Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Chapitre 9. Notion de dérivabilité.

Ce second chapitre sur la *régularité* des fonctions d'une variable (réelle) présente la notion de dérivabilité d'une fonction en un point.

Considérant un intervalle I et un point a de I, on dira que a est à l'*intérieur* de I s'il existe un *voisinage ouvert* e a inclus dans I, c'est à dire s'il existe $\eta > 0$ tel que $]a-\eta; a+\eta[\subset I$.

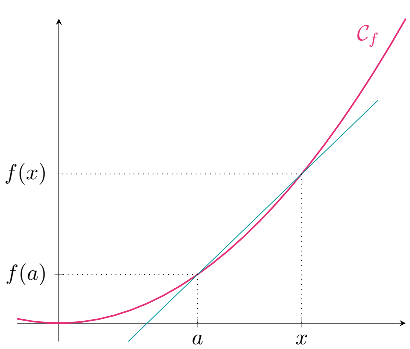
1 Nombre dérivé

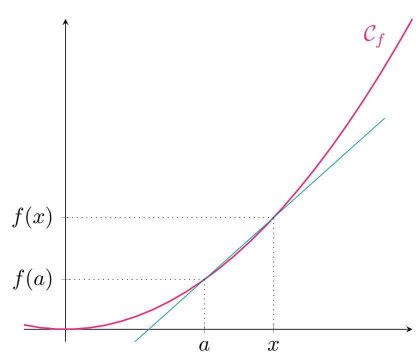
1.1 Nombre dérivé & taux d'accroissement

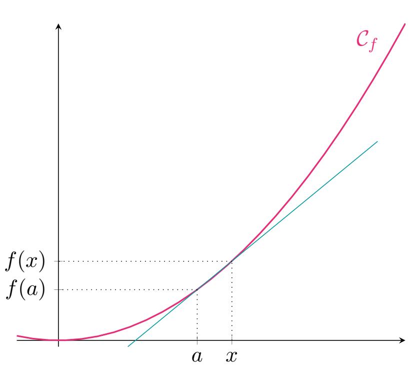
Définition

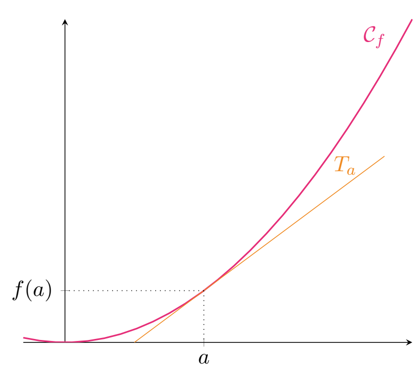
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$. La fonction f est dite **dérivable en** a si et seulement le **taux d'accroissement** de f en a admet une limite finie en a. Dans ce cas, cette limite est appelée le nombre dérivé de f en a et est notée $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$









À retenir!

Dérivable implique continue.

En notant τ_a le taux d'accroissement de f en a, on peut écrire (pour $x \neq a$)

$$f(x) = f(a) + (x-a)\tau_a(x).$$

Il est alors immédiat que si f dérivable en a, $\tau_a(x)$ admet une limite finie lorsque $x \to a$ et donc $f(x) \to f(a)$, ce qui signifie que f est continue en a.

- f est non continue en $a \Longrightarrow f$ est non dérivable en a.
- f est dérivable en $a \Longrightarrow f$ est continue en a.

☠ La réciproque est bien évidemment fausse (voir exemple un peu plus loin) !

Exemple

(1) La fonction carrée f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.

(2) Plus généralement, la fonction carrée f est dérivable en tout réel x_0 et $f'(x_0) = 2x_0$.

(3) La fonction racine carrée g est dérivable en tout réel strictement positif x_0 et $g'(x_0) = 1$. Elle n'est pas dérivable en 0 car

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty.$$

Exercice 1. Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$. La fonction f est dite **dérivable à droite en** a (resp. **à gauche**) si et seulement le **taux d'accroissement** de f en a admet une limite finie à droite (resp. à gauche) en a. Dans ce cas, cette limite est appelée le nombre dérivé à droite (resp. à gauche) de f en a et est notée $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$) :

$$f'_d(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \qquad f'_g(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

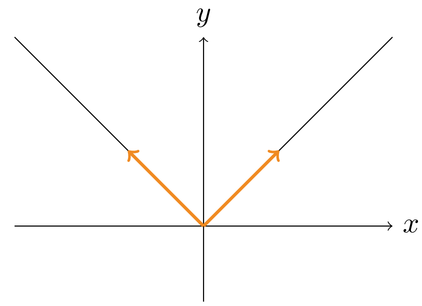
Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit a un point **à l'intérieur** de I. Alors,

$$f \text{ dérivable en } a \iff f \text{ dérivable à gauche et à droite en } a \textbf{ et } f'_g(a) = f'_d(a).$$

Exemple

La fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0 car $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$.
La courbe représentative de f présente en 0 un **point anguleux**.



1.2 Interprétation graphique

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f et T_a la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisses x_0.

Propriété

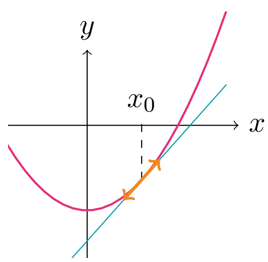
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

(1) Si f est dérivable en a, alors $f'(a)$ est le *coefficient directeur de la tangente* à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a. L'équation cartésienne réduite de cette tangente est alors :

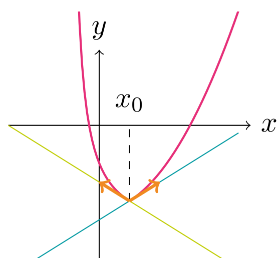
$$(T_a): \qquad y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

(2) Si f est dérivable à gauche (resp. à droite) en a, alors $f'_g(a)$ (resp. $f'_d(a)$) est le coefficient directeur de la *demi-tangente à gauche* (resp. *à droite*) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.

