Math ECG 2. 2023-2024

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Révisions

Retour sur le programme avec des exercices de synthèse

.

On propose quelques exercices de niveaux de difficulté différents et qui essaient de brasser tout le programme, en faisant notamment apparaître des notions que l'on n'aurait pas rencontrées depuis quelques temps.
Bien entendu, faire ces exercices n'est aucunement suffisant et il n'y a aucun caractère exhaustif dans cette sélection : on ne s'en contentera donc pas !

Exercice 1

Niveau de difficulté : $\star\star\star$

Notions abordées

- Couples de V.A.
- Fonctions de deux variables

Énoncé

(1) (**Question de cours**.) Qu'appelle-t-on un système de Cramer ? Interprétation matricielle.

On considère trois variables aléatoires X, Y et Z définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on suppose que $X^2, Y^2, Z^2, XY, YZ, ZX$ admettent toutes une espérance. On suppose également que

$$E(X^2)E(Y^2) - E(XY)^2 \neq 0.$$

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$f(x, y) = E((Z - xX - yY)^2).$$

(2) (a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle y admet un unique point critique que l'on notera (x_0, y_0).
(b) Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $E((Z - x_0X - y_0Y)(aX + bY)) = 0$.
(c) En déduire l'égalité

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + E\left(((x_0 - x)X + (y_0 - y)Y)^2\right).$$

(d) Conclure quant à la présence d'éventuels *extrema*.
(e) Que peut-on dire du spectre de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} E(X^2) & E(XY) \\ E(XY) & E(Y^2) \end{pmatrix} \quad ?$$

(3) On considère deux variables aléatoires indépendantes X, Y de même loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$. On pose $Z = X^2$ et on admet que le résultat du cours sur l'espérance du produit de variables aléatoires indépendantes discrètes reste vrai dans le cas de variables aléatoires à densité.
Déterminer (x, y) tel que $E((Z - xX - yY)^2)$ soit minimale.

Exercice 2

Niveau de difficulté : $\star\star$

Notions abordées

- Suites récurrentes
- Séries télescopiques
- Produits

Énoncé

Dans cet exercice, on admet le résultat ci-dessous, appelé *lemme de Cesaro*.
Si une suite (a_n) *converge vers le réel* ℓ*, alors*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}a_j=\ell$$

On se propose d'étudier la suite (u_n) définie, pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \frac{u_n^2+1}{2}\end{array}\right.$.

(1) (a) Montrer que, pour tout entier naturel n on a $0\leqslant u_n<1$.
(b) Étudier les variations de la suite (u_n).
(c) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

(2) Pour tout entier naturel n on pose, $v_n=1-u_n$.

(a) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{v_{n+1}}-\frac{1}{v_n}\right)=\frac{1}{2}.$$

(b) Utiliser le *lemme de Cesaro* pour trouver un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.
(c) En déduire que

$$u_n=1-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

(d) La série $\sum v_n$ est-elle convergente?

(3) (a) Écrire une fonction Python d'en-tête `def u(n)` qui renvoie la valeur de u_n.
(b) En déduire un programme, qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a $1-u_n<10^{-3}$.

On introduit maintenant la suite (p_n) définie, pour $n\in\mathbb{N}^*$, par

$$p_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2}{k}\right)^{\frac{k}{n}}$$

et on note $\omega_n=\ln(p_n)$.

(4) (a) Justifier que la suite (ω_n) est bien définie.
(b) Expliciter une suite (a_n) telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$\omega_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

(c) Déterminer, à l'aide d'un développement limité usuel, la limite de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.
(d) À l'aide du *lemme de Cesaro*, en déduire la limite de p_n lorsque $n\to+\infty$.

Exercice 3

Niveau de difficulté : ⋆⋆

Notions abordées

- Python. Algèbre linéaire
- Graphes. Matrice d'adjacence, Théorème de connexité.

Énoncé

On dispose du programme Python suivant

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

def test_mystere(L) :
    n=len(L)
    M=np.array([[0]*n]*n)
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if j in L[i] :
                M[i,j]=1
    A=np.array([[0]*n]*n)
    for k in range(n):
        A=A+al.matrix_power(M, k)
    for in range(n):
        for j in range(n):
            if A[i,j] <= 0 :
                return 0
    return 1
```

Que va renvoyer l'appel ci-dessous ?

