Ahou tcha tcha tcha - Cahier de vacances

(*) Facile (**) Classique/intermédiaire (***) Difficile (****) Approfondissement

Mini exercices / Questions classiques

Les questions de cette partie sont indépendantes et reprennent des techniques, calculs et notions qui balaient l'ensemble du programme de première année. On n'aura pas non plus la naïveté de croire que leur maîtrise "suffit". Cela dit, il serait plus que pénalisant de débuter l'année sans que ce soit le cas.

Naturellement, il est indispensable de connaître parfaitement les différentes formules du cours (formule de sommes classiques, formule du binôme, somme des séries usuelles, lois usuelles, etc...)

Il n'y aura pas de solution de cette planche mise en ligne. Le premier programme de colle de l'année scolaire sera entièrement consacré à la reprise de ces mini-exercices et le devoir surveillé du jour de la rentrée piochera également dans ce cahier.

Calcul

(1) (*) Résoudre le système suivant $\left\{\begin{array}{rcr} x+y-3z-t &=& 0 \\ 2x+y-5z+4t &=& 4 \\ x-2y+3t &=& -2 \\ -x+y+z-2t &=& 1 \end{array}\right.$

(2) (*) Montrer de deux manières (par récurrence, puis à l'aide des formules de sommes usuelles) que

$$\sum_{k=1}^{n} k(2k^2-1) = \frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}.$$

(3) (**) Calculer les sommes doubles suivantes

$$(i) \quad \sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i,j), \qquad\qquad (ii) \quad \sum_{1\leq i<k\leq n} \frac{i}{j}$$

(4) (*) Montrer que, pour tous $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![0;n]\!]$,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

(5) (**) Montrer, par la méthode de votre choix, que, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$ et tout $n\geq p+1$,

$$\sum_{k=p}^{n-1} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n-1}{p}.$$

Analyse

(6) (*) Montrer que, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

(7) (**) Montrer, à l'aide de l'IAF, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}.$$

(8) (*/**) Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

(9) (*/**) Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = (u_n^2+1)/2$ est croissante, majorée par 1 et donc convergente vers une limite à préciser.

(10) (**) Montrer que la fonction f définie ci-dessous est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On commencera par montrer f est continue en 0. Puis, après avoir justifié que f dérivable en dehors de 0 on calculera $f'(x)$, pour $x \neq 0$. On montrera que f dérivable en 0, à l'aide du *développement limité* à l'ordre 2 ci-dessous

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

et enfin que f' est continue en 0.

(11) (*/**)Montrer que la fonction $f : x \mapsto x\exp(x^2)$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser et donner l'équation de la tangente à la courbe de f^{-1} en 0.

(12) (*/**)

(a) Déterminer toutes les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et solutions de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(t) = 2\varphi(t).$$

(b) Soit c un réel. Montrer que la fonction $t \mapsto cte^{2t}$ est solution (particulière) de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(t) = 2\varphi(t) + ce^{2t}.$$

(c) Déterminer toutes les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et solutions de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(t) = 2\varphi(t) + ce^{2t}.$$

(13) (*) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

(*On essaiera de faire apparaître une somme télescopique.*)

(14) (*/**) Montrer la convergence et calculer la somme des séries ci-dessous

$$(i)\ \sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)^2(-2)^{n+2}}{5^n}, \qquad (ii)\ \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{\sqrt{n+3}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

(15) (**) Déterminer, à l'aide d'une IPP, **la** primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto (t^2+1)e^t$ qui s'annule en 0.

(16) (*/**) Calculer, avec un changement de variable, les intégrales

$$(i) \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{3t-1}, \quad (u = 3t-1), \quad (ii) \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t, \quad (u = 1-\sqrt{t})),$$

$$(iii) \int_0^{\ln(2)} \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x, \quad (u = 1+e^x), \quad (iv) \int_1^A \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t, \quad (u = \ln(t)).$$

(17) (**/***) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^n \mathrm{d}t = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t = 0$$

(18) (***) Soit $x \in [0;1[$ fixé.
(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t.$$

(b) Utiliser une technique semblable à la Question (17) pour obtenir

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t = 0.$$

(c) Conclure.

