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est constante. (*On pourra considérer, pour un $x \in \mathbb{R}$ quelconque, la suite $(x + nT)_{n\geq 0}$.*)

1.3 Continuité sur un intervalle. Opérations sur les fonctions continues

Définition

On dit qu'une fonction f est continue sur l'intervalle I si f est continue en tout point de I.

À retenir!

Si une fonction f est continue sur un intervalle I, sa courbe représentative sur I peut être tracée "sans lever le crayon".

Propriété

Continuité des fonctions usuelles.

- Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction logarithme (népérien) $x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Propriété

Opérations sur les fonctions continues.

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un point x_0, élément d'un intervalle I.

(1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f et g sont continues en x_0 (resp. sur I), alors $f+g$, $f \times g$ et λf sont continues en x_0 (resp. sur I);
(2) Si f et g sont continues en x_0 et que $g(x_0) \neq 0$ (resp. continues sur I et que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$), alors $1/g$ et f/g sont continues en x_0 (resp. sur I).
(3) Si f est continue en x_0 et que g est (définie au voisinage de et) continue en $f(x_0)$, alors, $g \circ f$ est continue en x_0.

Si f est continue sur un intervalle I et si g est continue sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est continue sur I.

Corollaire

Continuité des fonctions usuelles.

- La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $a > 0$, la fonction puissance $x \mapsto x^a$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exemple

La fonction

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+x^2) \end{array}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.
En effet, la fonction $x \mapsto 1 + x^2$ est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction usuelle $t \mapsto \ln(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, f est continue sur $\mathbb{R}$.

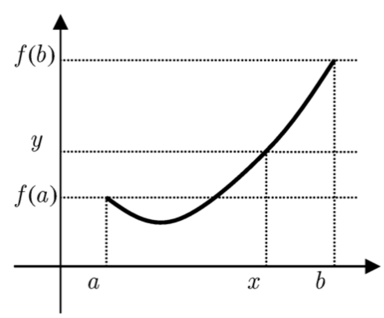
1.4 Image d'un intervalle par une fonction continue

Théorème

Théorème des valeurs intermédiaires.

Soient a et b des réels tels que $a < b$ et $f : [a; b] \to \mathbb{R}$.
Si f est continue sur l'intervalle $[a; b]$, alors pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a; b]$ tel que $f(x) = y$.

Illustration



☞ L'équation $f(x) = y$ d'inconnue x admet au moins une solution dans l'intervalle $[a; b]$.

Corollaire

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle; si f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.

Attention!

Les intervalles I et $f(I)$ ne sont pas nécessairement de même nature. Par exemple, si f est la fonction définie par $f(x) = 1/(1 + x^2)$, alors $f(\mathbb{R}) =]0; 1]$.

Propriété

(1) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Si f est continue sur $[a; b]$ telle que $f(a) \times f(b) \leqslant 0$ alors f s'annule au moins une fois sur $[a; b]$.
(2) Toute fonction polynomiale de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Montrer que l'équation $xe^x = 1$ admet (au moins) une solution dans l'intervalle $[0; 1]$.

On a vu juste au dessus que, de manière générale, la continuité ne préservait pas la nature d'un intervalle. Si cet intervalle est fermé borné, c'est par contre le cas.

Un **segment** est un intervalle fermé borné, c'est à dire un intervalle de la forme $[a;b]$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Théorème

Image d'un segment par une fonction continue.

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment; si f est continue sur un segment $[a;b]$, alors $f([a;b]) = [m;M]$ est un segment.

En particulier, une fonction continue sur un segment y est **bornée** et atteint ses bornes :

$$m = \min\{f(x) : \; x \in [a;b]\}, \quad M = \max\{f(x) : \; x \in [a;b]\}.$$

Les extrémités du segment image ne sont pas forcément les images des extrémités de $[a;b]$.

Propriété

(1) Si f est une fonction continue et croissante sur un segment $[a,b]$, alors $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$.
(2) Si f est une fonction continue et décroissante sur $[a,b]$, alors $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$.

1.5 Le théorème de la bijection

Le théorème des valeurs intermédiaires est bien pratique pour savoir qu'on a des solution à une équation de la forme $f(x) = y$ si y est dans l'intervalle image de f mais on ne sait pas combien de solutions on peut avoir (f pourrait passer plusieurs fois par y si elle change de variations). Il est un cas où en revanche on peut savoir combien de solutions admet l'équation et même arriver à les localiser : c'est quand f est strictement monotone.