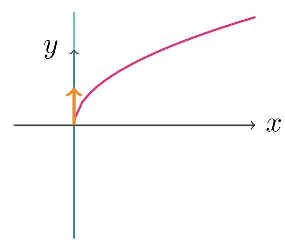
(3) Si la limite du taux d'accroissement en a est infinie, alors f n'est pas dérivable en a et la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une *tangente verticale* au point d'abscisse a.



Tangente



Demi-tangentes



Tangente verticale

2 Développement limité d'ordre 1

La notion suivante, qui peut être souvent introduite comme définition de la dérivabilité (on verra ci-dessous qu'il y a équivalence), permet des *approximations locales affines* (c'est à dire polynomiales de degré 1) de la fonction au voisinage du point où on effectue le développement. C'est un outil très (très) utile dans divers contextes, notamment dans la recherche de limites (pour des fonctions ou des suites).

2.1 Notion de quantité négligeable, notation $o(g(x))$

Définition

Soients $a \in \mathbb{R}$ et f et g deux fonctions définies au voisinage de a avec g ne s'annulant pas au voisinage de a. On dit que f est **négligeable devant** g **au voisinage de** a, ce que l'on note $f(x) \underset{x\to a}{=} o\left(g(x)\right)$ si et seulement si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

☞ Cette définition est équivalente au fait qu'il existe un intervalle ouvert J contenant a et une fonction ε définie sur J tels que

$$\begin{cases} \varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \\ \forall x \in J, \quad f(x) = g(x)\varepsilon(x) \end{cases}$$

Notation

On écrit aussi parfois
$$f(x) = o(g(x)),\ x \to a.$$

Exemple

On peut alors écrire les relations suivantes
$$(i)\ x^2 \underset{x\to 0}{=} o(x), \qquad (ii)\ \frac{1}{x} \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{x^3}\right), \qquad (x-1)^2 \underset{x\to 1}{=} o((x-1)), \qquad (iii)\ e^x - 1 \underset{x\to 0}{=} o(1).$$

À retenir!

☠ Il faut bien comprendre et garder à l'esprit que la négligeabilité en un point n'entraîne nullement la négligeablité ailleurs. Il suffit de regarder l'exemple (i) ci-dessus
$$x^2 \underset{x\to 0}{=} o(x), \quad \text{mais} \quad x^2 \underset{x\to 2}{\neq} o(x) \quad \text{et} \quad x^2 \underset{x\to +\infty}{\neq} o(x)$$

☠ On comprend l'importance de ne pas simplement écrire $f(x) = o(g(x))$ sans préciser le voisinage concerné!

Exercice 2. Déterminer d'éventuelles relations de négligeablité entre les quantités $f(x)$ et $g(x)$ en a lorsque

(1) $f(x) = x^3$, $g(x) = 1/(x-2)$ en $a = 2$;

(2) $f(x) = x^3$, $g(x) = 1/(x-2)$ en $a = 1$.

À retenir!

Dire que la fonction f admet une limite ℓ en a peut se réécrire
$$f(x) \underset{x\to a}{=} \ell + o(1).$$

À retenir!

Attention, bien que très pratique la notation $o(g(x))$ est une notation et peut donc, au sein d'un même calcul représenter plusieurs quantités différentes mais qui ont le même comportement au voisinage du point qui nous intéresse. Les règles de calculs avec les $o(\cdots)$ peuvent alors paraître déroutantes.
On réfléchira bien au sens de ce que l'on écrit.

Règle(s) de calcul

Soient f, g, h trois fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

(1) **Multiplication par une constante**. Si $\beta \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} o(\beta g(x))$.

(2) **Linéarité**. Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$, alors, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
$$\alpha f(x) + \beta g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x)).$$

(3) **Transitivité**. Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$ alors, $f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$.

(4) **Multiplication par une fonction**. Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$, alors $f(x)g(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)h(x))$.

À retenir!

☞ Le (1) de la proposition ci-dessus permet de voir qu'on peut "ignorer" les constantes dans un petit-o.
Par exemple, on écrira jamais $o(2x)$ ou $o(-x)$ mais $o(x)$.

☞ Le (4) de cette même proposition permet de voir qu'on peut "rentrer" les fonctions dans un petit-o ou bien "simplifier".
Par exemple,

$$x \cdot o(x^2) = o(x^3), \qquad \frac{o(x^2)}{x^2} = o(1).$$

☞ Le (3) peut aussi s'écrire comme (au voisinage d'un même point) $o(o(f(x))) = o(f(x))$.

☞ On garde en tête que $o(\cdots)$ est une notation qui peut désigner des quantités différentes.
Par exemple, il faut faire très attention à bien écrire (et on y réfléchira)

$$o(x) - o(x) = o(x).$$

Exercice 3. On considère, au voisinage de 0, deux quantités $f(x)$ et $g(x)$ vérifiant

$$f(x) = x^2 + o(x^2), \qquad g(x) = -x^2 + x^3 + o(x^3).$$

(1) Que dire de $f(x) + g(x)$?

(2) Écrire le plus simplement possible $g(x) - 2xf(x)$ et $f\left(\frac{x}{2}\right) - g(x)$.

2.2 Notion de développement limité

Définition

On dit que f **admet un développement limité (DL) d'ordre** 1 **au voisinage de** $a \in \mathbb{R}$ s'il existe deux réels $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que, au voisinage de a,

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 (x-a) + o(x-a), \qquad x \to a;$$

En particulier, On dit que f **admet un développement limité (DL) d'ordre** 1 **au voisinage de** 0 s'il existe $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ tels que, au voisinage de 0,

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + o(x), \qquad x \to 0.$$

☞ Une fonction admettant un DL à l'ordre 1 en a est *localement assimilable* à une fonction affine.
Le "reste", c'est à dire la différence entre la valeur de la fonction et l'approximation affine est une quantité négligeable devant l'écart entre x et a.

