Math ECG 2. 2023-2024

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Quinzaine de colle n°1

Période du 11/09 au 22/09

Semaine du 11/09 au 15/09

Programme

- Révisions
- Exercices **non traités** de la feuille de révisions de rentrée ou du cahier de vacances
- Chapitre 1 : Variables aléatoires finies ou discrètes : Révisions, simulations. Lois usuelles.

Questions de cours

Chaque étudiant.e devrai traiter une de ces questions - choisie au hasard - au tableau. Il est donc nécessaire de les avoir préparées au préalable sous peine d'être lourdement sanctionné.

(1) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $(A-I)^2 = 0$. En déduire que A est inversible et préciser son inverse en fonction de I et de A. Inverser ensuite A par un pivot de Gauss simultané et vérifier que les deux méthodes donnent bien la même matrice inverse.

(2) Montrer que, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

(3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k = nx(1+x)^{n-1}.$$

(4) Une urne contient une boule rouge et $N-1$ boules bleues. On pioche successivement et sans remise toutes les boules de l'urne. On note X la variable aléatoire correspondant au rang d'apparition de la boule rouge.
  (a) Écrire une fonction permettant de simuler X.
  (b) Déterminer la loi de X.

(5) On lance une pièce de monnaie non truquée jusqu'à l'obtention d'un *Pile*. On remplit une urne en plaçant un nombre de boules blanches correspondant au rang du premier *Pile* précédent, deux fois plus de boules noires et une seule boule rouge. On pioche une boule au hasard dans cette urne. On considère la variable aléatoire X qui vaut 0 si on pioche la rouge, 1 si on pioche une blanche et 2 si on pioche une noire. Écrire une fonction permettant de simuler X.

Suggestion d'exercices

(1) Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance 3 fois une pièce et compte le nombre de *Pile* obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.
Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque *Pile* obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque *Pile* obtenu.
En particulier, s'il n'obtient aucun *Pile*, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir *Pile* est égale à 2/3.
On notera X la variable aléatoire égale au nombre de *Pile* obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Enfin, on notera A l'événement : "le joueur est déclaré vainqueur" et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.
   (a) Reconnaître la loi de X et vérifier que $P(A) = 13/27$.
   (b) Montrer que $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, puis expliciter la loi de G.
   (c) Écrire une fonction pour simuler G et des commande pour approcher $E(G)$. Vérifier par le calcul que l'*estimation* empirique est cohérente.

(2) Un collectionneur souhaite compléter un album de N vignettes différentes, numérotées de 1 à N et vendues dans des paquets séparés. Chaque paquet ne contient qu'une seule vignette et on suppose que chaque paquet, indépendamment les uns des autres, possède la même probabilité de contenir l'une des N vignettes existantes. On introduit alors les variables aléatoires suivantes

- Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire correspondant au numéro de la vignette présente dans le $k-$ième paquet acheté;

- T_N la variable aléatoire égale au nombre de paquets achetés pour obtenir les N vignettes différentes;

- Pour $k \in [\![1, N]\!]$, on note W_k la variable aléatoire qui prend la valeur du nombre de paquets à acheter pour obtenir k vignettes différentes (en particulier, on a $W_N = T_N$) et on pose

$$\Delta_1 = W_1, \qquad \text{et, pour } k \geq 2, \quad \Delta_k = W_k - W_{k-1}$$

   (a) Écrire une fonction d'en-tête `def simul_T(N):` qui renvoie une simulation de T_N.
   (b) Écrire une fonction, utilisant la fonction précédente, d'en-tête `def est_esp_T(N):` qui renvoie une estimation de $E(T_N)$ obtenue à partir d'un échantillon de T_N de taille 1000.
   (c) Représenter l'évolution de T_N en fonction de N ainsi que le nuage de points de la suite $(N \ln(N))_{N \geq 1}$ pour $1 \leq N \leq 50$. Émettre une conjecture.

   (d) Quelle est, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de X_k?

   (e) Reconnaître, pour $k \in [\![2, N]\!]$, la loi de Δ_k. Que dire que Δ_1?

   (f) Exprimer T_N en fonction des Δ_k. En déduire que

$$E(T_N) = N \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N}.$$

Semaine du 11/09 au 15/09

Programme

- Chapitre 1 : Intégralité. On fera simuler des variables aléatoires (variantes de lancers de pièces, de pioches dans des urnes... et tracer les diagrammes à bâtons des fréquences observées de chaque valeur sur un échantillon de taille 1000).
- Chapitre 2 : Intégralité.
- Reprise du DS n°1. On pourra poser des morceaux de ce DS.

Questions de cours

- Une urne contient une boule rouge et $N-1$ boules bleues. On pioche successivement et sans remise toutes les boules de l'urne. On note X la variable aléatoire correspondant au rang d'apparition de la boule rouge.
  (1) Écrire une fonction permettant de simuler X.
  (2) Déterminer la loi de X.

- On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = (u_n^2 + 2)/3$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 3$ puis que (u_n) est croissante. Quelle est la limite de la suite?

- Montrer que l'équation $x^{3n} + n^n x^n - 1 = 0$ admet une unique solution strictement positive, notée a_n. Montrer que $a_n < 1/n$ et en déduire la limite de la suite (a_n).

Suggestion d'exercices

(1) On considère, pour $n \geq 3$, l'équation

$$(E_n) \qquad x^n + x^2 + 2x - 1 = 0.$$

  (a) On introduit la fonction $f_n : x \mapsto x^2 + x^2 + 2x - 1$. Montrer que f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ dans un intervalle J à déterminer. Quelles sont les variations de f^{-1}?
  (b) Montrer alors que (E_n) possède une unique solution strictement positive, que l'on notera x_n. Montrer de plus que, pour tout $n \geq 3$,
$$0 < x_n < \frac{1}{2}.$$
  (c) Montrer que (x_n) est croissante.
  (d) En conclure que (x_n) converge vers un réel ℓ dont on donnera un encadrement.
  (e) En utilisant un encadrement de x_n, montrer que x_n^n tend vers 0, si n tend vers $+\infty$.
  (f) Conclure quant à la valeur de ℓ.

(2) Soient f la fonction définie sur $[-2, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$ et (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \geq 0$.

  (a) Montrer que $f([1; 3]) \subset [1; 3]$.
  (b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[1; 3]$, notée α.
  (c) Montrer que, pour tout $x \in [1; 3]$, on a $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.
  (d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^n |u_0 - \alpha|.$$
  (e) Conclure quant à la convergence de (u_n).
  (f) Écrire une fonction Python d'argument ε qui calcule et renvoie une approximation de α à ε près.