1NSD2 - Eté 2023
ENC Bessières, Paris 17e
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Cahier de vacances

Éléments de solution

On présente ici des éléments de solution des exercices du cahier de vacances. Parfois, la correction n'est pas détaillée. On invite à poser toutes les questions nécessaires à une bonne compréhension (par courriel ou en classe). La première séance de travaux dirigés (Mardi 5 Septembre) proposera des résolutions d'exercices similaires.

Exercice 1. Cet exercice sera repris à la rentrée en TD.

Exercice 2. Pour cet exercice, il est capital de bien avoir observé (et compris) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(-1)^{2n} = 1, \qquad (-1)^{2n+1} = -1.$$

Il suit que

$$\begin{array}{rcl}
A & = & 9 \times (-3)^{2n} = 9 \times (-1)^{2n} \times 9^n = 9^{n+1} \\
B & = & (-1)^n \times (-3)^{n-1} = (-(-1)^{n-1}(-3)^{n-1} = -((-1) \times (-3))^{n-1} = -3^{n-1} \\
C & = & -4 \times (-2)^{n-1} = -2^2 \times (-2)^{n-1} = -(-2)^2 \times (-2)^{n-1} = -(-2)^{n+1} \\
D & = & -4 \times (-2^{n-1}) = 2^{n+1} \\
E & = & \dfrac{1}{2}(-2)^{n-1} = (-1)^{n-1}2^{n-2} = -(-2)^{n-2} \\
F & = & \dfrac{1}{4}(-2)^{n+1} = (-2)^{-2}(-2)^{n+1} = (-2)^{n-1} \\
G & = & -4\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = -2^2(-2)^{1-n} = -(-2)^{3-n} = -\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-3} \\
H & = & 4\left(\dfrac{-1}{2}\right)^{2n+1} = (-2)^2(-2)^{-2n-1} = (-2)^{-2n-3} = 2^{-2n-3} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n+3}.
\end{array}$$

Exercice 3. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On peut commencer par utiliser l'identité remarquable bien connue pour le carrée de la somme de deux éléments, puis refaire la même chose.

$$\begin{array}{rcl}
(a+b+c)^2 & = & (a+(b+c))^2 = a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2 \\
 & = & a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2 \\
 & = & a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca
\end{array}$$

Exercice 4. Exercice repris en TD.

Exercice 5. Soit m réel fixé. Le discriminant du trinôme ci-dessous est égal à

$$\Delta_m = 4(m+1)^2 - 4(6-2m^2) = 4(3m^2+2m-5) = 4(3m+5)(m-1).$$

Selon le signe de ce discriminant, l'équation aura donc aucune, une seule ou deux solutions... Plus précisément,

- Si $m \in \left]-\frac{5}{3};1\right[$, alors $\Delta_m < 0$ et l'équation n'a aucune solution;
- Si $m = 1$, l'équation devient $(x+2)^2 = 0$ donc elle admet une solution unique $x = -2$;
- Si $m = -\frac{5}{3}$, l'équation devient $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = 0$ donc elle admet une solution unique $x = \frac{2}{3}$;
- Si $m \in \left]-\infty;-\frac{5}{3}\right[\cup]1,+\infty[$, alors $\Delta_m > 0$ et l'équation admet deux solutions distinctes

$$x_1 = \sqrt{(3m+5)(m-1)} - (m+1), \qquad x_2 = -\sqrt{(3m+5)(m-1)} - (m+1).$$

Exercice 6. Pour monter que pour tout réel positif x, on a $x - 2\sqrt{x} + 1 \geq 0$, on peut procéder de plusieurs façons. L'une serait par exemple d'étudier la fonction f , $x \mapsto x - 2\sqrt{x} + 1$ sur $\mathbb{R}_+$ et de voir que son minimum est 0 (atteint en $x = 1$). On peut aussi remarquer la chose suivante. Si $x \geq 0$, alors

$$x - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0$$

car un carré est toujours positif ou nul.

