



Ahou tcha tcha tcha - Cahier de vacances

Bienvenue en D2 !

Cher(e) neo-bachelier(e), bienvenue à l'ENC Bessières en première année de D2.

Les mathématiques sont bien présentes en D2. C'est une discipline où les attentes, des enseignants dans un premier temps, mais aussi au concours sont élevées: exigences de raisonnement, de rigueur et de rédaction; longueur et difficulté du sujet. On va vite être loin de ce dont vous aviez l'habitude au lycée et au baccalauréat.

Cette introduction n'a pas le moindre but de vous effrayer, mais de vous avertir afin d'attaquer de manière sereine et optimale la préparation qui vous attend. Certain(e)s étudiant(e)s sont surpris des difficultés rencontrées, et c'est pourquoi il est nécessaire d'adopter dès le départ de bonnes méthodes de travail pour commencer (et poursuivre!) l'année de manière efficace et agréable.

Théorème

Tout(e) étudiant(e) qui travaille sérieusement et suit les conseils et instructions peut réussir en mathématiques.

Aucune difficulté n'est insurmontable si on l'appréhende correctement. Parmi celles le plus souvent rencontrées par les élèves, on peut noter:

- Le *rythme soutenu* de la progression des cours; avec seulement 4h de cours et 2h de travaux dirigés (en demi-groupes), on balaie un programme ambitieux. Et ça s'enchaîne vite. Très vite.
- L'aspect assez *magistral* des cours.
L'ancien.ne lycéen.ne pourra être surpris.e d'enchaîner définitions, théorèmes et démonstrations à la place de longues activités d'introduction. Il est alors capital de participer et de solliciter vos enseignant.e.s le plus régulièrement possible.
- La **nécessité absolue d'apprendre le cours**.
Certains bacheliers ont réussi à évoluer dans leur scolarité sans une réelle connaissance du cours et une certaine idée d'un talent inné. Que nenni. Il va falloir dorénavant connaître son cours sans

la moindre hésitation et travailler également les techniques classiques d'application de celui-ci.

- *La suppression de la calculatrice.*

Interdite aux concours, il va falloir (ré)apprendre à s'en passer. Il devient encore plus nécessaire de travailler son efficacité sur les calculs. Il est dommage qu'une simple division sabote les résultats d'un étudiant au niveau tout à fait honorable... **Il apparaît alors capital de maîtriser le calcul littéral de base.**

Encore une fois, la mention des difficultés précédentes n'est pas dans le but de vous affoler. Au contraire, un examen attentif de ce qui vous attend peut vous permettre de vous préparer à entamer votre nouveau cursus dans les meilleures conditions.

Des méthodes pour réussir

Pour progresser et réussir en classe préparatoire, vous devrez commencer par améliorer vos méthodes de travail. Il ne s'agit pas seulement que d'une question de quantité de travail mais de la qualité de celui-ci; cela inclut le fait de:

- Bien *organiser votre temps* et apprendre à être efficace.
Ne vous dispersez pas. Votre temps est précieux! Soyez attentif en cours pour assimiler un maximum de notions et d'explications. Une simple présence physique n'est absolument pas suffisante.
- **Travailler son cours de manière approfondie.**
Le cours est votre *support*: il contient les définitions, les outils et les résultats à appliquer pour résoudre les problèmes mais aussi des exemples de problèmes traités avec la rédaction et la rigueur attendues. Il est important de systématiquement reprendre son cours le jour même (vérifier la bonne compréhension des définitions, savoir refaire un exemple...) et *repérer* immédiatement d'éventuels points obscurs pour une clarification au cours suivant (ou via courriel). Ne laissez pas s'accumuler les incompréhensions ou vous risquerez de vous retrouver submergé.
- Devenir autonome.
Il est capital de prévoir de (longues) plages de travail pendant lesquelles vous pourrez approfondir le cours, préparer les prochaines séances et vous entraîner en (re)faisant des exercices, des problèmes qui ne sont pas forcément ceux traités en classe.
- Analyser ses erreurs.
En repérant toutes les erreurs à un devoir, vous devez les comprendre et être capable de ne pas les refaire. Tout devoir doit être repris intégralement dans ce but. C'est comme cela que vous progresserez! Ne regarder que la note du devoir pour le rouler en boule dans une corbeille n'aura servi à rien. Plus de la moitié du travail dans un DS se fait en le retravaillant et en tenant compte des commentaires et annotations.
- Avoir une bonne hygiène de vie.
Votre temps de sommeil est très précieux. C'est pendant le sommeil que vous mémorisez ce que vous avez appris et que vous vous préparez à intégrer de nouvelles choses. Une alimentation saine et équilibrée permet de rester en forme tout au long de la journée et de ne pas s'endormir en classe. La pratique régulière d'une activité physique est tout aussi capitale. Enfin, sachez également réserver un peu de temps à vos loisirs pour vous détendre.