(19) (****) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0;1]$. Soit $x \in]0;1[$. Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t,$$

où $f^{(0)} = f$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}$ désigne la dérivée $k-$ième de f.
(*On pourra s'aider d'une intégration par parties.*)

(20) (*Python) Écrire un programme qui calcule et affiche le plus petit entier N tel que $u_N \geq A$, où la suite (u_n) est définie par

$$u_0 = 2, \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \exp(u_n) - e\ln(u_n).$$

(21) (**Python) Écrire un programme de dichotomie permettant de donner une valeur approchée à 10^{-4} de la solution de l'équation $e^x + x = 3$ (dont on aura au préalable rigoureusement justifié l'existence).

(22) (**Python) Écrire un programme permettant de calculer le terme u_n où la suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 2, \quad \text{et} \quad u_{n+2} = \frac{7}{2}u_{n+1} - \frac{3}{2}u_n.$$

(Écrire un programme permettant de) Représenter graphiquement les 50 premiers termes de la suite $(u_n/3^n)$. Représenter, interpréter.
Déterminer ensuite l'expression du terme général de (u_n).

Algèbre Linéaire

(23) (*/**) Déterminer **soigneusement**, par la formule du binôme, les puissances A^n $(n \in \mathbb{N}^*)$ de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(24) (*/**) On considère la matrice A ci-dessous

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) À l'aide du pivot de Gauss, vérifier que A est inversible et calculer son inverse.
(b) Calculer $A^2 - 4A + 3I$. En déduire une nouvelle preuve que A est inversible et donner une expression de A^{-1} en fonction de A et de I.

(25) (*) Résoudre les équations $AX = 0$, $AX = X$ et $AX = 3X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$où, A est la matrice ci-dessous.
On présentera les solutions sous forme de *sous- espace vectoriel (de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) engendré* par une famille (finie) de vecteurs.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(26) (*) Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $B^2 + B$ et déduire que B n'est pas inversible.

(27) (*/**) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice *nilpotente*, c'est à dire pour laquelle il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.
(a) Calculer $(I_n - A)(I_n + A + A^2 + ... + A^{p-1})$.
(b) En déduire que $I_n - A$ est inversible et préciser son inverse.

(28) (*/**) À l'aide du *déterminant*, déterminer les réels $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible, où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(29) (**) Pour chacune des matrices M suivantes, déterminer l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels $M - \lambda I$ n'est pas inversible. Pour chaque valeur λ trouvée, résoudre $(M - \lambda I)X = 0$ où $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$(i)\ M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad (ii)\ M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad (ii)\ M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(30) (*) Montrer que la famille de vecteurs ci-dessous forme une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

(31) (*) Écrire la matrice de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ puis celle dans la base $\mathcal{F} = \{-e_1, e_1 - e_2, -e_1 + e_2 + 4e_3\}$, où

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, -y + z, 3z).$$

(32) (*/**) **Sans aucun calcul**, déterminer le rang de la matrice ci-dessous. En déduire, toujours sans calcul, une base de son noyau.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Probabilités (élémentaires)

(33) (*/**) Montrer que, si C et D sont deux évènements d'un même espace probabilisé, alors

$$P(C \cup D) \leq P(C) + P(D).$$

En déduire que, si (A_j) est une suite d'évènements du même espace, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \geq P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right).$$

(34) (***) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, ..., A_n$ des évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer, par récurrence sur n (et à l'aide de la formule du crible) que

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \geq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - (n-1).$$

Variables aléatoires réelles

(35) (**) Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. La valeur renvoyée par X a-t-elle plus de chances d'être paire ou impaire ? Quelle réponse élémentaire aurait-on pu proposer si $p = 1/2$?

(36) (*/**) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;n]\!])$. **Montrer** que $E(X) = (n+1)/2$.

(37) (**/***) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. **Montrer**, à l'aide de la formule du binôme, que $E(X) = np$.

(38) (**/***) Soit X une v.a. finie telle que $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$. Montrer que

$$E(X) = \sum_{j=0}^{n-1} P(X > j).$$

(39) (**/***) On effectue des tirages **sans remise** d'une boule dans une urne contenant $N-1$ boules blanches et une boule noire. On note X le rang d'apparition de la boule noire. Montrer soigneusement que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;N]\!])$.

(40) (*) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Montrer que X **admet** une espérance et que $E(X) = 1/p$.