Théorème

Dérivabilité et DL d'ordre 1.

Soient $f: I \to \mathbb{R}$ et a un point à l'intérieur de I. Les deux proposition suivantes sont équivalentes :

(i) f est dérivable en a ;

(ii) f admet un développement limité à l'ordre 1.

Le DL est alors **unique** et, nécessairement, $\alpha_0 = f(a)$ et $\alpha_1 = f'(a)$. Autrement dit, pour x dans un voisinage de a,

$$f(x) = f(a) + f'(a)x + o(x-a), \quad x \to a.$$

Remarque

Lorsque x est suffisamment proche de a, cela signifie que la courbe représentative de f est très proche de sa tangente en a. On parle d'approximation affine :

$$\text{« } f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) \text{ ».}$$

Pour des valeurs de x suffisamment proches de a, T_a est en fait la droite la plus proche de la courbe représentative de f.

Exercice 4.

(1) Donner les développements limités à l'ordre 1 en 0 de :
$x \mapsto e^x$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, $x \mapsto \sqrt{1+x}$, $x \mapsto e^{-x}$, $x \mapsto \ln(1-x)$.

(2) Donner les développements limités à l'ordre 1 en 1 de $x \mapsto \sqrt{1+x}$, $x \mapsto \sqrt{1-x}$ et $x \mapsto \ln(x)$.

(3) En utilisant l'approximation affine pour une fonction f supposée dérivable sur $\mathbb{R}$, donner une valeur approchée de $f(3,05)$ sachant que $f(3) = 1$ et $f'(3) = 6$.

2.3 Quelques développements limités usuels en 0

Les développements limités suivants peuvent être utilisés dans bien des situations et se révèlent extrêmement utiles.

Propriété

DL usuels en 0. Au voisinage de 0, on a

$$\begin{array}{rcl} e^x & = & 1 + x + o(x) \\ \ln(1+x) & = & x + o(x) \\ \dfrac{1}{1+x} & = & 1 - x + o(x) \\ \sqrt{1+x} & = & 1 + \dfrac{x}{2} + o(x) \\ (1+x)^\alpha & = & 1 + \alpha x + o(x) \end{array}$$

Exercice 5. Déterminer la limite, lorsque $n \to +\infty$, de la suite $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 6. Soient $a, b > 0$. Déterminer

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

3 Dérivabilité sur un intervalle

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. Si f est dérivable en tout réel x de I, on dit que f est dérivable sur I. De plus la fonction

$$\begin{array}{rccc} f' : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

est appelée la **fonction dérivée** de la fonction f.

Exemple

(1) Si $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ alors $f' : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x \end{cases}$

(2) Si $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$ alors $g' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$.

3.1 Opérations sur les dérivées - Dérivées des fonctions usuelles

On rappelle très sommairement dans ce paragraphe certaines règles concernant les opérations sur les dérivées. On a choisit d'omettre ici celles concernant la dérivée d'une somme, d'un produit ou d'un quotient, qui sont déjà connues et parfaitement maîtrisées. De plus, les dérivées (et les domaines de dérivabilité) des fonctions usuelles ont été rappelées au cours du Chapitre 1.

Propriété

Dérivée d'une fonction composée.
Soit f une fonction dérivable sur I et g une fonction dérivable sur un intervalle J inclus dans $f(I)$. Alors, $g \circ f$ est dérivable sur I et on a : $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$. Autrement dit :

$$\forall x \in I, \quad (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x).$$

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors,

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u^n est dérivable sur I et sa dérivée vaut $nu'u^{n-1}$;

(2) La fonction e^u est dérivable sur I et sa dérivée vaut $u'e^u$;

(3) Si la fonction u est strictement positive sur I, alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et sa dérivée vaut $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$;

(4) Si la fonction u est strictement positive sur I, alors pour tout réel α, la fonction u^α est dérivable sur I et sa dérivée vaut $\alpha u'u^{\alpha-1}$;

(5) Si la fonction u est strictement positive sur I, alors la fonction $\ln(u)$ est dérivable sur I et sa dérivée vaut $\frac{u'}{u}$.

3.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur I, si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I.

☞ Comme pour la continuité ou la dérivabilité, le caractère $\mathcal{C}^1$ est préservé en combinant par les opérations usuelles des fonctions déjà de classe $\mathcal{C}^1$.

Propriété

Théorèmes généraux. Conservation du caractère $\mathcal{C}^1$.

(i) La somme ou le produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I est encore de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

(ii) Le quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, dont le dénominateur ne s'annule pas, est encore de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

(iii) Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans J et g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur J, alors $g \circ f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Exemple

- Toute fonction polynôme est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction logarithme népérien est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Exercice 7. Soit f la fonction définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x^2\ln(x), & \text{si} \quad x>0 \\ 0, & \text{si} \quad x=0 \end{cases} \end{array}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 8. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie par

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2+bx+1, & \text{si} \quad x>1 \end{cases} \end{array}$$

(1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que f soit continue sur $\mathbb{R}_+^\star$.

(2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$.

(3) On suppose que la condition précédente est satisfaite.

   (a) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$?

   (b) La fonction f' est-elle dérivable en 1 ?

4 Dérivation des fonctions réciproques

On a pu voir dans un chapitre précédent que le théorème de bijection permettait de montrer qu'une fonction f réalise une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$ lorsque la fonction f est continue et strictement monotone. On est donc, dans ce cas, assuré de l'existence de la fonction réciproque f^{-1}.

La proposition ci-dessous permet de justifier la dérivabilité de f^{-1} en un point b lorsque l'on sait que la fonction f est dérivable en $a = f^{-1}(b)$.

Propriété

Dérivabilité d'une fonction réciproque.
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Soient $a \in I$ et $b = f(a)$ (ou encore $a = f^{-1}(b)$). Alors,

(i) Si f est dérivable en a **et si** $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en b et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

(ii) Si f est dérivable en a et si $f'(a) = 0$ alors f^{-1} n'est pas dérivable en b et sa courbe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ possède une tangente verticale en b.