Ce qu'il faut faire pendant les vacances d'été

À la fin de l'été, vous devez revoir vos cours de Terminale (et de Première). Plus précisément, **vous devez maîtriser**:

- Les *calculs élémentaires* (fractions, puissances, développements, factorisations...)
- Le calcul de dérivée (et de primitive.) (Énormément d'étudiants sont bloqués dès les premières questions d'un problème à cause d'une erreur de dérivée, c'est un très - trop - gros problème). **Les formules de dérivation et l'étude (comportement, allure de la courbe) des fonctions classiques (les fonctions puissances, racine, exp, ln, ...) doivent être connues sur le bout des doigts sans la moindre hésitation!**

Vous trouverez quelques exemples d'exercices à la fin de ce document. Il est très important de *se remettre progressivement dans le bain* au moins **dix jours** avant la rentrée avec une moyenne de deux heures de travail effectif par jour.

J'ai volontairement choisi un nombre limité d'exercices. Ce petit cahier de vacances aurait pu avoir une longueur infinie; j'ai préféré limiter le contenu pour m'assurer que celui-ci soit traité par tout le monde en intégralité.

Les cours et les exercices commenceront dès le premier jour. **Un test aura lieu la première semaine** pour s'assurer que les notions mentionnées ci-dessus sont maîtrisées. Il piochera généreusement dans ce cahier.

Ce qu'il ne faut pas faire pendant les vacances d'été

Il ne faut pas essayer de prendre de l'avance sur le programme de première année (à l'aide de cours particuliers ou autre). Nous aborderons les nouvelles notions dans l'ordre en accordant une très grande importance à la rédaction et au raisonnement, ce que vous ne pourrez pas faire tout seul. Les bases doivent être solides et non bancales.

Il ne faut pas en revanche attendre la rentrée pour faire des maths, même si les autres matières que vous aurez vous demandent également du travail de préparation. Il ne faut rien négliger; toutes les disciplines ont la même importance.

Les exigences seront **considérablement accrues dans toutes les disciplines par rapport au lycée** et aucune période de révision n'est prévue en première année.

Bibliographie

Il n'est pas nécessaire d'acheter le moindre ouvrage; vous pourrez emprunter des livres au CDI et on trouve beaucoup de choses de qualité sur Internet.

Un polycopié de cours, ainsi que des exercices, les sujets des devoirs (DM, DS, et leurs solutions) sont mis en ligne (sur <http://frederic.gunard.com>) au fur et à mesure de l'année.

Sélection d'exercices

Exercice 1. Simplifier les expressions suivantes; on ne demande pas le domaine de validité (*i.e.* on admet que toutes ces expressions ont un sens):

$$A = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}; \quad B = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2} + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - 1; \quad C = \frac{\frac{1}{7} \left(1 + \frac{1}{7}\right)}{\left(1 - \frac{1}{7}\right)^3} + \frac{\frac{1}{7}}{\left(1 - \frac{1}{7}\right)^2};$$

$$D = \frac{\frac{a^2 + b^2}{b} + 2a}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}; \quad E = \frac{2}{x(x-1)} \left(\frac{x^2(x-1)}{2} - \frac{x(x-1)(2x-1)}{6} \right)$$

$$F = \frac{\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{1}}{\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}}; \quad G = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}};$$

$$H = 2^n + 2^n; \quad I = (2^{2^n})^{2^n}; \quad J = 2^{2^n} \times 2^{2^n}, \quad K = 2^{n+1} - 2^n$$

$$L = \frac{(2^3 \times 7^5)^{-2}}{(7^3 \times 2^{-3})^3}; \quad M = \left[\frac{(3 \times 7^2)^{-2} \times 2}{2^{-2} \times 3^3 \times 7^{-3}} \right]^{-3}, \quad N = \left[\left(-\frac{2}{3} \right)^2 \right]^3 \times \left[\left(\frac{3}{7} \right)^{-2} \right]^3; \quad O = \left(-\frac{5^2}{2^4} \right)^{-3} \times \left(-\frac{4}{9} \right)^6;$$

$$P = \frac{(ab^{-1})^3}{c^2b^{-2}} + \frac{(acb^{-1})^{-2}}{bc^{-2}} \times \frac{(a^3b)^2}{(cb)^3}; \quad Q = \frac{(a^2b^{-2})^{-5}}{(c^{-2}b^3)^{-2}} \times \frac{ab - c^{-1}}{c - (ab)^{-1}};$$

$$R = \frac{(e^x)^y - e^y e^{-x}}{(e^y)^x - \frac{1}{e^{-y} e^x}}; \quad S = \frac{\ln(\sqrt{ab})}{\ln a + \ln b}$$

$$T = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right) + 2\ln\left(\frac{x}{1-x}\right); \quad U = \frac{e^{2\alpha}}{(e^\alpha)^2 - \frac{1}{e^{-3\alpha}}}.$$