```
test_mystere([[1], [0, 3], [0, 1, 4], [2], [ ] ])
```

Exercice 4

Niveau de difficulté : ⋆⋆

Notions abordées

- Continuité. Dérivabilité.
- Développements limités.
- Suite d'intégrales impropres.
- Fonction de répartition de $\mathcal{N}(0;1)$.
- Changement de variable.
- `Python`. Calcul du premier entier vérifiant une condition donnée.

Enoncé

(1) Soit N la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$, à valeurs réelles, telle que :

$$N(x) = x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x).$$

(a) Montrer que la fonction N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.

(b) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $\ln(1-x) \leq -x$.

(c) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $N'(x) \leq 0$.
(d) En déduire le signe de N sur l'intervalle $[0,1[$.

(2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} -2\dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1-x)$.
(b) En déduire $\lim_{x\to 0} f(x)$.
(c) En déduire que la fonction f est continue sur $[0,1[$.
(d) Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que pour tout $x \in]0,1[$, on a : $f'(x) = -2\dfrac{N(x)}{x^3(1-x)}$.
(e) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0,1[$.
En déduire que f réalise une bijection strictement croissante de $[0,1[$ dans $[1,+\infty[$.

(3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1[$:

$$g_n(x) = \exp\left(-\frac{nx^2}{2}f(x)\right).$$

(a) Montrer, à l'aide de la question 2e, que pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$0 \leq g_n(x) \leq \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right).$$

(b) En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x$. On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$,

$$\frac{g_{n+1}(x)}{g_n(x)} \leq 1.$$

(d) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
(e) On note φ une densité et Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
Rappeler la formule définissant φ puis dresser le tableau de variation complet de Φ sur $\mathbb{R}$ en précisant la valeur de $\Phi(0)$.
(f) Montrer l'encadrement :

$$0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left(\Phi\left(\sqrt{n}\right) - \frac{1}{2}\right).$$

On pourra utiliser la question 3a puis effectuer le changement de variable $u = x\sqrt{n}$.
(g) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

(h) Écrire un programme en `Python` qui détermine une valeur de n pour laquelle $I_n \leq 10^{-1}$.

(i) Déterminer à présent par le calcul une valeur de n pour laquelle $I_n \leq 10^{-1}$. *On donne* $50\pi \approx 157.08$.

Exercice 5

Niveau de difficulté : $\star\star$

Notions abordées

- Séries. Comparaison séries/intégrales
- Intégration par parties
- Valeur approchée avec Python

Énoncé

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$a_n = \frac{n-1}{n^3+1}, \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

(1) Montrer que l'on a, pour $n \geqslant 2$:
$$0 < a_n < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$
En déduire que la série $\sum a_n$ est convergente. On notera A sa somme (qu'on ne cherchera pas à calculer explicitement).

(2) Donner, en fonction de n, un majorant très simple de $A - A_n$.

(3) À partir de quelle valeur de n, peut-on affirmer que A_n est une valeur approchée de A à moins de 10^{-4} près ?

(4) Pour accélérer la convergence, on pose :
$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - b_n.$$
(a) Calculer b_n en fonction de n et vérifier que l'on a :
$$\forall n \geqslant 2, \quad 0 < b_n < \frac{6}{n^5} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{6}{t^5}\mathrm{d}t$$
(b) Vérifier que l'on a :
$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$
et
$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right).$$
(c) Pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$, on pose
$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$
Exprimer B_n en fonction de n et de A_n, en déduire que la suite (B_n) est convergente.

(d) Soit B la limite de la suite (B_n). Montrer que : $B - B_n \leq \dfrac{3}{2n^4}$.
Écrire un programme qui calcule et affiche une valeur de B à 10^{-4} près.

Exercice 6

Niveau de difficulté : $\star\star$

Notions abordées

- Variables aléatoires à densité
- Simulation par inversion
- Bienaymé-Tchebychev, estimation ponctuelle

Énoncé