Théorème

Théorème de la bijection.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application **continue** et **strictement monotone** sur I. Alors, f réalise une bijection de I sur son image $f(I)$.

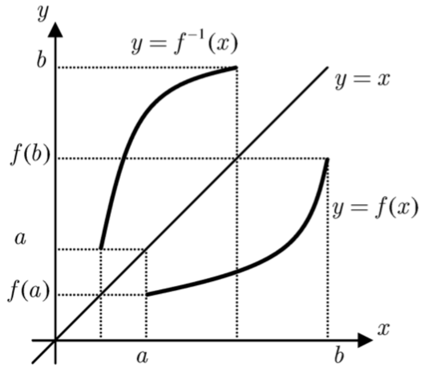
En particulier, tout élément $y \in f(I)$ admet un unique antécédent par f dans I, ou encore, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans I.

De plus,

- $f(I)$ est un intervalle, noté J
- $f^{-1} : J \to I$ est strictement monotone, de même monotonie que f.
- $f^{-1} : J \to I$ est continue de J sur I.

Exercice 5. Montrer que l'équation $x^3 + x = 3$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\mathbb{R}_+$. Montrer de plus que $1 < \alpha < 2$.

Illustration



☞ Les graphes de f et f^{-1} sont **symétriques** par rapport à la droite d'équation $\Delta : y = x$.

Exercice 6. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f(x) = \frac{2x^2}{1+x}$$

(1) Démontrez que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que vous expliciterez.
(2) Soit $g : J \to [0, +\infty[$ l'application réciproque de f. Dressez le tableau de variation de g en précisant les limites de g aux bornes de J.
(3) Étudiez la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x}$.

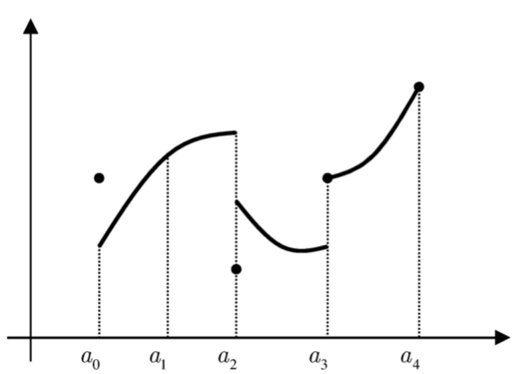
1.6 Fonctions continues par morceaux

Définition

Une fonction f est dite **continue par morceaux** sur le segment $[a; b]$ si il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_n = b$ telle que la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]a_i; a_{i+1}[$ admette un prolongement continu à l'intervalle fermé $[a_i; a_{i+1}]$. Plus précisément, si

- f est continue sur chaque $]a_i; a_{i+1}[$;
- f admet une limite à droite et à gauche (non nécessairement égales et potentiellement distinctes de la valeur de f) en chaque a_i.

Illustration



☞ Les fonctions "en escalier" (et notamment la fonction partie entière) sont des fonctions continues par morceaux.

Propriété

Soient $f, g : [a; b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, λf, $f+g$, fg et $|f|$ sont continues par morceaux.

Exercice 7. Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Montrer que f est bornée sur $[a; b]$.

1.7 Étude des suites implicites

Le théorème de bijection permet de justifier de l'existence et de l'unicité à des équations du type $f(x) = a_n$, où a_n est une quantité qui dépend d'un entier n, ou encore d'équations de la forme $f_n(x) = 0$, ou chaque fonction f_n est alors bijective. L'unique solution trouvée par le théorème dépend elle aussi de n et permet donc de définir une suite (u_n) dite implicite, où chaque terme est défini comme l'unique solution d'une certaine équation mais qu'on ne sait, en général, pas expliciter.
Néanmoins, les propriétés de f_n (et de f_n^{-1}) peuvent malgré tout en permettre l'étude.

Exercice 8. On considère l'équation $(E_n) :\ \ln(x) + x = n$ et la fonction $f : x \mapsto \ln(x) + x$.

(1) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\star$ sur $\mathbb{R}$.
(2) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, (E_n) admet une unique solution x_n. Montrer alors que la suite (x_n) est strictement croissante.