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}$, écrire les expressions suivantes sous la forme d'une seule puissance:

$$A = 9 \times (-3)^{2n}; \quad B = (-1)^n \times (-3)^{n-1}; \quad C = -4 \times (-2)^{n-1}; \quad D = -4 \times (-2^{n-1})$$

$$E = \frac{1}{2}(-2)^{n-1}; \quad F = \frac{1}{4}(-2)^{n+1}; \quad G = -4 \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}; \quad H = 4 \left(\frac{-1}{2} \right)^{2n+1}.$$

Exercice 3. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Quelle est la formule de l'"identité remarquable" $(a + b + c)^2$?

Exercice 4. Résoudre les équations suivantes:

$$(i) x^2 - 6x + 3 = 0; \quad (ii) 11x - 3x^2 = 22; \quad (iii) 25x^2 + 20x + 8 = 4;$$

$$(iv) x - 2 = \sqrt{x}; \quad (v) 3x^4 + 5x^2 - 2 = 0; \quad (vi) x - 2 + \frac{1}{3-x} = 0;$$

$$(vii) \ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11); \quad (viii) \ln(x^2 + 5x + 6) = \ln(x+11);$$

$$(ix) \ln(-x-2) = \ln(-x-11) - \ln(x+3); \quad (x) \sqrt{x^2 - 4} = 3 - x; \quad (xi) \frac{x\sqrt{x-2}}{x-3} = \frac{x-1}{\sqrt{x-2}}.$$

Exercice 5. Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m , l'existence des solutions réelles de l'équation (\mathcal{E}) ci-dessous. Que dire du signe des solutions éventuelles?

$$(\mathcal{E}) \quad x^2 + 2(m+1)x + 6 - 2m^2 = 0.$$

Exercice 6. Montrer que pour tout réel positif x , on a $x - 2\sqrt{x} + 1 \geq 0$.

Exercice 7. Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes:

$$(i) \ x^2 - 5x + 4 \geq 0; \quad (ii) \ -9x^2 + 24x - 16 \leq 0; \quad (iii) \ (x-2)(1-x) \geq x(5-x); \quad (iv) \ 2\sqrt{x^2-1} \geq x.$$

Exercice 8. Soient f et g deux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Dans chaque cas, dessiner la (ou les selon que f et g sont toutes deux concernées) courbe(s) de fonctions satisfaisant les conditions ci-dessous (il y a naturellement plusieurs réponses possible à chaque fois).

- (i) f s'annule; (ii) f est nulle; (iii) f est inférieure à g
 (iv) f est positive; (v) f n'est pas positive; (vi) f est majoré par 5;
 (vii) f est majorée; (viii) f est strictement décroissante; (ix) f ne s'annule jamais et n'est pas constante

Exercice 9. Déterminer la fonction f polynomiale du second degré (c'est à dire définie sur \mathbb{R} et de la forme $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$) telle que $f(1) = 3$, $f(-1) = -3$ et $f(2) = 9$. Résoudre alors l'inéquation $f(x) \geq 1$.

Exercice 10. Donner l'expression des dérivées des fonctions suivantes, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

$$f_1(x) = x + e^x; \quad f_2(x) = \sqrt{x} + 2x; \quad f_3(x) = \frac{x-1}{x^2+2x-3}; \quad f_4(x) = x^2 e^x$$

$$f_5(x) = x \ln(x) - x; \quad f_6(x) = (2x+3)^3; \quad f_7(x) = \ln(x^2+1); \quad f_8(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2+1}}$$

$$f_9(x) = \frac{x-e^x}{x}; \quad f_{10}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1}); \quad f_{11}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Exercice 11. Montrer que, pour tout réel $x > -1$, on a $\ln(1+x) \leq x$.

Exercice 12. Soient x, y deux réels positifs.

(1) Montrer que

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

(2) En déduire que si, de plus, $x \geq y$, alors

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}.$$

Exercice 13. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}.$$

- (1) Montrer que f est paire.
- (2) Déterminer les limites aux bords de l'ensemble de définition. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- (3) Justifier que f est dérivable, calculer l'expression de sa dérivée puis dresser son tableau de variations, on précisera les éventuels *extrema*.
- (4) Représenter dans un repère orthonormé la courbe de f .

Exercice 14. Étudier et représenter la fonction f définie par $f(x) = x^{-\ln(x)}$.

(On commencera par préciser le domaine de définition de celle-ci, l'expression de la dérivée, le tableau de variations, les limites aux bords avant de synthétiser tout ça par la figure.)