Partie 1 : étude de quelques propriétés d'une variable aléatoire

Dans cette exercice, θ désigne un réel élément de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$. On considère la fonction f définie par
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta x^{1+\frac{1}{\theta}}}, & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0, & \text{si } x < 1 \end{cases}.$$

(1) Montrer que f peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition.

(2) Montrer que X possède une espérance et une variance et les déterminer.
(3) Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F(x)$ en fonction de x et θ.

(4) (a) Montrer que l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$ possède une seule solution, notée M_e, que l'on déterminera.
(b) Montrer que

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \qquad 2^x(1-x) \leqslant 1.$$

(c) Comparer $E(X)$ et M_e.

(5) Soit a un réel supérieur ou égal à 1 et b un réel strictement positif.

(a) Montrer que $P_{(X>a)}(X > a+b) = \left(\dfrac{a}{a+b}\right)^{1/\theta}$.
(b) Déterminer la limite de cette quantité lorsque a tend vers $+\infty$. Interpréter cette dernière valeur si l'on admet que la variable X représente la durée de vie d'un certain appareil.

Partie 2 : simulation de X

(6) On pose $Y = \ln(X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note G sa fonction de répartition.

(a) Pour tout réel x, exprimer $G(x)$ à l'aide de la fonction F.
(b) En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

(7) Écrire des commandes Python permettant de simuler X.

Partie 3 : estimation de θ

On suppose dans la suite que le paramètre θ est inconnu et on considère n variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_n$ toutes définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que Y.

(8) On pose $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

(a) Expliciter l'espérance de T_n.
(b) Calculer ensuite $V(T_n)$.

(9) Montrer alors que

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} P\left(|T_n - \theta| > \varepsilon\right) = 0.$$

Interpréter ce résultat.

Exercice 7

Niveau de difficulté : $\star\star\star$

Notions abordées

- Inégalités probabilistes
- Optimisation

Énoncé

On considère une variable aléatoire X admettant une espérance, notée m, et une variance, notée σ^2.

(1) (**Question de cours**.) Rappeler les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

Soient $\alpha \geq 0$ et $\lambda \geq 0$ fixés.

(2) Montrer que $P(X - m \geq \alpha) = P(X - m + \lambda \geq \alpha + \lambda)$.
(3) Déterminer $E((X - m + \lambda)^2)$.
(4) En déduire que
$$P(X - m \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(\alpha + \lambda)^2}.$$
(5) Étudier les variations (et extremums) sur $[0; +\infty[$ de
$$\varphi : \ \lambda \mapsto \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(\alpha + \lambda)^2}.$$
(6) En déduire alors que pour un bon choix de λ, on a l'inégalité de *Cantelli*,
$$P(X - m \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha^2}.$$
(7) Avec la même méthode, montrer que
$$P(X - m \leq -\alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha^2}.$$
(8) Montrer qu'on a
$$P(|X - m| \geq \alpha) \leq \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha^2}.$$
Cette inégalité est-elle meilleure que celle de Bienaymé-Tchebychev?

Exercice 8

Niveau de difficulté : $\star$

Notions abordées

- Réduction
- Fonctions de deux variables

Énoncé

On considère la matrice carrée réelle d'ordre 3
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer le rang puis le noyau et de A. En déduire que 0 est valeur propre de A.

(2) (a) Justifier que la matrice A est diagonalisable.
(b) Vérifier que 4 et 6 sont deux valeurs propres de A et déterminer les sous espaces propres associés.
(c) Déterminer une matrice Q inversible et une matrice D diagonale dont les valeurs sont rangées dans l'ordre croissant telles que
$$A = QDQ^{-1}.$$

(3) Soient α, β et γ trois nombres réels non nuls et P la matrice définie par : $P = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ 2\alpha & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.

(a) Montrer en utilisant la question précédente que P est inversible.

(b) Calculer le produit $P \cdot {}^t P$ et en déduire l'existence de valeurs de α, β et γ telles que ${}^t P = P^{-1}$. On se placera dans cette situation dans la suite de l'exercice.