Exercice 7. On résout :

(i) Le trinôme a pour discriminant $\Delta = 9$ et deux racines égales 1 et 4. Il est positif *à l'extérieur* des racines ce qui veut dire que

$$x^2 - 5x + 4 \geq 0 \Longleftrightarrow x \in]-\infty;1] \cup [4,+\infty[.$$

(ii) Observons que

$$-9x^2 + 24x - 16 \leq 0 \Longleftrightarrow 9x^2 - 24x + 16 \geq 0 \Longleftrightarrow (3x-4)^2 \geq 0,$$

ce qui est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(iii) En développant, on remarque que

$$(x-2)(1-x) \geq x(5-x) \Longleftarrow 2x \leq -2 \Longleftrightarrow x \leq -1.$$

(iv) Une racine carrée est définie si et seulement si son argument est positif (ou nul). Il suit que nécessairement $x^2 - 1 \geq 0$ et que donc $x \geq 1$ ou $x \leq -1$. Observons aussi que $\sqrt{x^2-1} \geq 0$. Ainsi, si $x \leq -1$, l'inégalité demandée est trivialement vérifiée. Résolvons alors pour $x \geq 1$. Comme la fonction $t \mapsto t^2$ est bijective sur $\mathbb{R}_+$, on a l'équivalence suivante :

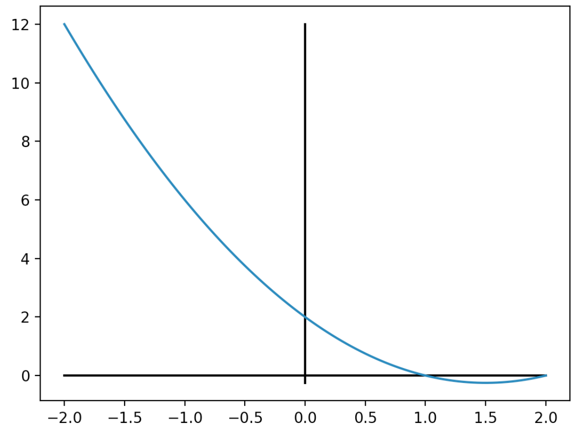
$$\begin{aligned} \begin{cases} x \geq 1 \\ 2\sqrt{x^2-1} \geq x \end{cases} &\Longleftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 4(x^2-1) \geq x^2 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 \geq \frac{4}{3} \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow x \geq \sqrt{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$2\sqrt{x^2-1} \geq x \Longleftrightarrow x \in]-\infty;-1] \cup \left[\sqrt{\frac{4}{3}};+\infty\right[.$$

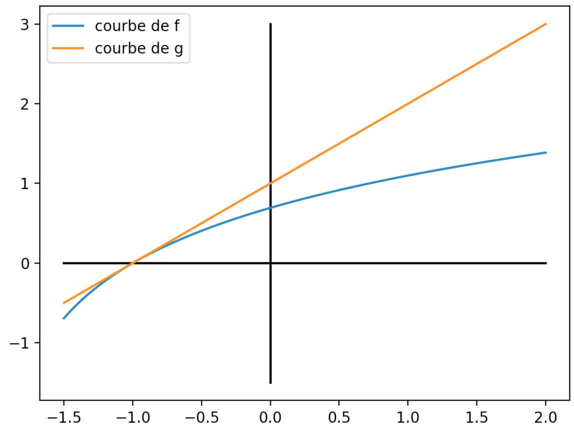
Exercice 8. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Dans chaque cas, on dessine des fonctions vérifiant les conditions demandées. Il n'y a pas unicité de la réponse.

(i) f s'annule signifie qu'il existe (au moins) un réel x tel que $f(x) = 0$. Graphiquement, cela veut dire que la courbe de f rencontre (au moins) une fois l'axe des abscisses.



(ii) f est nulle en tant que fonction ce qui veut dire **identiquement** nulle ce qui veut dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$. La courbe de f est donc confondue avec l'axe des abscisses. (On omet le dessin).

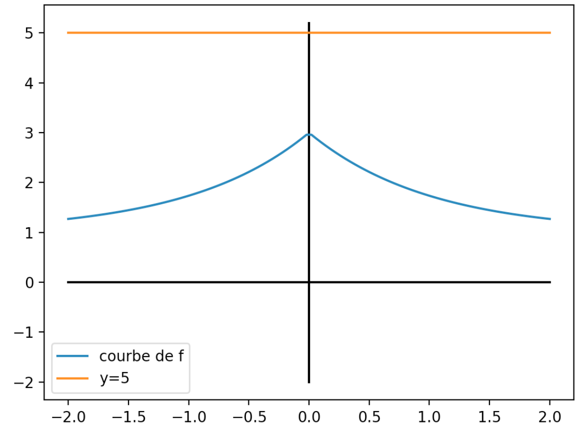
(iii) f est inférieure à g ce qui veut dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq g(x)$ donc, graphiquement, la courbe de f est au dessous de celle de g. Par exemple, sur le dessin suivant.



