Math ECG 2. 2023-2024

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Quinzaine de colle n°3

Période du 09/10 au 20/10

Semaine du 09/10 au 14/10

Programme

- Chapitre 4 : Equivalents et DL. Intégralité
- Chapitre 5 : Séries. Intégralité. *On fera la part belle à l'obtention de relation de négligeabilité et/ou d'équivalents pour appliquer les critères de convergence.*
- Si possible on posera un exercice de probabilités (discrètes) avec des calculs d'espérance faisant intervenir des séries (et une petite simulation Python pour toujours rester performant).

Questions de cours

- Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0. Développements limités usuels.
  Extension de la formule à un point a quelconque (au voisinage duquel f est de classe $\mathcal{C}^2$).
- Montrer que la fonction f définie ci-dessous est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition, où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Énoncés des critères de convergence pour des **séries à termes positifs**.
- Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 3$, on a $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} \leq \frac{1}{k\ln(k)} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}$.
  En déduire un équivalent (lorsque $n \to +\infty$) de $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$ (et la nature de la série correspondante).

Suggestion d'exercices

(1) Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme.

(i) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n(n-1)}{6^n}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{(n+1)!}$ (iii) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n}{n!}$

(2) Pour chacune des séries suivantes, préciser la nature et calculer la somme en cas de série convergente:

$$(i) \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{3\times 4^n}, \qquad (ii) \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad (iii) \sum_{n\geq 2} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$(iv) \sum_{n\geq 0} \frac{2n(-1)^{n+1}}{7^{n-1}}, \qquad (v) \sum_{n\geq 0} \frac{n^2-2}{n!}, \qquad (vi) \sum_{n\geq 1} n\ln\left(\frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right).$$

(3) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$ converge.

(4) Montrer que

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

et en déduire la convergence de la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}.$$

(5) Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} w_n$, où $\displaystyle w_n = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{k!}$.

(6) On définit une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$P(X=n) = a\ln\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n+1}}\right),$$

où a est un réel. On noter $\lfloor x\rfloor$ la partie entière d'un réel x.

(a) Déterminer la valeur de a.

(b) Montrer que, lorsque $n\to+\infty$,

$$\ln\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n+1}}\right) \sim \frac{2}{n^2}.$$

(c) X admet-elle une espérance ? Une variance ?

(d) (Khubes) On considère une variable aléatoire U suivant une loi uniforme $\mathcal{U}([0;1[)$ et on pose

$$Y = \left\lfloor \frac{2}{3^{1-U}-1} \right\rfloor.$$

Montrer que X et Y ont la même loi.

(e) Proposer une fonction Python nommée `simul_X( )` renvoyant une simulation de X.

(7) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

(8) **Règle de d'Alembert**. On considère une suite à termes positifs (u_n) telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Alors,

- si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge.
- si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.

(a) En admettant temporairement cette règle, démontrer, pour tout $x\in\mathbb{R}$, la convergence de la série exponentielle de paramètre x.

(b) Même question avec la série de terme général $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

(c) Démonstration du critère. On suppose $\ell > 1$. Montrer alors que u_n ne tend pas vers 0.
On suppose ensuite $\ell < 1$. Montrer qu'il existe un rang n_0 et un réel $q \in]0;1[$ tels que, pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n \leq q^{n-n_0} u_{n_0}$. Conclure.

Semaine du 16/10 au 20/10

Programme

- Chapitre 5 : Séries. Intégralité.
- Chapitre 6 : Réduction. Intégralité.
- Reprise du DS n°2.

Questions de cours

- Énoncés des critères de convergence pour des **séries à termes positifs**.
- Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 3$, on a $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} \leq \frac{1}{k\ln(k)} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}$.

  En déduire un équivalent (lorsque $n \to +\infty$) de $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$ (et la nature de la série correspondante).
- Éléments propres d'une matrice carrée. Définitions. Lien entre spectre et polynôme annulateur.
- Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire l'expression de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Suggestion d'exercices

(1) Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que 4 est valeur propre de B et donner une base de l'espace propre E_4.

(b) Déterminer sans calculs une autre valeur propre de B et donner une base de l'espace propre associé.

(2) Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes, ainsi qu'une base des sous-espaces propres associés. Ces matrices sont-elles inversibles?

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(3) Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ a & 0 & -1 \\ -a & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) En différenciant les cas $a = 0$ et $a \neq 0$, montrer que 0 est valeur propre de M_a est expliciter une base du sous-espace propre associé.

(b) Calculer $M_a(M_a^2 + (2a+1)I)$.

(c) Montrer que, si $a \geq -1/2$, alors $\mathrm{Sp}(M_a) = \{0\}$.
La matrice est-elle diagonalisable dans ce cas ?

(d) On prend $a < -1/2$. Montrer que l'équation $x^2 + (2a+1) = 0$ admet deux solutions distinctes notées λ_1 et λ_2.

(e) Montrer que, pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$xM_a^2 + yM_a + zI = 0 \Longleftrightarrow x = y = z = 0.$$

(f) Montrer par l'absurde que ni $M_a - \lambda_1 I$ ni $M_a - \lambda_2 I$ ne sont inversibles. Conclure quant au spectre de M_a. La matrice est-elle diagonalisable?

(4) Déterminer, selon la valeur de m le spectre puis le caractère diagonalisable de A.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & m \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2+m \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1+m \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2+m \end{pmatrix}$$

(5) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.
(b) En déduire les deux valeurs propres possibles λ_1 et λ_2 de A (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).
(c) Vérifier que λ_1 et λ_2 sont bien des valeurs propres de A et donner une base de chacun des sous-espaces propres associés.
(d) Donner une base (X_1, X_2, X_3) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. On choisira ces vecteurs de façon que leurs composantes soient des entiers naturels les plus petits possible, la dernière composante de X_1 et la première de X_3 étant nulles. Former la matrice de passage P de la base canonique vers cette base. Que vaut $P^{-1}AP$?
(e) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, A^n.