(41) (***/****) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. On suppose que, **sachant** $(X = n)$, la variable aléatoire Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Montrer que $Y \hookrightarrow P(p\lambda)$.

(42) (***/****) Soient X et Y deux v.a. indépendantes de même loi géométrique de paramètre p. Montrer que $\min(X,Y) \hookrightarrow \mathcal{G}(1-(1-p)^2)$.
☞ Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont dites *indépendantes* si et seulement si pour tout $(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = P(X = i)P(Y = j).$$

On commencera par calculer $P(X \geq k)$, puis, notant $Z = \min(X,Y)$, $P(Z \geq k)$ et on utilisera le fait que,

$$P(Z = k) = P(Z \geq k) - P(Z \geq k+1).$$

(43) (*/**Python)) Écrire une fonction d'en-tête `def simul_geo(p):` permettant de simuler une loi géométrique de paramètre p.
Écrire une fonction d'en-tête `def simul_bino(n,p):` permettant de simuler une loi binomiale de paramètres n et p.

Algorithmique. Python

(44) Écrire une fonction Python d'en-tête `def matrix_to_list(M):` qui prend en argument une matrice carrée M étant la matrice d'adjacence d'un graphe $\mathcal{G}$ et qui renvoie la liste d'adjacence du même graphe.

(45) Écrire une fonction Python d'en-tête `def nb_sommets_isoles(L):` qui prend en argument une liste L d'adjacence d'un graphe $\mathcal{G}$ et qui renvoie le nombre de sommets isolés du graphe.

(46) (*/**) Compléter la fonction `tri(L)` ci-dessous, qui prend en argument une liste `L` et renvoie une liste dont les éléments sont ceux de `L` listés par ordre croissant.

```
def tri(L):
    n=len(L)
    for i in range(n):
        i_min=i
        for j in range(i+1, n):
            if L[j]<L[i_min]:
                i_min=......
        aux=L[i]
        L[i]=.......
        L[i_min]=.......
    return L
```

(47) (**) Écrire une fonction `recherche(x, L)` qui prend en argument un réel `x` et une liste `L` (déjà triée par ordre croissant) dont on sait que le premier termes est inférieur (ou égal) à`x` et le dernier supérieur (strict) à `x` et qui renvoie le plus grand terme de la liste `L` qui soit inférieur ou égal à `x`.

(48) (**/***) Écrire une fonction `selection(L)` qui prend en argument une liste `L` et renvoie à la fois un élément `x` sélectionné au hasard (uniformément) dans `L` et la nouvelle liste `U` obtenue à partir de `L` en retirant `x`.

(49) (**) Écrire une fonction `symetrie(P,Q)` qui prend en argument deux listes de même longueur `P=`$[p_0, ..., p_n]$ et `Q=`$[q_0, ..., q_n]$ et qui calcule et renvoie la valeur de la somme `s` où

$$\texttt{s} = \sum_{i=0}^{n} p_i q_{n-i}.$$

(50) (**) Une guirlande électrique est composée de spots nommés de bas en haut S_1, S_2, S_3, S_4 et change d'état de la manière suivante:

- à l'instant $t = 0$, le spot S_1 est allumé;
- si, à l'instant $t = n$ le spot S_1 est allumé, alors un (et un seul) des spots s'allume à l'instant $t = n + 1$, et ceci de manière équiprobable;
- si, à l'instant $t = n$ le spot S_k $(2 \leq k \leq 4)$ est allumé, le spot S_{k-1} s'allume à l'instant $t = n + 1$. On pourra remarquer qu'à chaque instant, un et un seul spot est allumé. On note X la variable aléatoire représentant le premier instant où le spot S_2 s'allume.

Écrire une fonction `spot()` (sans argument) qui simule la variable aléatoire X.

Simple. Basique.

Exercice 1. (*/**)

(1) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que si $p \leq n$ sont deux entiers naturels non nuls, alors $0 \leq x^p \leq 1 + x^n$.
(2) On considère une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que, si X admet un moment d'ordre n, alors X admet aussi un moment d'ordre p pour tout $p \leq n$.