(iv) f est positive signifie que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$. Il suffit de dessiner une courbe qui ne passe pas en dessous de l'axe des abscisses (mais qui peut s'annuler).

(v) Attention, f n'est pas positive est la négation de l'assertion précédente. Cela ne signifie pas que f n'est jamais positive, cela signifie qu'elle ne l'est pas tout le temps. Donc il existe au moins une valeur x pour laquelle $f(x) < 0$. Le tout premier dessin correspond par exemple.

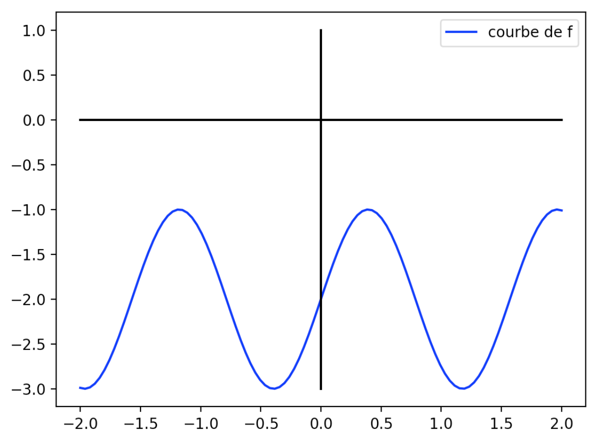
(vi) f est majorée par 5 signifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 5$ donc la courbe de f ne dépasse jamais la droite d'équation $y = 5$.



(vii) f est majorée signifie qu'il existe un majorant. En particulier, f ne peut pas avoir de limite égale à $+\infty$. Le dessin précédent convient.

(viii) f est strictement décroissante signifie que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, on a $f(x) > f(y)$. On en connait mille.

(ix) Il suffit de dessiner une courbe qui n'est pas constante et qui ne passe jamais pas l'axe des abscisses. On a choisi de dessiner une fonction continue mais on aurait pu ne pas le faire...



Exercice 9. Considérer la fonction polynomiale f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ telle que $f(1) = 3, f(-1) = -3$ et $f(2) = 9$.
Les conditions ci-dessus donnent le système suivant

$$\begin{cases} a+b+c &= 3 \\ a-b+c &= -3 \\ 4a+2b+c &= 9 \end{cases}$$

On résout ce système par la méthode du *Pivot de Gauss*. En aucun cas par une substitution bancale et hasardeuse. La méthode sera à nouveau présentée et expliquée lors du Chapitre 2. Pas de panique.

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b+c & = & 3 \\ a-b+c & = & -3 \\ 4a+2b+c & = & 9 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a+b+c & = & 3 \\ 2b & = & 6 \\ -2b-3c & = & -3 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a+b+c & = & 3 \\ b & = & 3 \\ 3c & = & -3 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 3 \\ c & = & -1 \end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout x réel,

$$f(x) = x^2 - 3x - 1.$$

On résout alors $f(x) \geq 1$ sans difficulté :

$$\begin{aligned} f(x) \geq 1 &\iff x^2 - 3x - 2 \geq 0 \\ &\iff x \in \left]-\infty; \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{17}}{2}, +\infty\right[\end{aligned}$$

Exercice 10. Cet exercice sera repris à la rentrée en TD.

Exercice 11. Cette inégalité est très utile et interviendra dans beaucoup beaucoup d'exercices. Il faudra donc impérativement savoir refaire la preuve de cette petite inégalité.

Introduisons la fonction h définie sur $]-1,+\infty[$ par $h(x) = \ln(1+x) - x$.
Cette fonction est bien définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme différence de composée de fonctions usuelles dérivables sur cet intervalle (sur l'intervalle susmentionné, $x \mapsto x+1$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ où le log est dérivable). On a, pour tout $x > -1$,

$$h'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$$

dont on obtient le signe sans difficulté. Il suit le tableau de variations ci-dessous.

x	-1		0		$+\infty$
$h'(x)$	||	$+$	0	$-$	
h	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

En particulier, h admet un maximum en 0, qui vaut 0, ce qui s'écrit aussi

$$\forall x > -1, \qquad h(x) \leq h(0) = 0,$$

ou encore

$$\forall x > -1, \qquad \ln(1+x) \leq x.$$

Exercice 12. Soient x, y deux réels positifs fixés.