Exemple

Considérons la fonction f définie par
$$f : x \mapsto \frac{x}{x^2+x+1}.$$

— On commence par voir que f réalise une bijection de $[-1,1]$ sur $[-1;1/3]$. En effet, f est définie et dérivable sur R (comme quotient de deux polynômes dont le dénominateur ne s'annule jamais) et pour tout x réel,
$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2}.$$
Ainsi, f est strictement croissante sur $[-1;1]$. Plus précisément, on a le tableau de variations suivant :

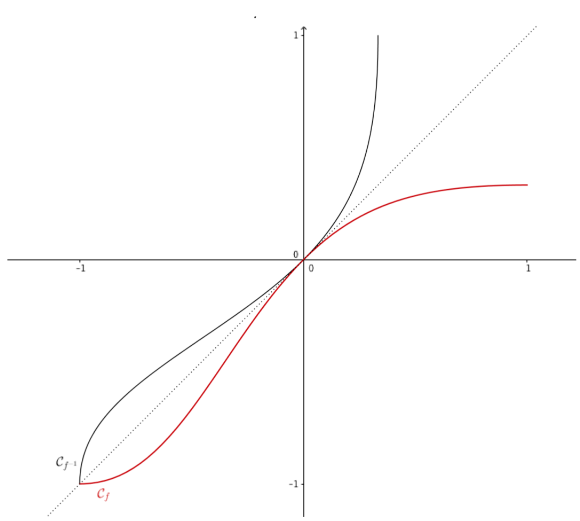
x	-1	0	1
$f'(x)$	0	$+$	0
f	-1 ↗	0 ↗	$\frac{1}{3}$

— Par le théorème de bijection, f réalise donc une bijection de $[-1;1]$ sur $[-1;1/3]$. On note g sa réciproque. Le même théorème de bijection nous permet de dresser le tableau de variations de g (qui est continue et a le même sens de monotonie que f) :

x	-1	0	$\frac{1}{3}$
g	-1 ↗	0 ↗	1

— Concernant la dérivabilité de g, il faut appliquer la proposition précédente. Plus précisément, on sait que f est dérivable sur $[-1;1]$ et que sa dérivée f' s'annule en -1 et 1. Or, $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1/3$ donc g n'est pas dérivable en -1 ni en $1/3$ mais est dérivable sur $]-1;1/3[$. En particulier, g est dérivable en 0, même si $f(0) = 0 = g(0)$ car $f'(0) = 1$, et on sait de plus que
$$g'(0) = \frac{1}{f'(g(0))} = \frac{1}{f'(0)} = 1.$$

— On fait apparaître ci-dessous les courbes représentatives de f et $f^{-1} = g$ (symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$). On constate notamment que la courbe de g admet des tangentes verticales en -1 et en $1/3$.



Exercice 9. Montrer que la fonction $f :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto -1 + e^{x-1} + \ln(x)$ est bijective. Préciser l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ au point d'abscisses 0.

Exercice 10. On considère la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^x \end{array}$$

(1) Déterminer les variations de f et ses limites à l'infini. Préciser l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0.

(2) Montrer que f induit une bijection, que l'on notera h, de $[-1; +\infty[$ sur $[-e^{-1}; +\infty[$.

(3) On note $W = h^{-1}$. Justifier que W est dérivable sur $]-e^{-1}; +\infty[$ et montrer que, pour tout $x \in]-e^{-1}; +\infty[$,

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1 + W(x))}.$$

5 Dérivation et monotonie

Une des applications de la dérivation est l'obtention des variations de la fonction par le signe de la dérivée. Ces résultats sont connus et utilisés depuis le le lycée. On en rappelle les énoncés ci-dessous.

Théorème

Dérivée et monotonie.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors,

(i) f est croissante sur $I \iff \forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0.$

(ii) f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I, \quad f'(x) \leqslant 0.$

(iii) f est constante sur $l \iff \forall x \in I, \quad f'(x) = 0.$

Attention!

Le théorème est **faux** si I n'est **pas un intervalle**.
En effet, soit par exemple f la fonction définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Alors, f est dérivable sur $]-\infty : 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $f'(x) = 0$. Pourtant f n'est pas une fonction constante. En effet, $\mathbb{R}^\star$ n'est pas un intervalle!

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

(i) Si $\forall x \in I, \quad f'(x) > 0$, alors la fonction est strictement croissante sur I.

(ii) Si $\forall x \in I, \quad f'(x) < 0$, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Remarque

La réciproque de cette proposition est fausse! Par exemple, la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais pourtant sa dérivée s'annule en 0.

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

(i) Si $\forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0$ et si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de valeurs sur I, alors la fonction est strictement croissante sur I.

(ii) Si $\forall x \in I, \quad f'(x) \leqslant 0$ et si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de valeurs sur I, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

6 Inégalité des accroissements finis (IAF pour les intimes)

L'*inégalité des accroissements finis*, que l'on énonce ci-après, dans deux versions, permet d'obtenir un contrôle "linéaire" des variations d'une fonction f entre deux points à partir de la dérivée de f entre ces deux points.

Théorème

I.A.F. version 1.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que

$$\forall x \in]a, b[, \qquad m \leq f'(x) \leq M.$$

Alors,

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$

☞ Graphiquement, cela signifie que la "pente" de la courbe entre a et b (c'est à dire le taux d'accroissement entre a et b) est minoré par le minimum de la dérivée entre a et b et majoré par son maximum.

Exercice 11. Montrer que pour tous réels a et b tels que $a < b < -1$, on a

$$0 \leqslant e^b - e^a \leqslant \frac{1}{e}(b-a).$$

Exercice 12. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Théorème

I.A.F. version 2.