Exercice 2. (**Pour en finir avec les accroissements) On considère la fonction f, dont la courbe est notée C_f, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - 2 + \exp(-x).$$

(1) (a) Calculer

$$\lim_{x \to +\infty} f(x).$$

(b) Montrer que la courbe C_f admet en $+\infty$ une droite asymptote Δ d'équation $y = x - 2$.
(c) Calculer

$$\lim_{x \to -\infty} f(x), \quad \text{puis} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Que pouvez-vous dire sur le comportement asymptotique de la courbe de f en $-\infty$?

(2) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x. Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

(3) Justifier que C_f coupe l'axe des abscisses en exactement deux points d'abscisses α et β, le premier étant positif, le deuxième étant négatif.

On donne $e \approx 2{,}7$. Prouver que $\alpha \in]1, 2[$.

(4) Tracer l'allure de C_f et Δ. On donne $\alpha \approx 1{,}84$ et $\beta \approx -1{,}14$.

(5) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2 - \exp -x$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout entier naturel n.

(a) Montrer que pour tout réel x, on a : $g(x) = x$ si et seulement si $f(x) = 0$.
(b) Calculer la dérivée de g. En déduire le sens de variation de g.
Montrer alors que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n.
(c) Établir que pour tout réel x appartenant à $[1, 2]$: $0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{e}$.
(d) En déduire, en appliquant l'inégalité des accroissements finis que pour tout entier naturel n

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e}|u_n - \alpha|.$$

(e) Montrer par récurrence que

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{\exp(n)}.$$

Calculer $\lim_{n \to +\infty} u_n$.
(f) Compléter le programme ci-dessous afin qu'il permette d'obtenir une valeur approchée de α à 10^{-4} près.

```
u=1
n=0
while ..........
    ......
    u=.......
return ......
```

Exercice 3. (**Pour intégrer l'intégration)

Pour tout entier n on note:

$$I_n = \int_0^1 e^{-x^2}(1-x)^n \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^1 xe^{-x^2}(1-x)^n \mathrm{d}x.$$

(1) (a) Former le tableau de variation sur [0,1] de $x \to xe^{-x^2}$.
(b) En déduire pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{\sqrt{2e}(n+1)}.$$

(c) Etudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) (a) A l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$I_n = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1}J_{n+1}.$$

(b) En déduire la limite de I_n et celle de nI_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4. (*) Dans $\mathbb{R}^4$, on note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique et on considère l'endomorphisme $f\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ défini par

$$f(e_1) = e_1 + e_2 + e_4, \quad f(e_2) = f(e_1) - e_3, \quad f(e_3) = -e_1 + e_2, \quad \text{et} \quad f(e_4) = -3e_1 - 2e_2 + e_3 - 2e_4.$$

(1) Écrire la matrice K de f dans la base $\mathcal{B}$.
(2) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. En déduire $\mathrm{Im}(f)$. Que peut-on dire de l'inversibilité de K?
(3) Déterminer la matrice de $f^2 = f \circ f$ dans la base canonique.
(4) On introduit alors les vecteurs

$$v_1 = e_1, \quad v_2 = f(e_1), \quad v_3 = e_3, \quad v_4 = f(e_3).$$

(a) Montrer que la famille $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.
(b) Exprimer, pour $i = 1, 2, 3, 4$, $f(v_i)$ en fonction de v_1, v_2, v_3 et v_4. En déduire la matrice de f, notée L, dans la base $\mathcal{C}$.

(5) On introduit la matrice P dont les colonnes sont les vecteurs de la base $\mathcal{C}$.
(a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
(b) Que vaut $P^{-1}KP$?

Exercice 5. Un après midi de canicule. Vous êtes allongé.e sur le canapé du salon de votre appartement composé de 2 pièces (une chambre et un salon). La fenêtre du salon est ouverte. Une mouche se balade tranquille dans l'appartement en produisant un bruit bien agaçant comme les mouches savent le faire et qui perturbe votre sieste. Au départ, elle se trouve dans le salon. À chaque seconde, la mouche se déplace selon le protocole suivant:

- Si elle est dans le salon, elle y reste avec probabilité 1/2, sort de l'appartement par la fenêtre avec probabilité 1/4 ou va faire un petit tour dans la chambre avec probabilité 1/4;
- Si elle est dans la chambre, elle y reste avec probabilité 3/4 ou retourne dans le salon avec probabilité 1/4;
- Une fois qu'elle est sortie, elle ne rentre plus et va embêter quelqu'un d'autre.