(1) On va comparer les carrés des éléments intervenant dans l'inégalité considérée. D'une part,

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 = x + y + 2\sqrt{xy}$$

et d'autre part

$$\sqrt{x+y}^2 = x+y.$$

Comme $\sqrt{xy} \geq 0$, il est clair que

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 \geq \sqrt{x+y}^2.$$

Mais les deux quantités initiales étant toutes deux positives, on a donc bien

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right) \geq \sqrt{x+y}.$$

(2) Si $x \geq y$, il suffit d'appliquer l'inégalité précédente en remplaçant x par $x-y$ (qui est donc bien une quantité positive). Cela donne

$$\sqrt{x} = \sqrt{x-y+y} \leq \sqrt{x-y}+\sqrt{y}$$

ou encore

$$\sqrt{x-y} \geq \sqrt{x}-\sqrt{y}.$$

Exercice 13. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+1}.$$

(1) Comme dans le cas de (quotient de) combinaisons d'exponentielles, on écrit $1 = e^{2x}e^{-2x}$ et on factorise par e^{-2x}. En effet,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{e^{-x}}{e^{-2x}+1} = \frac{e^{-x}}{e^{-2x}(1+e^{2x})} \\ &= \frac{e^{-x}e^{2x}}{e^{2x}+1} = f(x), \end{aligned}$$

et f est bien paire.

(2) La fonction étant définie sur $\mathbb{R}$ et paire, il suffit de déterminer la limite en $+\infty$, celle de l'autre côté sera la même. On factorise alors au numérateur et au dénominateur par le terme prépondérant

$$f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}(1+e^{-2x})} = \frac{1}{e^x+e^{-x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En particulier, la courbe de f admet une asymptote horizontale en $+\infty$ (et aussi en $-\infty$).

(3) f est le quotient de deux fonctions usuelles dérivables dont le dénominateur ne s'annule jamais, elle est donc également dérivable. De plus, on a

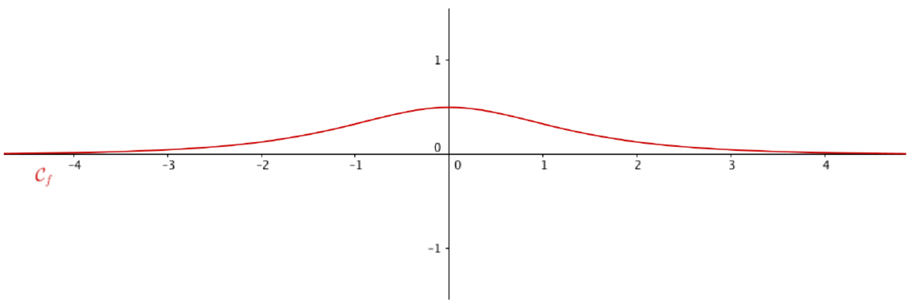
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(e^{2x}+1)-e^x\cdot 2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} \\ &= \frac{e^x-e^{3x}}{(e^{2x}+1)^2} \\ &= \frac{(1-e^{2x})e^x}{(1+e^{2x})^2} \\ &= \left(\frac{(1-e^{2x})}{1+e^{2x}}\right) f(x). \end{aligned}$$

On constate donc que $f'(x)$ est du signe de $1-e^{2x}$ qu'on détermine les doigts dans le nez. On peut donc dresser le tableau de variations:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

On constate notamment que f admet un maximum, en 0, qui vaut $1/2$, ce qui signifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 1/2$.

(4) On enchaîne avec un joli dessin:



Exercice 14. Afin de déterminer le domaine de définition, et plus généralement d'étudier la fonction, il est nécessaire d'écrire l'expression de $f(x)$ sous forme exponentielle:

$$f(x) = \exp\left(-\ln(x)^2\right).$$

Grâce à l'expression précédente, il est clair que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, car c'est là qu'est défini le logarithme, qui intervient dans l'expression de $f(x)$.

Il faut donc déterminer deux limites: celle en 0 (par valeurs supérieures) et celle en $+\infty$. Cela se fait facilement.