Exercice 15. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les deux suites définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n).$$

- (1) Expliciter u_1, v_1, u_2, v_2 .
- (2) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = u_n - v_n$ et $s_n = u_n + v_n$.
 - (i) Montrer que (t_n) est une suite géométrique puis que (s_n) est constante.
 - (ii) En déduire l'expression de t_n (resp. s_n) en fonction de t_0 (resp. s_0).
- (3) Donner alors les expressions de u_n et de v_n en fonction de n .

Exercice 16. Un fermier possède un grillage d'une longueur de 100 mètres pour former un enclos rectangulaire (le terrain est supposé plat). Comment doit-il choisir la longueur et la largeur de son terrain pour que ses vaches puissent manger le maximum d'herbe?

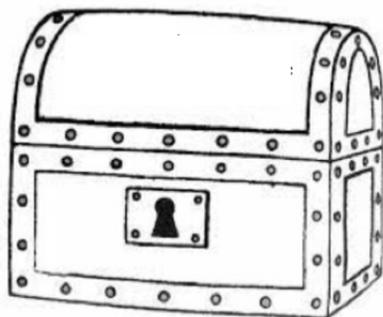
Exercice 17. Un capital de 20000 € est placé avec un taux d'intérêts $t\%$ pendant un an. Au bout de cette période, les intérêts versés sont également capitalisés et le taux d'intérêts pour l'année suivante est $(t - 1)\%$. L'intérêt versé à la fin de la deuxième année est 1512 €. Calculer t .

Exercice 18. Connaissant l'intérêt de son facteur pour les énigmes, un homme lui déclare un jour : « J'ai trois filles, le produit de leurs âges vaut 36 et la somme de leurs âges est égale au numéro de la maison en face ». Le facteur, intrigué, réfléchit quelques instants puis dit : « J'y suis presque, mais il me manque un indice ». L'homme rajoute alors : « Mais oui, j'ai oublié de vous dire que l'aînée a les yeux verts! ». Le facteur s'exclame « J'ai trouvé ! ».

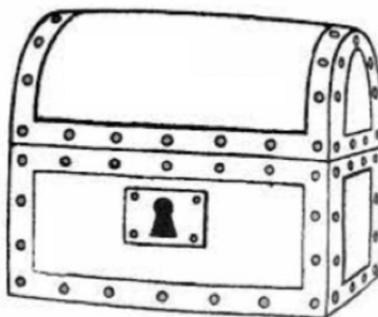
Quel âge ont les filles ?

Exercice 19. Parmi trois coffres, un seul contient un trésor.

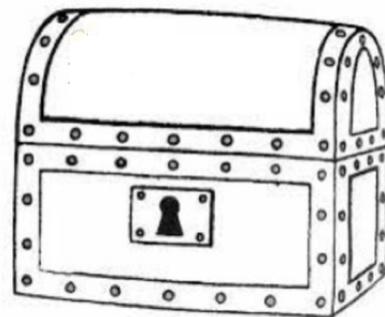
Sur chacun des coffres est écrit une inscription. Au moins une des inscriptions est fausse et l'inscription marquée sur le coffre contenant le trésor est forcément vraie. Dans quel coffre se trouve le trésor ?



COFFRE 1 :
LE TRÉSOR EST DANS LE COFFRE 2



COFFRE 2 :
LE TRÉSOR EST ICI



COFFRE 3 :
LE COFFRE 1 EST VIDE

Exercice 20. Séverus Rogue prépare une énigme¹ pour Harry, Hermione et Ron. Il veut disposer différentes bouteilles, en ligne, sur une petite console. Il dispose de 3 bouteilles identiques de Poison, de deux bouteilles (identiques) de vin d'ortie, d'une bouteille d'une potion permettant de passer à travers les flammes et d'une bouteille de polynectar.

- (1) Combien y a-t-il de dispositions possibles des 7 bouteilles?
- (2) Si il y a n_1 (resp. n_2, n_3, n_4) bouteilles de Poison (resp. vin, potion, polynectar), combien y a-t-il de dispositions possibles?
- (3) Combien y a-t-il d'anagrammes de AVADAKEDAVRA ?

¹voir *Harry Potter à l'école des sorciers*, J.K. ROWLING, 1997.



©Bill Watterson, *Calvin & Hobbes*

Si le délai de réponse est naturellement rallongé pendant la période estivale, la communication reste maintenue et on invite néanmoins à lister les difficultés rencontrées clairement formulées et à prendre contact par courriel (frederic@gaunard.com) afin de ne pas rester *bloqué.e* trop longtemps. En particulier, les échanges peuvent être réguliers lors de la deuxième quinzaine du mois d'Août. (Il est par ailleurs capital de s'y *remettre* (bien) avant la rentrée, pour une reprise sous les meilleures auspices.)

Bonnes et belles vacances à tou.te.s!