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, X_n la variable aléatoire qui vaut 0 (resp. 1, resp. 2) si la mouche se trouve dehors (resp. dans le salon, resp. dans la chambre) après n déplacements. En particulier, $X_0 = 1$. Toujours pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) & P(X_n = 1) & P(X_n = 2) \end{pmatrix}, \qquad \Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Écrire le graphe et la matrice d'adjacence A correspondant à la chaîne de Markov (X_n). Que vaut ${}^tA\,{}^t\Pi$? Écrire une relation entre U_n, A et U_0 que l'on démontrera.

(2) (a) Écrire une fonction Python `simul_X(n)` qui simule n déplacements de la mouche et renvoie la *trajectoire* de X_n.

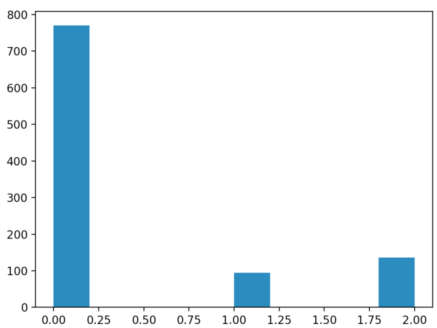
(b) On rajoute les instructions suivantes et on fait varier n en prenant les valeurs $n = 10$, $n = 25$ et $n = 50$ ce qui permet d'obtenir les figures ci-jointes. Que peut-on conjecturer?

```python
n=10 # on fait ensuite varier les valeurs de n
sample=[simul_X(n)[n] for k in range(1000)]

plt.hist(sample)
plt.show()
```

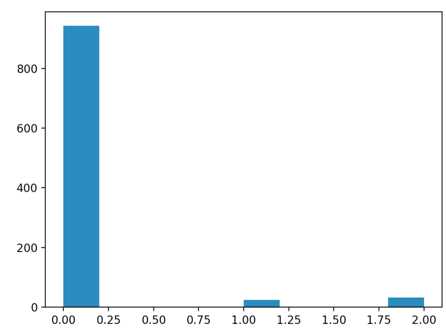
Affichage Python

$n = 10$



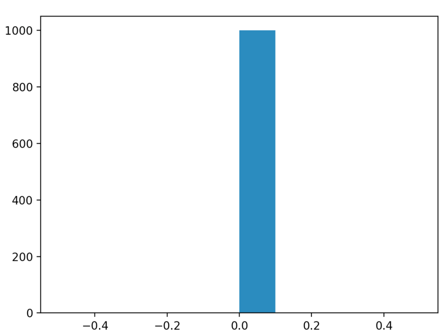
Affichage Python

$n = 25$



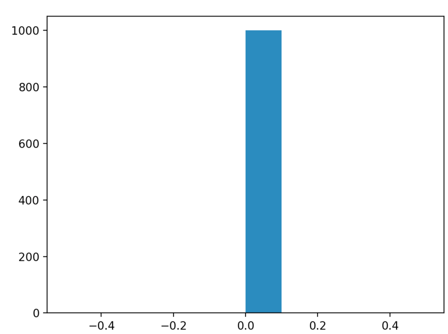
Affichage Python

$n = 50$



Affichage Python

$n = 100$



Exercice 6. (Système différentiel)
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ représenté dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ par la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) On note $v_1 = (2, -1)$ et $v_2 = (-1, 0)$. Montrer que (v_1, v_2) forme une base de $\mathbb{R}^2$.
(2) Déterminer la matrice T de f dans cette base.
(3) On note Q la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de v_1 et v_2 dans la base canonique. Justifier que Q est inversible. Déterminer Q^{-1} et vérifier que $B = QTQ^{-1}$.

On considère le *système différentiel* (Σ) suivant

$$(\Sigma) : \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -x - 4y \\ y' & = & x + 3y \end{array} \right.$$

où x et y désignent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (à valeurs réelles).

Afin de résoudre (Σ) (c'est à dire de déterminer x et y), on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a alors que $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

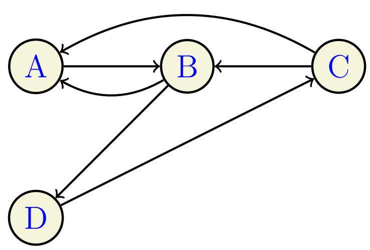
(4) Vérifier que (x, y) est solution de (Σ) si et seulement si $X' = BX$.