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty \\[2ex] \lim\limits_{x\to 0} \left(-\ln(x)^2\right) = -\infty \\[2ex] \lim\limits_{u\to -\infty} \exp(u) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

et

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty \\[2ex] \lim\limits_{x\to +\infty} \left(-\ln(x)^2\right) = -\infty \\[2ex] \lim\limits_{u\to -\infty} \exp(u) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0.$$

On peut donc en déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 0$. (On peut aussi conclure que f se prolonge par continuité en 0 mais ce n'était pas attendu dans cet exercice.)

f est dérivable sur son ensemble de définition comme composée de fonctions usuelles qui y sont dérivables. De plus, on a, pour tout x strictement positif,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(-\ln(x)^2\right)' \exp\left(-\ln(x)^2)\right) \\ &= -2\ln(x) \times \frac{1}{x} \times \exp\left(-\ln(x)^2\right) \\ &= -\frac{2\ln(x)}{x} \exp\left(-\ln(x)^2\right). \end{aligned}$$

Sur $]0;+\infty[$, le signe de $f'(x)$ est alors le même que celui de $-\ln(x)$, ce qui donne le tableau de variations suivant:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$\Vert$ 0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Il peut être intéressant, afin de connaître de quelle façon la courbe arrive à l'origine, de déterminer la limite de $f'(x)$ lorsque x tend vers 0. On cherche donc

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{2\ln(x)}{x}\exp\left(-\ln(x)^2\right)\right).$$

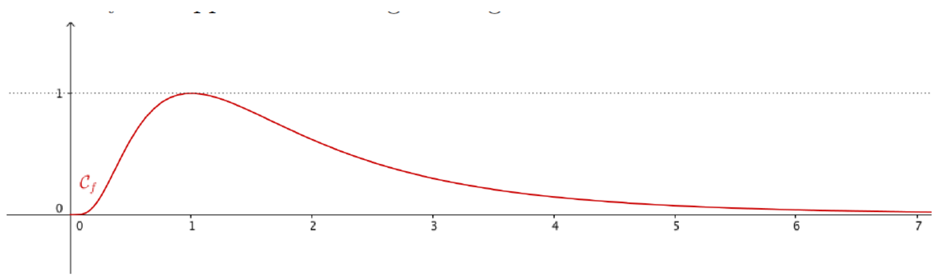
Cette limite présente une forme indéterminée; si on a vu en effet que le membre de droite (dans le produit qui compose l'expression) tend vers 0, le rapport $\ln(x)/x$ tend lui vers l'infini. On va utiliser une croissance comparée, à savoir que

$$\lim_{u\to+\infty} u\exp(-u) = 0.$$

Plus précisément, pour $x > 0$ proche de zéro (c'est à dire en particulier $x < 1/e$)

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2\ln(x)}{x}\exp\left(-\ln(x)^2\right) \\ &= -2\ln(x)\exp\left(-(\ln(x)^2+\ln(x))\right) \\ &= \left(-\frac{2\ln(x)}{\ln(x)^2+\ln(x)}\right) \times \left((\ln(x)^2+\ln(x))\exp\left(-(\ln(x)^2+\ln(x))\right)\right) \\ &= \frac{-2}{\ln(x)\left(1+\frac{1}{\ln(x)}\right)} \times \left((\ln(x)^2+\ln(x))\exp\left(-(\ln(x)^2+\ln(x))\right)\right) \\ &\longrightarrow 0\times 0 = 0, \quad x\to 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la courbe de f se rapproche de l'origine tangentiellement à l'axe des abscisses.



Exercice 15. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n).$$

(1) On fait le calcul de proche en proche

$$u_1 = \frac{1}{3}(2u_0 + v_0) = \frac{1}{3}, \qquad v_1 = \frac{1}{3}(u_0 + 2v_0) = \frac{2}{3},$$
$$u_2 = \frac{1}{3}(2u_1 + v_1) = \frac{4}{9}, \qquad v_2 = \frac{1}{3}(u_1 + 2v_1) = \frac{5}{9}.$$

(2) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = u_n - v_n$ et $s_n = u_n + v_n$.

(i) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Par définition

$$t_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) - \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) = \frac{1}{3}(u_n - v_n) = \frac{1}{3}t_n$$

donc (t_n) est bien géométrique de raison $1/3$.
De même

$$s_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) + \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) = \frac{1}{3}(3u_n + 3v_n) = u_n + v_n = s_n$$

et (s_n) est bien constante.