(c) Justifier que $A = P \cdot A' \cdot {}^t P$.

Soient x, y et z trois réels, on définit les matrices colonnes et lignes respectives

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad {}^t X = (x, y, z)$$

et on pose

$$g(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + 4xz - 4yz + 2z^2.$$

(4) (a) Montrer que : ${}^t X \cdot A \cdot X = g(x, y, z)$
(b) Montrer que la transposée de la matrice $\left({}^t P \cdot X\right)$ est $\left({}^t X \cdot P\right)$.
(c) En déduire que

$$g(x, y, z) = 4y'^2 + 6z'^2, \qquad \text{où on a posé} \qquad {}^t P.X = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

(5) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = g(x, y, y^2), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Expliciter $f(x, y)$ et justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
(b) Déterminer les points critiques de f.
(c) Former la matrice hessienne en chacun des points critiques précédents. Que peut-on conclure quant à la nature de ces points critiques?
(d) Montrer en utilisant la question **(4)(c)** que $(0, 0)$ est un minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9

Niveau de difficulté : $\star\star$

Notions abordées

- Équivalents
- Simulation sous Python.
- Lois usuelles discrètes

Énoncé

Une urne contient des boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher. on pioche indéfiniment et une par une, avec remise, des boules dans cette urne. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le numéro du tirage où, pour la première fois, chaque boule a été tirée au moins une fois.

(1) Écrire une fonction, en Python, d'en tête `def simul_X(n)` qui calcule et renvoie une simulation de X.
(2) En introduisant les variables Y_i "nombre de lancers pour avoir i boules distinctes" et $\Delta_i = Y_i - Y_{i-1}$ (si $i \geq 2$) et $\Delta_1 = Y_1$, déterminer, en fonction de n, $E(X)$ puis expliciter un équivalent de $E(X)$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 10

Niveau de difficulté : $\star$

Notions abordées

- V.A à densité
- Convergence en loi

Énoncé

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une variable aléatoire X_n de densité f_n vérifiant les propriétés suivantes

- f_n est continue sur $\mathbb{R}$;
- f_n est nulle sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\left[\frac{2}{n}, +\infty\right[$;
- f_n est affine sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$.

(1) Dessiner la courbe de f_n.
(2) Étudier la convergence en loi de (X_n).

Exercice 11

Niveau de difficulté : $\star\star$

Notions abordées

- Intégration généralisée
- Algèbre Linéaire des des espaces de polynômes

Énoncé

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2 et $E = \mathbb{R}_n[x]$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

(1) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} P(t)\mathrm{e}^t \mathrm{d}t$ converge pour tout $P \in E$.

On note alors

$$T(P) : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{x} P(t)\mathrm{e}^t \mathrm{d}t$$

(fonction définie sur $\mathbb{R}$). Soit alors T l'application définie sur E, par $T : P \mapsto T(P)$.

(2) Montrer que T est linéaire.

(3) Déterminer $\mathrm{Ker}(T)$.

(4) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $e_k = X^k$.

 (a) Calculer $T(e_0)$.
 (b) Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a : $T(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)T(e_k)$.
 (c) En déduire que, pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $T(e_k) - e_k \in \mathrm{vect}(e_0, \ldots, e_{k-1})$.
 En déduire que T est un endomorphisme de E.

(5) Montrer que $(\mathrm{Id} - T)^{n+1} = 0$, où Id désigne l'endomorphisme identité de E.

(6) La matrice M de T dans la base canonique est-elle diagonalisable?

(7) Expliciter une expression de T^{-1} (comme polynôme en T).

Exercice 12

Niveau de difficulté : $\star\star$

Notions abordées

- Dérivabilité
- Fonction définie par une intégrale

Énoncé

(1) (**Question de cours**). Soit une fonction f définie sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$. Rappeler la définition de la dérivabilité de f en x_0.

(2) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On note F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} f(0), & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t, & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