(5) On introduit $Z = Q^{-1}X$. On admet que, par linéarité de la dérivation, $Z' = Q^{-1}X'$.
Vérifier que
$$X' = BX \iff Z' = TZ.$$

(6) On note $Z = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Expliciter, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\alpha(t)$ et $\beta(t)$.

(7) Conclure.

Exercice 7. On considère le graphe orienté $\mathcal{G}$ ci-dessous.



(1) Déterminer la matrice M d'adjacence du graphe.
(2) Calculer M^2 et M^3.
(3) Montrer que $\mathcal{G}$ est connexe.

Un problème type concours

Partie 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté par la matrice A dans la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$.

(1) On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:
$$u_1 = (-1, 1, 0, 1), \quad u_2 = (0, -1, 1, 0), \quad u_3 = (0, 1, 1, 0) \quad u_4 = (1, 0, 0, 1).$$
On note $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$.

(a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
(b) Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$.
(c) En déduire une matrice P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ inversible et une matrice T de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ triangulaire telles que $A = PTP^{-1}$.
(*Pour une fin de première année, on donne la matrice T : c'est la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$; il s'agit de la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ exprimées dans $\mathcal{C}$*).

(2) (a) Calculer A^2, A^3, puis vérifier que $A^3 = 4A^2 - 4A$.
(b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, il existe deux réels a_n et b_n tels que
$$A^n = a_n A^2 + b_n A$$
vérifiant, pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$.

(3) (a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,
$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n.$$

(b) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, une expression de a_n en fonction de n.
(c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression de b_n en fonction de n.

(4) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Partie 2

Soient p un entier naturel non nul et G un graphe non pondéré orienté à p sommets. On note s_0, $s_1, \dots, s_{p-1}$ les sommets de G.

(5) (a) Rappeler la définition de la matrice d'adjacence du graphe G.
(b) Soient n un entier naturel non nul, i un entier de $[\![1,p]\!]$ et j un entier de $[\![1,p]\!]$.
Rappeler sans justification l'interprétation du coefficient situé à la ligne i et à la colonne j dans la matrice M^n, où M est la matrice d'adjacence du graphe G.

(6) Dans cette question uniquement, on suppose que $p = 4$ et que la matrice d'adjacence du graphe G est la matrice $M = A - I$, où A est la matrice étudiée dans la Partie 1.

(a) Représenter les sommets et les arêtes du graphe G sous forme d'un diagramme.
(b) Le graphe G est-il connexe? Justifier votre réponse.
(c) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer le nombre de chemins de longueur n menant du sommet s_3 au sommet s_0. (*On distinguera dans l'expression finale les cas n pair et n impair.*)

(7) Dans cette question et les suivantes, on revient au cas général décrit au début de la Partie 2.
Soit s un sommet de G. On dit que le sommet t est un *voisin* de s quand $s \neq t$ et (s,t) est une arête du graphe.
Comme le graphe est orienté, si t est un voisin de s, alors s n'est pas forcément un voisin de t.
On appelle liste d'adjacence du graphe G, une liste de p sous-listes telle que, pour tout entier k de $[\![0, p-1]\!]$, la sous-liste située à la position k contient tous les numéros des sommets voisins de s_k.
Par exemple, la liste d'adjacence du graphe étudié à la question 6 est :

```
L = [[3], [0,2], [0,1], [0]]
```

Écrire une fonction en langage Python, nommée `matrice_vers_liste`, prenant en entrée la matrice d'adjacence `M` d'un graphe G (définie sous forme de listes de listes) et renvoyant la liste d'adjacence de G.

(8) On cherche à écrire une fonction en langage Python permettant d'obtenir la longueur du plus court chemin menant d'un sommet de départ s_i à chaque sommet du graphe G.
On souhaite pour cela appliquer un algorithme faisant intervenir les variables suivantes :

- Une liste `distances` à p éléments, où l'élément situé à la position k sera égal, à la fin de l'algorithme, à la longueur du plus court chemin menant du sommet de départ s_i au sommet s_k.
- Une liste `a_explorer` contenant tous les sommets restant à traiter.
- Une liste `marques` contenant tous les sommets déjà traités.