(ii) Comme (s_n) est constante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$s_n = s_0 = u_0 + v_0 = 1.$$

De plus, comme (t_n) est géométrique de raison $1/3$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$t_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n t_0 = -\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

(3) On résout le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_n - v_n & = & t_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ u_n + v_n & = & s_n = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2u_n & = & 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 2v_n & = & 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{array}\right.$$

Au final, on a

$$u_n = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right), \qquad v_n = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right).$$

Exercice 16. Notons x la longueur du terrain et y sa largeur. On connait alors le *périmètre* de l'enclos, à la fois égal à $2(x + y)$ mais aussi à 100. Ainsi, on a $y = 50 - x$.
On veut que la *surface* (sous-entendue, son aire) soit maximale. On va donc choisir x de sorte que la fonction

$$\mathcal{A} : \ x \mapsto x(50 - x) = -x^2 + 50x$$

soit maximale. C'est une fonction polynômiale du second degré. Elle est donc dérivable (partout) et $\mathcal{A}'(x) = -2x + 50$, quantité qui s'annule en changeant de signe en $x = 25$.

x	0		25		100
$\mathcal{A}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathcal{A}$	0	$\nearrow$	225	$\searrow$	0

Il faut donc (sans surprise) choisir un enclos carré de 25 mètres de côté pour maximiser la surface d'herbe.

Exercice 17. Un capital de 20000 € est placé avec un taux d'intérêts $t\%$ pendant un an. Au bout de cette période, les intérêts versés sont également capitalisés et le taux d'intérêts pour l'année suivante est $(t-1)\%$. Ainsi, après deux années, le capital a été multiplié par

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)\times\left(1+\frac{t-1}{100}\right)=1+\frac{2t-1}{100}+\frac{t(t-1)}{10000}=\frac{9900+199t+t^2}{10000}$$

On résout donc une petite équation du second degré dont on cherche une solution t positive.

$$\begin{aligned}20000\times\frac{9900+199t+t^2}{10000}=20000+1512 &\iff 9900+199t+t^2=10756\\ &\iff t^2+199t-856=0\end{aligned}$$

Pour calculer le discriminant (la calculatrice n'est pas autorisée), on remarque que

$$199^2=(200-1)^2=40000-400+1=39601.$$

On trouve donc un discriminant égal à $43025=25\times 1721$. Ainsi, le taux cherché (en pourcentage) vaut

$$t=\frac{5\sqrt{1721}-199}{2}$$

Ceci est une réponse exacte et on pourrait d'arrêter là.
Si on veut une idée plus précise du résultat, il faut chercher à obtenir une valeur approchée de cette racine (toujours sans calculatrice). Observons que $1721=1600+121$ et que $1600=40^2$. Ainsi,

$$\sqrt{1721}=40\sqrt{1+\frac{121}{1600}}$$

En utilisant que $\sqrt{1+x}\simeq 1+x/2$ pour x proche que 0 et aussi que $(1+x)^2\simeq 1+2x$ (ce qu'on justifiera plus tard dans l'année avec la notion de *développement limité*), observant que

$$\frac{121}{1600}=\left(\frac{11}{40}\right)^2=\frac{1}{16}\times\left(1+\frac{1}{10}\right)^2$$

$$\sqrt{1+\frac{121}{1600}}\simeq 1+\frac{1}{2}\left(\frac{11}{40}\right)^2\simeq 1+\frac{1}{32}+\frac{1}{160}$$

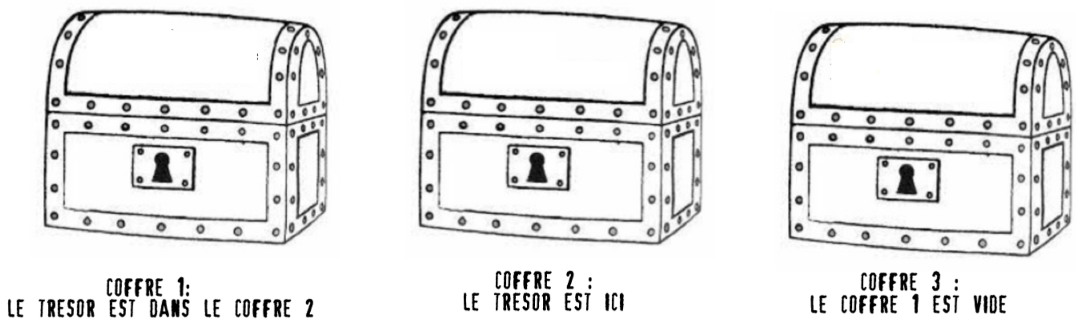
Au final (et à la main), on trouve un taux d'environ 4.125%.