(a) Montrer, pour tout réel x non nul, l'égalité $g(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{F(x) - F(0)}{x} - \dfrac{F(-x) - F(0)}{x}\right)$.

(b) En déduire que g est continue en 0.
(c) Montrer enfin que g est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13

Niveau de difficulté : $\star$

Notions abordées

- Python.
- Statistiques bivariées.

Énoncé

Sur le marché des véhicules d'occasion, on observe en général une baisse du prix de revente (ou décote) d'un véhicule lorsque le nombre de kilomètres parcourus augmente. Une bonne estimation de cette baisse de prix permet au vendeur de fixer avec précision le prix de revente d'un véhicule.

Soit $n \geq 1$ un entier. On suppose qu'on dispose des informations suivantes concernant n annonces de véhicules d'occasion.
Ces informations sont stockées sous forme de tableaux Numpy à une dimension et à n éléments :

- Le tableau Numpy nommé `km` contient, pour chaque annonce, le nombre de kilomètres parcourus par le véhicule vendu depuis sa mise en circulation.
- Le tableau Numpy nommé `rapport` contient, pour chaque annonce, le quotient du prix de revente d"occasion du véhicule par son prix de vente neuf.

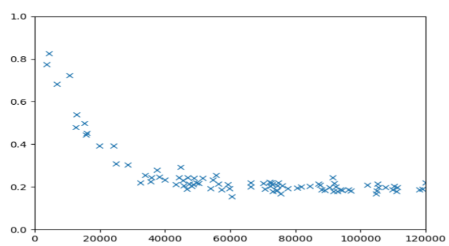
Ainsi, les éléments du tableau rapport sont des *flottants* compris entre 0 et 1. Les données contenues dans ces variables sont classées dans le même ordre. Ainsi, pour tout indice i entre 0 et $n-1$, `km[i]` et `rapport[i]` correspondent respectivement au kilométrage et au rapport de prix occasion/neuf d'une même annonce.

(1) Écrire une suite d'instructions Python permettant d'afficher le rapport de prix occasion/neuf du véhicule ayant le plus grand kilométrage parmi toutes les annonces (ou de l'un de ces véhicules si plusieurs annonces possèdent un kilométrage maximal).

(2) Écrire une suite d'instructions Python permettant de représenter graphiquement, sous forme de nuage de points, les points du plan de coordonnées (`km[i], rapport[i]`), où i décrit l'ensemble des indices de 0 à $n-1$.

(3) Les instructions données à la question précédente permettent d'obtenir la figure représentée ci-dessous.

Affichage Python



(a) Une approximation par régression linéaire vous semble-t-elle pertinente pour modéliser l'évolution du prix des véhicules d'occasion (rapporté au prix neuf) en fonction de leur kilométrage ?

(b) On calcule le coefficient de corrélation linéaire `rho` de la série statistique double (`km, rapport`).
Parmi les quantités suivantes, en justifiant votre réponse, indiquer la valeur obtenue.
(i) `rho = 0.113`
(ii) `rho = -0.406`
(iii) `rho = 0.917`

On étudie ensuite deux variables statistiques quantitatives x et r. On souhaite expliquer la dépendance de r par rapport à x à l'aide d'une relation exponentielle de la forme :

$$r = ae^{-cx} \qquad (*)$$

où a et c sont des réels que l'on cherche à déterminer, avec $a > 0$.
On dispose pour cela de deux séries statistiques $(x_1, x_2, ..., x_n)$ et $(r_1, r_2, ..., r_n)$ représentant des mesures des variables x et r respectivement.

(4) On pose $y = \ln(r)$.
Montrer que les variables x et r vérifient la relation $(*)$ si et seulement si x et y vérifient une relation de la forme $y = \alpha x + \beta$, où α et β sont des paramètres réels que l'on exprimera en fonction de a et c.

On rappelle que la droite de régression linéaire de y par rapport à x a pour équation: $y = \frac{s_{x,y}}{s_x^2}(x - \overline{x}) + \overline{y}$, où

- $s_{x,y}$ désigne la covariance empirique de la série statistique double (x, y);
- $\overline{x}$ et $\overline{y}$ désignent les moyennes des séries statistiques x et y respectivemen ;
- s_x^2 désigne la variance empirique de la série statistique x.

(5) Rappeler les formules mathématiques définissant $\overline{x}$, $\overline{s}_x^2$ et $s_{x,y}$ en fonction de n, $x_1, ..., x_n$ et $y_1, ..., y_n$.
Rappeler les formules de Koenig-Huygens permettant de reformuler s_x^2 et $s_{x,y}$.

(6) Exprimer a et c en fonction de $\overline{x}$, $\overline{y}$, s_x^2 et $s_{x,y}$.

(7) Recopier et compléter la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie la covariance empirique des séries statistiques x et y fournies en argument d'entrée sous forme de tableaux Numpy à une dimension.