Nous donnons ci-dessous la description de l'algorithme :

- Initialisation des trois listes décrites ci-dessus :

  - Initialement, chaque élément de la liste `distances` est égal à p, à l'exception du sommet s_i, auquel on affecte la distance 0.
  - La liste `marques` ne contient initialement que le numéro du sommet de départ s_i.
  - La liste `a_explorer` ne contient initialement que le numéro du sommet de départ s_i.

- Tant que la liste `a_explorer` n'est pas vide, on répète les opérations suivantes :
  - Nommer `s` le premier sommet de la liste `a_explorer`, et le retirer de cette liste.
  - Pour chaque voisin `v` du sommet `s` : si `v` n'est pas dans la liste `marques`, on l'ajoute à la fin de la liste `a_explorer`, et on lui affecte une distance égale à `distances[s]+1`.

(a) On considère le graphe orienté G étudié à la question 6.
Donner la valeur de la liste `distances` à l'issue de l'exécution de l'algorithme décrit ci-dessus, lorsqu'on l'applique au graphe G en choisissant s_1 comme sommet de départ.

(b) Recopier et compléter la fonction suivante, prenant en entrée la liste d'adjacence `L` du graphe G et le numéro `i0` du sommet de départ s_i, et renvoyant la liste `distances` après exécution de l'algorithme décrit ci-dessus.

```
def parcours(L, i0):
    p = len(L)
    distances = .....
    distances[i0] = 0
    a_explorer  = .....
    marques = .....
    while ..... :
        s = .....
        .....
        for v in ..... :
            if v not in marques :
                marques.append(v)
                .....
                .....
    return distances
```

(c) Modifier la fonction précédente pour qu'elle renvoie la liste de tous les sommets s pour lesquels il existe un chemin menant du sommet de départ s_i au sommet s.

Un problème de probabilités, type concours

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On prélève au hasard ces n boules une par une et sans remise (afin de vider l'urne).
À la suite de cette expérience, on note, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, u_i le numéro de la boule obtenue au cours du $i-$ème tirage.
Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on dit qu'il y a un record au $i-$ème tirage si

$$u_i > \max\{u_1, \dots, u_{i-1}\},$$

autrement dit, si la boule obtenue au $i-$ème tirage porte un numéro strictement supérieurs aux numéros des boules tirées précédemment. D'autre part, on convient qu'il y a systématiquement un record à l'instant 1.

Pour tout $(i, k) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$, on introduit :

- les évènements R_i : "il y a un record au $i-$ème tirage"

- la variable aléatoire T_i qui prend la valeur la boule obtenue $i-$ème tirage.

Par convention, on a donc $P(R_1) = 1$.

Exemple. *Si $n = 8$ et que l'on obtient, dans cet ordre, les boules numérotés ②①③⑤④⑥⑧⑦, alors il y a un record aux tirages 1,3,4,6 et 7. Ainsi les événements*

$$R_1,\ R_3\ ,R_4\ ,R_6\ ,R_7\ ,[T_1 = 2]\ ,[T_2 = 1]\ ,[T_3 = 3]\ ,[T_3 < 6]\ ,[T_5 < 6]...$$

notamment (ce ne sont pas les seuls), sont réalisés.

Partie I : Simulation de l'expérience avec Python

Afin de modéliser cette expérience en Python, l'urne est représentée par une liste de numéros de boules et cette liste est donc *actualisée* après chaque tirage d'une boule.

On **admet** que la commande `rd.randint(a, b)` renvoie un nombre entier, choisi au hasard uniformément entre les entiers a et $b-1$.

(1) Recopier et compléter la fonction suivante qui, prend en argument une liste `L`, choisit le rang k d'un terme de la liste au hasard de manière équiprobable (parmi ceux disponibles) et renvoie le terme correspondant $x = \mathtt{L}[k]$ ainsi que la liste mise à jour.

```
def selection(L):
    n=len(L) # longueur de la liste
    k=rd.randint(0, n)
    x= .....
    .... # on enlève x de la liste L
    return (x, L)
```

(2) Recopier et compléter le programme ci-dessous qui permet de simuler les pioches successives jusqu'à vider l'urne. Le résultat renvoyé par la fonction est donc la liste ordonnée des numéros des boules piochées.

```
def pioche(n):
    U= [..............] # Urne avant la première pioche
    T=[ ]
    for k in range(n):
        x,U=..........
        T.append(x)
   return T
```

(3) Écrire alors une fonction d'en-tête `def X(n):` qui effectue les n pioches successives dans l'urne et renvoie le nombre de records. On utilisera bien entendu la fonction `pioche` ci-dessus.
(*On rappelle que la commande* `np.max(L)` *renvoie la plus grande valeur de la liste* `L`.)