Soit f une fonction dérivable sur I. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, \qquad |f'(x)| \leqslant \alpha.$$

Alors,

$$\forall x_1, x_2 \in I, \qquad |f(x_1) - f(x_2)| \leq \alpha |x_1 - x_2|.$$

Remarque

— Dans cette deuxième version du théorème, les réels x_1 et x_2 sont rangés dans un ordre quelconque, alors que dans la première version du théorème, les réels a et b vérifient $a < b$.

— Rappelons l'équivalence :

$$\forall x \in I, \qquad |f'(x)| \leq \alpha \Longleftrightarrow \forall x \in I, \quad -\alpha \leqslant f'(x) \leqslant \alpha.$$

Exercice 13. Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \ln(x+1)$. Montrer que :

$$\forall x, y \in [1, +\infty[, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|.$$

Exercice 14. Majorer l'erreur commise en faisant les approximations suivantes

$$\sqrt{10001} \simeq 100, \qquad \frac{1}{0,999^2} \simeq 1.$$

6.1 *Application.* Convergence des suites $u_{n+1} = f(u_n)$

La deuxième version de l'inégalité des accroissements finis permet parfois d'étudier la convergence de suites définies par récurrence comme dans l'exercice ci-dessous.

Exercice 15. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = u_n + \frac{1}{4}(2 - u_n^2).$$

(1) Étudier les variations de f et montrer que $f([1;2]) \subset [1;2]$.

(2) Montrer que pour tout entier n, $u_n \in [1;2]$.

(3) Montrer que si (u_n) converge vers ℓ, alors $\ell = \sqrt{2}$.

(4) Montrer que pour tout $t \in [1;2]$, $\quad |f'(t)| \leqslant \frac{1}{2}$.

(5) Montrer que pour tout entier n dans $\mathbb{N}$

$$|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|,$$

puis que :

$$|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

(6) En déduire la convergence de la suite (u_n).

(7) Déterminer un rang n tel que u_n fournisse une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près.

7 Dérivées d'ordre supérieur

Si une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle, on peut se demander si sa dérivée est elle-même dérivable, et ré-itérer le processus.

Définition

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $k \in \mathbb{N}^*$.
On définit la **dérivée d'ordre** k de f (**sous réserve d'existence**) notée $f^{(k)}$, par

$$f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'$$

avec pour convention $f^{(0)} = f$. La fonction est dite k fois dérivable sur I si toutes les dérivées successives jusqu'à l'ordre k existent et sont bien définies sur I.

Remarque

$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f''$ et $\forall h, k \in \mathbb{N} \quad \left(f^{(h)}\right)^{(k)} = f^{(h+k)} = \left(f^{(k)}\right)^{(h)}$.

☠ ☠ ☠ La notation $f^{(k)}$ n'a rien à voir avec la notion de puissance !

Exercice 16. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

(1) Calculer $f^{(k)}(x)$ pour $k \in [\![1, 4]\!]$ et $x \in \mathbb{R}^\star$.

(2) Conjecturer une formule générale pour $f^{(n)}(x)$ puis la démontrer par récurrence sur n.

7.1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ ou de classe $\mathcal{C}^\infty$

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit k dans $\mathbb{N}^\star$. On dit que f est **de classe** $\mathcal{C}^k$ sur I si et seulement si f admet une dérivée d'ordre k sur I et si $f^{(k)}$ est continue sur I.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est **de classe** $\mathcal{C}^\infty$ sur I si et seulement si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I pour tout k dans $\mathbb{N}^\star$.

Exemple

— Les fonctions polynômes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
— La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall k \in \mathbb{N}^\star, \quad \exp^{(k)} = \exp$.
— Les fonctions ln et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Propriété

Théorèmes généraux. Conservation du caractère $\mathcal{C}^k$ (ou $\mathcal{C}^\infty$).

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

(i) La somme ou le produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur un intervalle I est encore de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I.

(ii) Le quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I, dont le dénominateur ne s'annule pas, est encore de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I.

(iii) Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I à valeurs dans J et g est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur J, alors $g \circ f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I.

8 Développement limité d'ordre 2

Définition

On dit que f **admet un développement limité (DL) d'ordre** 2 **au voisinage de** a s'il existe $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que, au voisinage de a,

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 (x-a) + \alpha_2 (x-a)^2 + o\left((x-a)^2\right).$$

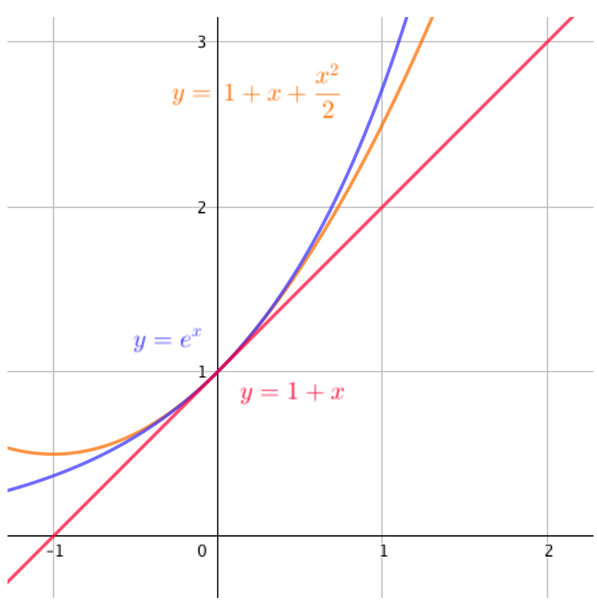
En particulier, On dit que f **admet un développement limité (DL) d'ordre** 2 **au voisinage de** 0 s'il existe $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que, au voisinage de 0,

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + o\left(x^2\right).$$

☞ De manière analogue à la remarque ci-dessus, une fonction admettant un DL à l'ordre 2 en a est *localement assimilable* à un polynôme du second degré.

Illustration

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les parties régulières des DL d'ordres 1 et 2 de la fonction exponentielle en zéro, illustrant la remarque précédente sur l'approximation locale (ici en 0).