(3) (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\ln(x) < x$.
  (b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $\dfrac{n}{2} \leq x_n \leq n$.
  (c) En déduire la limite de la suite (x_n).

(4) Montrer que $\dfrac{\ln(x_n)}{n} \longrightarrow 0$, $n \to +\infty$. En déduire que $\dfrac{x_n}{n} \longrightarrow 1$, $n \to +\infty$.

2 Autres exercices - travaux dirigés

Exercice 9.

(1) Discuter en fonction des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ si la fonction f suivante, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, se prolonge à $\mathbb{R}$ tout entier.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a(e^{x-1} - 1)}{x-1}, & \text{si } x < 1 \\[2ex] \dfrac{\sqrt{6x-5} - b}{x-1}, & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

(2) Soient $a, b > 0$. Étudier et déterminer, si elles existent, les limites en 0 des fonctions

$$x \mapsto \frac{x}{a}\left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor, \qquad x \mapsto \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \frac{b}{x}.$$

Exercice 10. Soit $f : [0; 1] \to [0; 1]$ une fonction continue. Montrer que f admet au moins un point fixe.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)^2 = 1$. Montrer que f est constante.

Exercice 12. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0 et vérifiant:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right).$$

Après avoir montré que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x/2^n)$, montrer que f est constante.

Exercice 13. (Une fonction continue nulle part).
On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

(1) En considérant la suite $a_n = \sqrt{2}/n$ et à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que f n'est pas continue en 0.
(2) Adapter le raisonnement pour montrer que f n'est continue en aucun point rationnel.
(3) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
  (a) Montrer que la suite $x_n = \lfloor nx \rfloor / n$ a pour limite x et que tous les termes sont rationnels.
  (b) En déduire que f n'est pas continue en x.

Exercice 14. On considère la fonction f définie sur $]-\infty; 1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}.$$

(1) Montrer que f est continue sur $]-\infty; 1[$ et préciser ses limites aux bords de ce même intervalle.
(2) (a) Étudier le signe de la quantité $\ln(1-x) + x$ et en déduire les variations de f.
  (b) Justifier alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $u_n \in [0; 1[$ tel que $f(u_n) = n$. Préciser la valeur de u_1.
(3) Montrer que la suite (u_n) converge et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

Exercice 15. Soit $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $f(0) = f(1)$.

(1) On veut montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, l'équation $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$ admet au moins une solution. Soit $n \geq 1$. On pose, pour $x \in [0; 1 - \frac{1}{n}]$, $g(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$.
  (a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$.
  (b) Conclure.
(2) *Application.* Un cycliste parcourt 20 km en une heure.
  (a) Montrer qu'il existe au moins un intervalle de temps de durée une demi-heure pendant lequel il a parcouru 10 km.
  (b) Montrer qu'il existe au moins un intervalle de temps de durée 3 min pendant lequel il a parcouru 1 km.

Exercice 16. On considère, pour $n \geq 3$, l'équation

$$(E_n) \qquad x^n + x^2 + 2x - 1 = 0.$$

(1) On introduit la fonction $f_n : \ x \mapsto x^2 + x^2 + 2x - 1$. Montrer que f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ dans un intervalle J à déterminer. Quelles sont les variations de f^{-1}?
(2) Montrer alors que (E_n) possède une unique solution strictement positive, que l'on notera x_n. Montrer de plus que, pour tout $n \geq 3$,

$$0 < x_n < \frac{1}{2}.$$

(3) Montrer que (x_n) est croissante.
(4) En conclure que (x_n) converge vers un réel ℓ dont on donnera un encadrement.
(5) En utilisant un encadrement de x_n, montrer que x_n^n tend vers 0, si n tend vers $+\infty$.
(6) Conclure quant à la valeur de ℓ.

Exercice 17. On désigne par n un entier naturel non nul et a un réel strictement positif. On se propose d'étudier les racines de l'équation :

$$(E_n) \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \ldots + \frac{1}{x+2n} = a$$

À cet effet, on introduit la fonction f_n définie pour tout $x > 0$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \cdots + \frac{1}{x+2n} - a = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{x+k} - a.$$

(1) **Étude d'un cas particulier.** Pour cette question seulement, on prend $a = \dfrac{11}{6}$ et $n = 1$.
   (a) Expliciter f_1 et dresser son tableau de variations.
   (b) Calculer $f_1(1)$, puis déterminer les racines de (E_1), après avoir écrit l'expression de f_1 sous la forme d'une fraction dont on aura factorisé le dénominateur.