Partie II : Un record au $i-$ème tirage

On modélise l'expérience par l'ensemble Ω des $n-$uplets de numéros de boules piochées, dont les composantes sont donc deux à deux distinctes et on considère P l'équiprobabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

(4) Quel est le cardinal de Ω?

(5) Combien y a-t-il de tirages de n boules successivement sans remise dont la dernière boule est celle numérotée n?
En déduire que $P(R_n) = \dfrac{1}{n}$.

(6) Soit $i \in [\![2, n]\!]$.
   (a) Que vaut $P(R_i \cap [T_i = k])$ lorsque $k \in [\![1, i-1]\!]$?
   (b) Justifier que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $R_i \cap [T_i = k] = \left(\bigcap_{j=1}^{i-1} [T_j < k] \right) \cap [T_i = k]$.
   (c) Soit $j \in [\![1, i-2]\!]$. Sachant que l'on a déjà pioché j boules avec un numéro strictement inférieur à k, combien en reste-t-il ? Et combien reste-t-il de boules au total ?

   En déduire que
$$P(R_i \cap [T_i = k]) = \frac{(k-1)!}{(k-i)!} \times \frac{(n-i)!}{n!}.$$
   (d) Montrer alors que
$$P(R_i) = \frac{1}{i} \sum_{k=i}^{n} \frac{\binom{k-1}{i-1}}{\binom{n}{i}}.$$
   (e) Justifier que
$$\sum_{k=i+1}^{n} \left(\binom{k}{i} - \binom{k-1}{i} \right) = \binom{n}{i} - 1.$$
   (f) En déduire enfin que $P(R_i) = \dfrac{1}{i}$.

On vient donc de montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(R_i) = \dfrac{1}{i}$: il y a une chance sur i qu'il y ait un record au $i-$ème tirage.

Partie III : Une variable aléatoire

(7) Déterminer $X_n(\Omega)$.

(8) Justifier que $P(X_n = 1) = \dfrac{1}{n}$.

(9) (a) Écrire l'événement $[X_n = n]$ en fonction des événements de la famille $(B_{i,k})_{1 \leq i,k \leq n}$.
   (b) En déduire $P(X_n = n)$.

(10) Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, notons E_i l'événement "les $i-1$ premiers tirages amènent des boules dont le numéro est strictement inférieur à n et la première boule tirée porte le plus grand numéro d'entre eux".

   (a) Justifier à l'aide d'arguments combinatoires que
$$P(E_i) = \frac{\binom{n-1}{i-1} \times (i-2)!}{\frac{n!}{(n-i+1)!}}$$
   et en déduire que $P(E_i) = \dfrac{n-i+1}{n(i-1)}$.
   (b) Justifier alors que
$$[X_n = 2] = \bigcup_{i=2}^{n} [E_i \cap B_{i,n}].$$
   (c) En déduire que
$$P(X_n = 2) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$
   (d) Écrire une fonction en Python d'en-tête `def proba_X(n):` qui prend en argument n et qui calcule et renvoie $P(X_n = 2)$ à l'aide de la formule ci-dessus.

©Bill Watterson, *Calvin & Hobbes*

Si le délai de réponse est naturellement rallongé pendant la période estivale, la communication reste maintenue et on invite néanmoins à lister les difficultés rencontrées clairement formulées et à prendre contact par courriel (`frederic@gaunard.com`) afin de ne pas rester *bloqué.e* trop longtemps. En particulier, les échanges peuvent être réguliers lors de la deuxième quinzaine du mois d'Août. (Il est par ailleurs capital de s'y *remettre* (bien) avant la rentrée, pour une reprise sous les meilleures auspices.)

Bonnes et belles vacances à tou.te.s!