```
def covariance(x, y) :
    prod = x*y
    return ..........
```

(8) Recopier et compléter la fonction Python suivante, prenant en arguments d'entrée les séries statistiques x et r, pour qu'elle renvoie des valeurs approchées des paramètres a et c de la relation $(*)$.

```
def ajustement_exp(x,r) :
    y = np.log(r)
    moy_x , moy_y = np.mean(x), np.mean(y)
    cov_xy = covariance (x,y)
    var_x = .......... # variance de x
    c = ..........
    a = ..........
    return a , c
```

Exercice 14

Niveau de difficulté : $\star\star\star$

Notions abordées

- Lois normales

Énoncé

Soient $X_0, X_1, ..., X_n, ...$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $\theta \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1, 1\}$.
On définit une nouvelle suite (Y_n) comme suit

$$Y_0 = X_0, \qquad \forall n \geq 0, \quad Y_{n+1} = \theta Y_n + X_{n+1}.$$

(1) Écrire une fonction en Python permettant de simuler Y_n.
(2) Déterminer la loi de Y_n.
(3) Comment vérifier le résultat précédent avec Python?

Exercice 15

Niveau de difficulté : $\star\star\star$

Notions abordées

- Python.
- Graphes
- Probabilités discrètes

Énoncé

La fonction Python ci-dessous permet de générer une graphe (non orienté, non pondéré) aléatoire. Plus précisément, prenant en argument une liste de sommet S, elle renvoie une liste d'adjacence générée aléatoirement par les commandes qui suivent.