Théorème

Formule de Taylor-Young.

(i) Soit f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et $a \in I$. Alors f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de a donné par :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o\left(x-a\right).$$

(ii) Soit f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I et $a \in I$.
Alors f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de a donné par :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o\left((x-a)^2\right).$$

Hors Programme mais...

Taylor-Young à un ordre quelconque en zéro.

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0 (où $n \in \mathbb{N}$), alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n).$$

☞ On constate (sans surprise) par exemple que la partie régulière du développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction exponentielle (qui en admet bien un - elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$) n'est rien d'autre que la somme partielle de rang n de la série exponentielle

$$e^x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

Remarque

On utilise le plus souvent **Taylor-Young** dans le cas particulier où $a = 0$ ce qui donne respectivement :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o\left(x\right) \qquad \text{et} \qquad f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o\left(x^2\right).$$

Propriété

DL usuels au voisinage de 0. On a, **au voisinage de** 0,

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + o(x^2) \\
\ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + o\left(x^2\right) \qquad (\alpha \in \mathbb{R}^*).
\end{aligned}$$

Exercice 17. Déduire du résultat précédent les DL à l'ordre 2 en 0 de $\dfrac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$ et $\sqrt{1-x}$.

Exercice 18. Montrer que la fonction f ci-dessous est (continue, dérivable et) de classe $\mathcal{C}^1$ en 0, où

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

9 Extrema Locaux

Définition

Soient f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{D}$. On dit que f admet un **maximum** (resp. **minimum**) en a si, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$). On désigne par **extremum** un maximum ou un minimum.

On dit que f admet un **extremum local** si il existe un voisinage de a sur lequel f admet un extremum en a.

Propriété

Condition nécessaire d'ordre 1.

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$. Si f est un extremum local pour f alors, $f'(a) = 0$.

☠ La réciproque n'est pas vraie, il faut ajouter une condition. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ a une dérivée qui s'annule en 0 sans pour autant que ce soit un extremum local, on verra qu'il s'agit d'un point d'*inflexion*.

Théorème

Condition suffisante d'ordre 2.

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$. Si f' s'annule en changeant de signe en a, alors f admet un extremum local en a.

Plus précisément,

(i) Si $f''(x) < 0$ au voisinage de a, alors a est un maximum local ;

(ii) Si $f''(x) > 0$ au voisinage de a, alors a est un minimum local.

10 Convexité

10.1 Convexité et concavité pour des fonctions quelconques

Définition

(1) Une fonction est dite **convexe** sur un intervalle I si

$$\forall x_1, x_2 \in I, \forall t_1, t_2 \in [0;1] \text{ tels que } t_1 + t_2 = 1,\ f(t_1x_1 + t_2x_2) \leqslant t_1f(x_1) + t_2f(x_2).$$

(2) Une fonction est dite **concave** sur un intervalle I si

$$\forall x_1, x_2 \in I, \forall t_1, t_2 \in [0;1] \text{ tels que } t_1 + t_2 = 1,\ f(t_1x_1 + t_2x_2) \geqslant t_1f(x_1) + t_2f(x_2).$$

(3) On appelle **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$, un point d'abscisse x_0 tel que f change de convexité en x_0.

Remarque

(1) Dire que f est concave sur I revient donc à dire que $-f$ est convexe sur I.

(2) Graphiquement, dire que f est convexe sur $I = [a, b]$ revient à dire que l'arc de courbe joignant les points d'abscisses a et b est en dessous de la corde, c'est à dire la droite joignant ces deux points. (C'est le contraire si f est concave.)

Exercice 19.

(1) Rappeler l'allure des courbes de exp et ln. Semblent-elles convexe(s) ? Concave(s) ?

(2) En admettant ces résultats de convexité, justifier les inégalités suivantes

(a) $e^x \leqslant (e-1)x + 1$ sur $[0, 1]$.

(b) $\ln(x) \geqslant \dfrac{x-1}{e-1}$ sur $[1, e]$.

10.2 Convexité pour les fonctions dérivables

Propriété

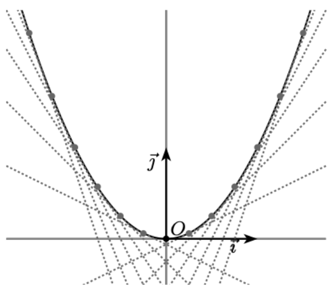
Convexité pour les fonctions dérivables.

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, de courbe $\mathcal{C}_f$.
- La fonction f est **convexe** sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
- La fonction f est **convexe** sur I si et seulement si sa courbe est située au dessus de chacune de ses tangentes.

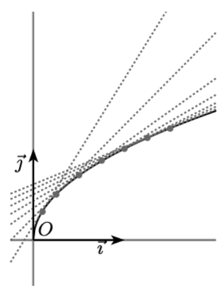
- La fonction f est **concave** sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.
- La fonction f est **concave** sur I si et seulement si sa courbe est située au dessous de chacune de ses tangentes.

- Le point A d'abscisse x_0 de la courbe $\mathcal{C}_f$ est un **point d'inflexion** si et seulement si f' change de monotonie en x_0 (donc si f' admet un extremum local en x_0).
- Le point A de la courbe $\mathcal{C}_f$ est un **point d'inflexion** si et seulement si la tangente en A traverse la courbe.

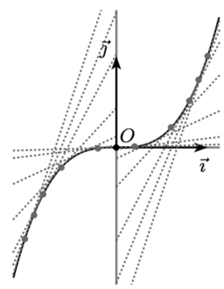
Illustration



La fonction carrée est convexe sur $\mathbb{R}$.



La fonction racine carrée est concave sur $]0; +\infty[$.



O point d'inflexion. La fonction cube est concave sur $\mathbb{R}^-$, convexe sur $\mathbb{R}^+$.

