Math ECG 2. 2023-2024

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Quinzaine de colle n°2

Période du 25/09 au 06/10

Semaine du 25/09 au 29/09

Programme

- Chapitre 2 : Intégralité.
- Chapitre 3 : Intégralité. On fera chercher des bases de noyau de type $\operatorname{Ker}(f - \lambda I)$ puis écrire la matrice de f dans une nouvelle base. On appliquera cela au calcul de A^n.
- Reprise du DS n°1. On pourra poser des morceaux de ce DS sauf l'Exercice 3, traité en classe.

Questions de cours

- On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = (u_n^2 + 2)/3$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 3$ puis que (u_n) est croissante. Quelle est la limite de la suite?

- Montrer que l'équation $x^{3n} + n^n x^n - 1 = 0$ admet une unique solution strictement positive, notée a_n. Montrer que $a_n < 1/n$ et en déduire la limite de la suite (a_n).

- Énoncé du théorème du rang. Suite d'équivalences dans le cas d'un endomorphisme f sur $\mathbb{R}^n$.

- On considère la matrice M définie par :

$$M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  (1) Déterminer trois vecteurs V_1, V_2, V_3 tels que

$$\operatorname{Ker}(M - I) = \operatorname{Vect}(V_1), \qquad \operatorname{Ker}\left(M - \frac{1}{2}I\right) = \operatorname{Vect}(V_2), \qquad \operatorname{Ker}\left(M - \frac{1}{3}I\right) = \operatorname{Vect}(V_3).$$

  (2) Montrer que la famille (V_1, V_2, V_3) forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
  (3) En notant f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont M est la matrice dans la base canonique, déterminer la matrice de f dans la base (V_1, V_2, V_3) que l'on notera A.
  (4) Déterminer une matrice inversible Q telle que $M = QAQ^{-1}$.

- Montrer que les 3 matrices ci-dessous sont semblables

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suggestion d'exercices

(1) On considère, pour $n \geq 3$, l'équation

$$(E_n) \qquad x^n + x^2 + 2x - 1 = 0.$$

(a) On introduit la fonction $f_n :\ x \mapsto x^2 + x^2 + 2x - 1$. Montrer que f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ dans un intervalle J à déterminer. Quelles sont les variations de f^{-1}?

(b) Montrer alors que (E_n) possède une unique solution strictement positive, que l'on notera x_n. Montrer de plus que, pour tout $n \geq 3$,

$$0 < x_n < \frac{1}{2}.$$

(c) Montrer que (x_n) est croissante.

(d) En conclure que (x_n) converge vers un réel ℓ dont on donnera un encadrement.

(e) En utilisant un encadrement de x_n, montrer que x_n^n tend vers 0, si n tend vers $+\infty$.

(f) Conclure quant à la valeur de ℓ.

(2) Soient f la fonction définie sur $[-2, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$ et (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \geq 0$.

(a) Montrer que $f([1; 3]) \subset [1; 3]$.

(b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[1; 3]$, notée α.

(c) Montrer que, pour tout $x \in [1; 3]$, on a $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

(d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^n |u_0 - \alpha|.$$

(e) Conclure quant à la convergence de (u_n).

(f) Écrire une fonction Python d'argument ε qui calcule et renvoie une approximation de α à ε près.

(3) (**) Soit $(v_1, v_2, ..., v_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel E de dimension finie $m \geq n$. Pour $k \in [\![1; n-1]\!]$, on pose $w_k = v_k + v_{k+1}$ et $w_n = v_n + 1$. Montrer que la famille $(w_1, w_2, ..., w_n)$ est libre si et seulement si n est impair.

(4) (***) Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}$ telles que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $BA = I_2$.

(5) (**) Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $f \circ f = 0$.

(a) Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$.

(b) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Semaine du 02/10 au 06/10

Programme

- Chapitre 3 : Intégralité. On fera chercher des bases de noyau de type $\mathrm{Ker}(f-\lambda I)$ puis écrire la matrice de f dans une nouvelle base. On appliquera cela au calcul de A^n.
- Chapitre 4 : Intégralité. La formule de Taylor-Young et les développement limités usuels (en 0) ne sont exigibles qu'à l'ordre 2, mais on pourra avec de l'aide proposer une utilisation à un ordre plus élevé.

Questions de cours

- On considère la matrice M définie par :

$$M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  (1) Déterminer trois vecteurs V_1, V_2, V_3 tels que

$$\mathrm{Ker}(M-I) = \mathrm{Vect}(V_1), \qquad \mathrm{Ker}\left(M - \frac{1}{2}I\right) = \mathrm{Vect}(V_2), \qquad \mathrm{Ker}\left(M - \frac{1}{3}I\right) = \mathrm{Vect}(V_3).$$

  (2) Montrer que la famille (V_1, V_2, V_3) forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
  (3) En notant f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont M est la matrice dans la base canonique, déterminer la matrice de f dans la base (V_1, V_2, V_3) que l'on notera A.
  (4) Déterminer une matrice inversible Q telle que $M = QAQ^{-1}$.

- Montrer que les 3 matrices ci-dessous sont semblables

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0. Développements limités usuels.
  Extension de la formule à un point a quelconque (au voisinage duquel f est de classe $\mathcal{C}^2$).

- Montrer que la fonction f définie ci-dessous est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition, où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Suggestion d'exercices

(1) (*) Comparer

$$(i)\ \sqrt{1+x} \text{ et } \ln(x) \text{ en } +\infty; \qquad (ii)\ x \text{ et } \sqrt{x} \text{ en } 0; \qquad (iii) : \frac{1}{x^2} \text{ et } \frac{1}{x\sqrt{x}} \text{ en } 0$$

$$(iv)\ e^{1/x} \text{ et } \ln(x) \text{ en } 0^+; \qquad (v)\ \ln(-x) \text{ et } e^{-x^2} \text{ en } -\infty;$$

$$(vi)\ e^x - 1 \text{ et } \frac{1}{2}\left(\sqrt{x+1}-1\right) \text{ en } 0; \qquad (vii)\ e^{2x} - e^x \text{ et } x(x+1) \text{ en } -1.$$

$$(viii)\ \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \text{ et } ex \text{ en } +\infty.$$

(2) (*) Complétez les équivalents suivants :

$$(i)\ 1-e^{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dots \qquad (ii)\ \ln(1+e^{-x}) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dots \qquad (iii)\ 1-(1-e^{-x})^n \underset{x\to+\infty}{\sim} \dots$$

$$(iv)\ \frac{x\ln(x)}{x-1} \underset{x\to 1}{\sim} \dots \qquad (v)\ \frac{1}{x^2-1} \underset{x\to 1}{\sim} \dots \qquad (vi)\ \frac{1}{x^2-1} \underset{x\to -1}{\sim} \dots$$

(3) (*) Déterminer un DL à l'ordre 2 au point indiqué

$$(i)\ e^{x^2+x} \text{ en } 0; \qquad (ii)\ \ln(1+e^x) \text{ en } 0; \qquad (iii)\ (x+1)\sqrt{x+1}-1 \text{ en } 0;$$

$$(iv)\ (\ln(1+x))^2 \text{ en } 0; \qquad (v)\ x^2-2x-1 \text{ en } 1.$$

(4) (*/**) Montrer que la fonction f ci-dessous est continue sur $\mathbb{R}_+$. Est-elle dérivable en 0?

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{x^2}}{\ln(1+x)} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

(5) (***) À l'aide d'un découpage de la somme, montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \sim n!, \qquad n\to+\infty.$