```
def graphe_aleatoire(S, p):
    n=len(S)
    l=[ [ ] for k in range(n)]
    for i in range(n-1):
        for j in range(i+1, n):
            k=rd.geometric(p)
            if np.floor(k/2)==k/2 :
                l[i].append(S[j])
                l[j].append(S[i])
    return l
```

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et S une liste de n sommets. Calculer, en fonction de n et p, la probabilité qu'un graphe aléatoire généré par cette fonction à partir de S ait un nombre d'arêtes maximal.

Exercice 16

Niveau de difficulté : $\star\star$

Notions abordées

- Suites usuelles
- Couples de v.a.d

Énoncé

Pour toutes suites numérique $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$, on définit la suite $u \star v = w$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \, v_{n-k}.$$

(1) Pour tout entier naturel n, calculer w_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :

$$(i)\ u_n = 2 \text{ et } v_n = 3, \qquad (ii)\ u_n = 2^n \text{ et } v_n = 3^n, \qquad (iii)\ u_n = \frac{2^n}{n!} \text{ et } v_n = \frac{3^n}{n!}.$$

(2) Écrire un programme en Python qui demande à l'utilisateur une valeur de l'entier naturel n, qui calcule et affiche les valeurs $w_0,\ w_1,\ \dots,\ w_n$, où les suites u et v sont définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \ln(n+1) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n+1}.$$

(3) Dans cette question, la suite u est définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

et v est une suite de réels positifs, décroissante à partir du rang 1 et de limite nulle.

(a) Établir, pour tout couple d'entiers naturels (n, m) vérifiant $n < m$, l'inégalité:

$$\sum_{k=n+1}^{m} u_k \leqslant u_n.$$

(b) Soit n un entier strictement supérieur à 1. Prouver les inégalités:

$$w_{2n} \leqslant v_0 \, u_{2n} + 2v_n + v_1 \, u_n \quad \text{et} \quad w_{2n+1} \leqslant v_0 \, u_{2n+1} + 2v_{n+1} + v_1 \, u_n$$

(c) En déduire que les deux suites (w_{2n}) et (w_{2n+1}) convergent vers 0 ainsi que la suite (w_n).

(d) Soit u' la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u'_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

À l'aide de la question précédente, montrer que la suite $u' \star v$ est convergente et de limite nulle.

On note A l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}).$$

(4) Montrer que toute suite décroissante de réels positifs est élément de A et qu'une suite strictement croissante ne peut appartenir à A.

(5) Soit $z = (z_n)$ une suite réelle vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + z_{n-1}).$$

(a) Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β telles que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad z_n = \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^n .$$

(b) En déduire qu'il existe des suites appartenant à A et non monotones.

(6) Soit $a = (a_n)$ un élément de A et b la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n .$$

On définit alors la suite c par $c_0 = a_0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad c_n = a_n + \frac{1}{2} a_{n-1}.$$

(a) Montrer que la suite c est décroissante à partir du rang 1 et qu'elle converge vers un nombre ℓ que l'on ne cherchera pas à calculer.

(b) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} = a_n.$$

Que peut-on en déduire pour les suites $b \star c$ et a?

(c) Soit ε la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \varepsilon_n = c_n - \ell$$

et d la suite $b \star \varepsilon$.
Montrer que la suite d converge vers 0.

(d) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité

$$d_n = a_n - \frac{2}{3}\ell \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

En déduire que la suite a converge et préciser sa limite.

(7) **Loi de la somme de v.a.d indépendantes**.

(a) On considère deux distributions de probabilités $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ (que l'on associe respectivement à deux variables aléatoires X et Y supposées **indépendantes**). Montrer que la loi de $X + Y$ est donnée par $u \star v$.

(b) Retrouver alors le résultat de la question $(1) - (iii)$ de par un choix adéquat des lois de X et de Y.

(c) Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que la variable aléatoire 2^{-Z} admet une espérance et que celle-ci vaut

$$\mathrm{E}\left(2^{-Z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P([Z = n]) \left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

On note $r(Z)$ cette espérance.

(d) Que peut-on dire des variables aléatoires 2^{-X} et 2^{-Y}?
En déduire l'égalité

$$r(X + Y) = r(X) r(Y).$$

(e) On considère une suite (X_n) de v.a.i.i.d, à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Pour tout entier naturel non nul q, on désigne par S_q la variable aléatoire définie par

$$S_q = \sum_{i=1}^{q} X_i.$$

Établir l'égalité

$$r(S_q) = (r(X_1))^q .$$

(8) **Une formule sommatoire**.

(a) Montrer que la suite $u = (u_n)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

est une distribution de probabilité. On note Z une variable aléatoire telle que $P(Z = n) = u_n$. Calculer alors le nombre $r(Z)$.

(b) On suppose que (X_n) est une suite de v.a.i.i.d de même loi que Z et, pour tout entier naturel non nul q, on désigne encore par S_q la variable

$$S_q = \sum_{i=1}^{q} X_i.$$

En admettant[1], pour tout entier naturel non nul q, l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+q}{q} = \binom{n+q+1}{q+1},$$

montrer par récurrence que la loi de S_q est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P([S_q = n]) = \binom{n+q-1}{q-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+q}.$$

(c) Pour tout entier naturel non nul q, calculer le nombre $r(S_q)$ et en déduire la relation