10.3 Convexité pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Comme la plupart des fonctions étudiées sont au minimum deux fois dérivables, le théorème suivant s'avère être le plus pratique de tous pour étudier la convexité des fonctions.

Propriété

Convexité pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I. Alors,

- La fonction f est convexe sur I si et seulement si $\forall x \in I, \quad f"(x) \geqslant 0$.
- La fonction f est concave sur I si et seulement si $\forall x \in I, \quad f"(x) \leqslant 0$.
- Le point d'abscisse x_0 de $\mathcal{C}_f$ est un point d'inflexion si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe.

Exemple

On peut alors énoncer des résultats de convexité sur des fonctions usuelles :
1. La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction logarithme népérien est concave sur $\mathbb{R}_+^\star$.
4. La fonction cube est concave sur $\mathbb{R}_-$ et convexe sur $\mathbb{R}_+$

Exercice 20.

(1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant x+1$.

(2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad \ln(x) \leqslant x-1$.

11 Autres exercices - Travaux dirigés

Exercice 21. Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur I. Quelles sont les fonctions qui sont $\mathcal{C}^1$ sur I ? Expliciter la dérivée de chacune de ces fonctions sur son intervalle de dérivabilité.

$$I=\mathbb{R} \text{ et } a(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+2x)}{x}, & \text{si } x\neq 0 \\ 2, & \text{si } x=0 \end{cases} \quad ; \quad I=\mathbb{R}_+ \text{ et } b(x)=\begin{cases} x^x, & \text{si } x>0 \\ 1, & \text{si } x=0 \end{cases} \quad ;$$

$$I=]-\infty,1] \text{ et } c(x)=x\sqrt{1-x}; \qquad I=[-1,1] \text{ et } d(x)=(x-1)\sqrt{1-x^2};$$

$$I=\mathbb{R}_+ \text{ et } g(x)=\begin{cases} \dfrac{x\sqrt{x}}{e^x-1}, & \text{si } x>0 \\ 0, & \text{si } x=0 \end{cases} \quad ; \quad I=\mathbb{R} \text{ et } h(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{3x}-1}{x}, & \text{si } x\neq 0 \\ 3, & \text{si } x=0 \end{cases} .$$

Exercice 22. On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\ln(1+x)}{x}, & \text{si } x\neq 0 \\ 0, & \text{si } x=0 \end{cases}$$

(1) Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,0[$ et sur $]0,+\infty[$. Expliciter sa dérivée.

(2) À l'aide de l'égalité ci-dessous, dont on admet la validité au voisinage de 0, étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 puis, en déduire que f est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$.

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x), \text{ avec } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

(3) Quelle est l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$, au point d'abscisse $x=0$?

(4) Déterminer le signe de la fonction $x \mapsto -x+(1+x)\ln(x+1)$ sur $]-1,+\infty[$.

(5) Dresser le tableau de variations de f sur $]-1,+\infty[$. Quel est le signe de f sur $]-1,+\infty[$?

(6) Étudier l'existence d'asymptotes de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ en -1 et en $+\infty$.

(7) Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 23. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x\exp(x^2)$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser et donner l'équation de la tangente à la courbe de f^{-1} en 0.

Exercice 24. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x)=\begin{cases} x^{1+\frac{1}{x}}, & \text{si } x>0 \\ 0, & \text{si } x=0 \end{cases}$$

(1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$. Est-elle dérivable en 0 ?

(2) Montrer que, pour tout $x>0$, $\ln x \leq 1+x$. Calculer $f'(x)$ pour $x>0$ et préciser son signe puis préciser le sens de variations de f.

(3) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Étudier la nature de la branche infinie de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f en $+\infty$.

(4) Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1, puis construire $\mathcal{C}$ et T dans un repère orthonormé (on admettra que T est en dessous de $\mathcal{C}$ au voisinage du point de contact).

Exercice 25. On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

(1) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}, \quad f(2x)=\dfrac{2f(x)}{1+f(x)^2}$.

(2) Étudier la parité de f et déterminer les limites de f à l'infini.

(3) La fonction f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$? Expliciter f'.

(4) Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à déterminer. Déterminer algébriquement f^{-1}.

(5) Justifier que f^{-1} est-elle dérivable puis, montrer de deux manières différentes que
$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Exercice 26.

(1) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a
$$\left|\sqrt{2+x} - 2\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left|x-2\right|.$$

(2) Montrer que pour tout $x \in]0;1]$, $x \leq e^x - 1 \leq ex$.

(3) Montrer que pour tous x, y dans $[1; +\infty[$,
$$\left|\ln\left(1+\sqrt{x}\right) - \ln\left(1+\sqrt{y}\right)\right| \leq \frac{1}{4}\left|x-y\right|.$$

Exercice 27.

(1) Déterminer la dérivée n-ième de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

(2) Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.

(a) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $g(x) = a + bf(x)$.

(b) En déduire la dérivée n-ième de g.

Exercice 28. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 e^{2x-1}$.

(1) Calculer $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$.

(2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n de degré 2 tel que
$$f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{2x-1}.$$
On donnera une relation entre P_n et P_{n-1}.

Exercice 29. Soient n un entier avec $n > 2$ et f_n la fonction définie par $f_n(x) = x^{n-1}\ln(x)$.

(1) Calculer f_n'.

(2) Montrer que $f^{(n)} = (n-1)f_{n-1}^{(n-1)}$.

(3) En déduire l'expression de $f^{(n)}$.

Exercice 30. Soient f la fonction définie sur $[-2, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$ et (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in [1; 3]$.

(1) Montrer que $f([1;3]) \subset [1;3]$.

(2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[1;3]$, notée α.

(3) Montrer que, pour tout $x \in [1;3]$, on a $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

(4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^n |u_0 - \alpha|.$$

(5) Conclure quant à la convergence de (u_n).

(6) Déterminer un rang n tel que u_n fournisse une approximation de α à ε près.