(2) **Dénombrement des racines de (E_n).**
   (a) Dresser le tableau de variations de f_n.
   (b) Justifier l'existence de racines de l'équation (E_n) et en déterminer le nombre.

(3) **La plus grande des racines.** On note x_n la plus grande des racines de (E_n).
   (a) Justifier que $x_n > 0$.
   (b) Démontrer que pour tout réel $x > 1$

$$\frac{1}{x} < \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) < \frac{1}{x-1}.$$

   (c) À l'aide de la question précédente, montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$f_n(x) - \frac{1}{x} + a < \ln\left(1 + \frac{2n}{x}\right) < f_n(x) - \frac{1}{x+2n} + a$$

   puis, que

$$a - \frac{1}{x_n} < \ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right) < a - \frac{1}{x_n + 2n}.$$

   (d) En utilisant l'inégalité de droite, montrer que pour tout n entier naturel non nul, on a

$$x_n > \frac{2n}{\exp a - 1}.$$

   (e) Quelle est la limite de x_n, puis la limite de $\ln\left(1 + \dfrac{2n}{x_n}\right)$, lorsque n tend vers $+\infty$?
   (f) En déduire que le quotient de x_n par $\dfrac{2n}{e^a - 1}$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 18. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par

$$f_n(x) = x - n\ln(x).$$

(1) **Étude de f_n.**
   (a) Étudier f_n et dresser son tableau de variations.
   (b) Montrer qu'il existe deux réels u_n et v_n, seules solutions de $f_n(x) = 0$, et tels que

$$0 < u_n < n < v_n.$$

(2) **Étude de $(u_n)_{n \geq 3}$.**
   (a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, $1 < u_n < e$.
   (b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$ et en déduire que (u_n) est décroissante.
   (c) Justifier que (u_n) converge et, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, déterminer sa limite.

(d) Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n-1} = 1, \quad \text{puis que} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n-1}{1/n} = 1.$$

(3) **Étude de** $(v_n)_{n\geq 3}$.
(a) Déterminer la limite de (v_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
(b) Calculer $f_n(n\ln(n))$. En déduire que, pour tout $n \geq 3$, $n\ln(n) < v_n$.
(c) On introduit la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $g(x) = x - 2\ln(x)$. Étudier g et donner son signe. En déduire que, pour tout entier $n \geq 3$, $2\ln(n) < n$.
(d) En déduire le signe de $f_n(2n\ln(n))$ puis établir que, pour tout $n \geq 3$, $v_n < 2n\ln(n)$.
(e) À l'aide des questions précédentes, montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(v_n)}{\ln(n)} = 1.$$

Exercice 19. (Principe de dichotomie)
Le but de cet exercice est de présenter une méthode itérative pour trouver une valeur approchée d'une équation du type $f(x) = 0$ sur un intervalle $[a,b]$ où l'on sait que la fonction f est continue, strictement monotone et que $f(a)f(b) < 0$.

(1) Justifier qu'en effet $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]a,b[$.

On construit alors trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) selon le procédé suivant:
$$\begin{cases} a_0 &= a \\ b_0 &= b \\ c_0 &= \dfrac{a+b}{2} \end{cases}$$
Puis, supposant a_n, b_n et c_n construits, on définit les termes successifs de la manière suivante:

- Si $f(a_n)f(c_n) = 0$, alors $\alpha = c_n$;
- Si $f(a_n)f(c_n) < 0$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$;
- Si $f(a_n)f(c_n) > 0$, alors $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

Enfin, on pose dans tous les cas $c_{n+1} = \dfrac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2}$.

(2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$.
(3) Montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
(4) En déduire que (a_n), (b_n) et (c_n) convergent vers une même limite ℓ.
(5) Montrer que la suite $(f(a_n)f(b_n))$ converge et préciser le signe de sa limite. En déduire que $\ell = \alpha$.
(6) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|c_n - \alpha| \leq \dfrac{b-a}{2^n}$.
(7) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Combien d'itérations du processus doit-on faire pour obtenir une valeur approchée de α à ε près ?