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+q-1}{q-1} \left(\frac{1}{4}\right)^{n} = \left(\frac{4}{3}\right)^{q}.$$

(9) **Un exemple concret**.

On admet, dans cette question, que la variable aléatoire Z définie précédemment représente le nombre de petits devant naître une même année d'un couple de kangourous.

Chaque petit kangourou a la même probabilité $1/2$ d'être mâle ou femelle, indépendamment des autres. On note F la variable aléatoire égale au nombre de femelles devant naître cette même année.

(a) Préciser, pour tout entier naturel n, la loi conditionnelle de F sachant $[Z = n]$.

(b) À l'aide de la formule obtenue en 8c, montrer que la loi de F est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P([F = n]) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n}.$$

(c) Justifier l'existence des espérances $E(Z)$ et $E(F)$ des variables aléatoires Z et F, puis vérifier l'égalité $E(Z) = 2\,\mathrm{E}(F)$.

Exercice 17

Niveau de difficulté : $\star\star$

Notions abordées

- Applications linéaires sur des matrices. Trace Déterminant.
- Fonctions de deux variables

[1] Égalité classique que l'on rencontre dans pléthore de sujets et qu'il faut savoir démontrer

Énoncé

Toutes les matrices de cet exercice sont des éléments de l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit les deux applications suivantes, notées d et t,

$$d\ :\ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & ad-bc \end{array}, \qquad \text{et} \qquad t\ :\ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & a+d \end{array}.$$

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on appellera $d(A)$ le *déterminant* de A et $t(A)$ sa *trace*.

(1) **Propriétés de la trace**.

- (a) Montrer que t est une application linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
- (b) Déterminer l'image de t.
- (c) En déduire la dimension du noyau de t.
- (d) Établir que si A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on a: $t(AB) = t(BA)$.
- (e) Soit P une matrice carrée de taille 2 inversible. Montrer que $t(P^{-1}AP) = t(A)$.
- (f) En déduire que deux matrices semblables ont la même trace. La réciproque est-elle vraie?

(2) **À propos du déterminant**.

- (a) Calculer $d(2I)$. En déduire que l'application d n'est pas linéaire.
- (b) Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Établir la formule: $d(AB) = d(A) \times d(B)$.
- (c) On suppose que P est une matrice carrée de taille 2 inversible. Montrer que $d(P)$ est non nul.
- (d) Soit P une matrice carrée de taille 2 inversible. Montrer que $d(P^{-1}AP) = d(A)$.
- (e) En déduire que deux matrices semblables ont le même déterminant. La réciproque est-elle vraie?

(3) **Lien entre les valeurs propres, la trace et le déterminant.**

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable de spectre $\{\lambda_1, \lambda_2\}$.

- (a) Utiliser les questions (1f) et (2e) pour montrer que
$$\lambda_1 + \lambda_2 = t(A), \qquad \text{et} \qquad \lambda_1\lambda_2 = d(A).$$
- (b) Retrouver ce résultat avec une autre méthode, par identification de polynômes.

On considère l'application $F : U =]1; +\infty[^2 \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $(x, y) \in]0; +\infty[^2$ par :

$$F(x, y) = \frac{\ln(x)}{y} + \frac{\ln(y)}{x}$$

(4) Représenter graphiquement U.

(5) Justifier que F est de classe C^2 sur l'ouvert U.

(6) Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x, y) de $U =]0; +\infty[^2$.

(7) On introduit la fonction φ définie sur $[0; +\infty[$ par

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^2 \ln(t), & \text{si } t > 0 \\ 0, & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

- (a) Montrer que φ est continue sur $[0; +\infty[$.
- (b) Montrer que φ est dérivable en 0 et préciser $\varphi'(0)$. En déduire que φ est dérivable sur $[0; +\infty[$.
- (c) Montrer φ réalise une bijection de $]1; +\infty[$ sur un intervalle à préciser.

(8) Montrer que $(x,y) \in U$ est un point critique de F si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{ccc} \varphi(x) & = & \varphi(y) \\ \dfrac{1}{xy} & = & \dfrac{\ln(x)}{y^2} \end{array}\right.$$

(9) En déduire que (e,e) est le seul point critique un point critique de F sur U.

(10) Calculer les dérivées partielles secondes de F en tout (x,y) de U.

(11) Utiliser la question (3) pour déterminer la nature du point critique précédent. En déduire que F ne présente pas d'extremum (local ou global) sur U.

(12) Qu'en est-il si on considère F sur $\overline{U} = [1;+\infty[\times[1;+\infty[$? (*On pourra évaluer F en* $(1,1)$.)

(13) La fin de l'exercice vise à obtenir la preuve de la réciproque de la Question (2c).

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non colinéaire à I. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ représenté par A dans la base canonique (e_1, e_2). On introduit $w = e_1 + e_2$.

(a) Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^2$,
$$f^2(u) = t(A)f(u) - d(A)u.$$

(b) En déduire un polynôme annulateur de A.

(c) (i) Montrer, par l'absurde, que e_1 et e_2 ne peuvent pas être simultanément vecteurs propres de f associés à la même valeur propre.
(ii) Montrer que e_1, e_2 et w ne peuvent être simultanément vecteurs propres de f.

(d) En déduire qu'il existe au moins un vecteur non nul x de $\mathbb{R}^2$ tel que la famille $(x, f(x))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.

(e) En déduire, à l'aide de la question (13a) l'expression de la matrice M représentant u dans la base $(x, f(x))$.

(f) En déduire que la matrice A est semblable à sa transposée ${}^tA$.

(g) Montrer que si $\det(A) \neq 0$, alors A est inversible.