Exercice 18. Les âges des trois filles sont trois nombres entiers (naturels), il faut donc commencer par lister l'ensemble des triplets d'entiers dont le produit fait 36, puis faire le total S:

- $1,1,36,\quad S=38;$
- $1,2,18,\quad S=21;$
- $1,3,12,\quad S=16;$
- $1,4,9,\quad S=14;$
- $1,6,6,\quad S=13;$
- $2,2,9,\quad S=13;$
- $2,3,6,\quad S=11;$
- $3,3,4,\quad S=10;$

Le facteur dispose de l'information que le total S est égal au numéro de la maison d'en face, nombre qu'il peut donc voir. Malgré cette information, ce dernier ne peut conclure. Cette situation ne peut avoir lieu que si le total qu'il a obtenu provient de plusieurs triplets différents. Dans la liste ci-dessus, il n'y a que deux triplets qui ont le même total. On est donc certain d'être dans un des deux cas $1,6,6$ ou $2,2,9$. Mais alors, on apprend que l'aînée a les yeux verts. Notamment, il y a une aînée, ce qui permet d'éliminer le cas avec des jumelles comme enfants les plus âgés. On peut donc conclure que les trois filles ont 9 ans pour l'aînée et 2 ans pour les deux jumelles.

Exercice 19. Parmi trois coffres, un seul contient un trésor.
Sur chacun des coffres est écrit une inscription. Au moins une des inscriptions est fausse et l'inscription marquée sur le coffre contenant le trésor est forcément vraie.



Si le trésor était dans le coffre 1, l'affirmation marquée sur celui-ci (selon laquelle le trésor est dans le coffre 2) serait fausse, ce qui n'est pas possible par hypothèse. Donc le trésor n'est pas dans le coffre 1. Si le trésor était dans le coffre 2, alors les trois affirmations seraient vraies. Or, il est dit qu'au moins une est fausse. Ainsi, le trésor ne peut pas être dans le coffre 2.
Il ne reste que le coffre 3. Observons alors qu'en effet, ce qui est inscrit dessus est vrai (le coffre 1 est vide) et que les affirmations inscrites sur les deux premiers coffres sont fausses.

Exercice 20. Séverus Rogue prépare une énigme[1] pour Harry, Hermione et Ron. Il veut disposer différentes bouteilles, en ligne, sur une petite console. Il dispose de 3 bouteilles identiques de Poison, de deux bouteilles (identiques) de vin d'ortie, d'une bouteille d'une potion permettant de passer à travers les flammes et d'une bouteille de polynectar.

Les notions de permutations abordées ci-dessous dans la résolution de l'exercice seront ré-introduites dans un chapitre ultérieur.

(1) Avec les 7 bouteilles, il y a *a priori* $7! = 1 \times 2 \times .. \times 7$ *permutations* possibles sur la table, mais on ne distinguera pas les permutations où l'on échange les bouteilles de vin entre elles ou celles de poison entre elles. Il faut donc diviser $7!$ par $3! \times 2!$ correspondant aux permutations des bouteilles de vin et de poison. Au final, le nombre de dispositions différentes est donc
$$\frac{7!}{3! \times 2!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{2} = 420.$$
(2) Il suffit de généraliser le processus. Il y a $n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ bouteilles en tout et le nombre de façons de les disposer est
$$\frac{(n_1 + n_2 + n_3 + n_4)!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \times n_4!}$$
(3) C'est la même chose pour l'anagramme. Le *mot* AVADAKEDAVRA est composé de 12 lettres qu'on peut permuter de $12!$ façons différentes, mais il faut diviser par le produit des nombres de permutations des lettres identiques car celles-ci ne forment pas de nouveau mot. Il y a donc un total de
$$\frac{12!}{5!2!2!} = \frac{12 \times 11 \times ... \times 6}{4} = 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 332640$$
anagrammes de la fameuse formule.

[1] voir *Harry Potter à l'école des sorciers*, J.K. Rowling, 1997.