Exercice 31. On considère la fonction f, dont la courbe est notée C_f, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - 2 + \exp(-x).$$

(1) (a) Calculer

$$\lim_{x\to+\infty} f(x).$$

(b) Montrer que la courbe C_f admet en $+\infty$ une droite asymptote Δ d'équation $y = x - 2$.

(c) Calculer

$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \quad \text{puis} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Que pouvez-vous dire sur le comportement asymptotique de la courbe de f en $-\infty$?

(2) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x. Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

(3) Justifier que C_f coupe l'axe des abscisses en exactement deux points d'abscisses α et β, le premier étant positif, le deuxième étant négatif.

On donne $e \approx 2{,}7$. Prouver que $\alpha \in]1, 2[$.

(4) Tracer l'allure de C_f et Δ. On donne $\alpha \approx 1{,}84$ et $\beta \approx -1{,}14$.

(5) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2 - \exp -x$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout entier naturel n.

(a) Montrer que pour tout réel x, on a : $g(x) = x$ si et seulement si $f(x) = 0$.

(b) Calculer la dérivée de g. En déduire le sens de variation de g.
Montrer alors que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n.

(c) Établir que pour tout réel x appartenant à $[1, 2]$: $0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{e}$.

(d) En déduire, en appliquant l'inégalité des accroissements finis que pour tout entier naturel n

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e}|u_n - \alpha|.$$

(e) Montrer par récurrence que

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{\exp(n)}.$$

Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 32. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie 1 : Étude d'une fonction.

(1) (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

(c) Montrer que $f'(x) \underset{x\to 0}{\to} -\dfrac{1}{2}$. On pourra utiliser l'égalité suivante, valable au voisinage de 0,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \text{ où } \varepsilon(x) \longrightarrow 0,\ x \to 0.$$

(d) Établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.

(2) (a) Étudier les variations de l'application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$h(x) = (1 - x)e^x - 1$$

(b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0$.

(c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Dresser le tableau des variations de f.

(d) Montrer que la courbe représentative de f admet une droite asymptote, lorsque la variable tend vers $-\infty$.

(e) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Partie 2 : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α, que l'on calculera.

(2) (a) Établir que $\forall x \in [0; +\infty[\,,\ e^{2x} - 2x\, e^x - 1 \geq 0$.

(b) Montrer que $\forall x \in \,]0; +\infty[\,,\ f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^{2x} - 2x\, e^x - 1}{2\,(e^x - 1)^2}$.

(c) Montrer que $\forall x \in [0; +\infty[\,,\ -\dfrac{1}{2} \leq f'(x) < 0$.

(d) Établir que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$.

(3) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}\,(1 - \alpha)$.

(4) Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Exercice 33.

(1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ f(x) = e^{-1/x^2}$.

(a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

(c) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^\star$ et justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(d) Achever l'étude des variations de f, dresser son tableau de variations, construire sa courbe représentative ainsi que la tangente à cette courbe à l'origine.

(2) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Montrer que pour tout entier n, $u_n \in]0; 1[$.

(b) Soit g la fonction définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = f(x) - x$. Calculer $g'(x)$. Montrer que g réalise une bijection de $[0; 1]$ sur un ensemble que l'on déterminera.

(On admettra que $f'\left(\sqrt{2/3}\right) \simeq 0,82$.)

(c) En déduire que la suite (u_n) est strictement décroissante et qu'elle converge. Déterminer sa limite.

(3) On se propose de démontrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^\star$.

(b) On définit pour tout entier naturel n non nul, la fonction polynôme P_n par $P_1 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_{n+1}(x) = x^3 P_n'(x) + (2 - 3nx^2)P_n(x).$$

(i) Calculer $P_2(x)$ et vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}^\star, f'(x) = \dfrac{P_2(x)}{x^6} f(x)$.

(ii) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ f^{(n)} = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} f(x)$.

(c) Montrer que, pour tout entier n non nul, $P_n(0) = 2^n$.

(d) Montrer que, pour tout entier n non nul, $\lim\limits_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$.

(e) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$, que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 34. Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie pour tout réel t strictement positif par

$$f_a(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{a^2}{t})$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ de nombre réels déterminée par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f_a(u_n).$$

(1) **Étude des variations de la fonction f_a .**

(a) Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Justifier l'existence d'une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et donner la position de la courbe représentative de f_a par rapport à cette asymptote.

(b) Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.

(c) Donner l'expression de la fonction dérivée de f_a sur $\mathbb{R}^{*+}$ et dresser le tableau de variation de f_a.

(d) En déduire que

$$\forall t > 0, \qquad f_a(t) \geq a.$$

(2) **Étude de la convergence de la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$.**

(a) Que dire de la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ dans le cas particulier où $u_0 = a$?

(b) Dans la suite on revient au cas général $u_0 > 0$.
Démontrer que, pour tout réel $t > a$,

$$0 < f_a'(t) < \frac{1}{2}.$$

(c) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \geq a$.

(d) Prouver alors que pour tout entier n non nul

$$0 \leq u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}\left(u_n - a\right),$$

puis que

$$|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|\,.$$

(e) En déduire la convergence de la suite (u_n) et indiquer sa limite.

Exercice 35. Soit $f : [0;1] \to [0;1]$ une fonction continue, convexe et telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. On pose

$$\tilde{f}(t) = t - f(t).$$

(1) Montrer que $\tilde{f}$ est concave sur $[0;1]$.

(2) Représenter graphiquement la courbe de f et la droite d'équation $y = t$ sur $[0;1]$.

(3) Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $\tilde{f}(t) \geq 0$.

Exercice 36. Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \ln(\ln(x))$.

(1) Montrer que f est concave.

(2) En déduire que,

$$\forall x, y > 1, \qquad \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

Exercice 37. Soit f la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$.

(1) Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et étudier la dérivabilité en 0 du prolongement.

(2) Étudier f.

(3) Étudier la convexité de f et montrer que la courbe représentative de f admet un point d'inflexion. Déterminer alors l'équation de la tangente en ce point.