# Math ECG 2. 2023-2024

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

---

## Quinzaine de colle n°4

*Période du 13/11 au 24/11*

---

## Semaine du 13/11 au 17/11

### Programme

- Reprise des différents sujets du **Concours Blanc**.
- Variables aléatoires discrètes. En parallèle du début du **Chapitre 7** sur les coupes de variables aléatoires discrètes, on posera des exercices d'étude d'une ou plusieurs variables aléatoires.

### Exemple d'exercices

**Exercice 1.** Olive et Tom s'affrontent aux tirs au but (en *mort subite*) et se lancent dans une succession de tirs, chacun leur tour - en commençant par Olive.
Tom est un peu meilleur qu'Olive; il marque trois fois sur cinq alors que son ami ne marque qu'une fois sur trois.

On introduit la variable aléatoire $X$ qui prend la valeur 0 si Tom marque le premier but ou $k$ si c'est Olive qui marque le premier but et si ce premier but a lieu lors de la $k-$ième tentative d'Olive.

**Illustration**



(1) **Simulation sous Python**

(a) Recopier et compléter la fonction ci-dessous qui renvoie une simulation de $X$.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X( ):
    x=1
    while rd.rand( ) > 1/3:
        if  ............
            return ...........
        x= .........
    return x
```

(b) Écrire un script qui simule 1000 fois la variable $X$ et permette d'obtenir la fréquence des confrontations où Olive gagne le duel. Conjecturer quant à la valeur de la probabilité que ce soit Olive qui gagne.

(2) Loi de $X$.

(a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(X = k)$.
(b) En déduire $P(X = 0)$.
(c) Quelle est la probabilité que Olive gagne?
(d) Montrer que $X$ admet une espérance et la calculer.

**Exercice 2.** Un immeuble de $p$ étages est équipé d'un ascenseur. $N$ personnes montent dans l'ascenseur au rez de chaussée et descendent chacune à un étage au hasard et de façon indépendante.
Soit $X$ le nombre d'arrêts de l'ascenseur.
On note $X_i$ la variable valant 1 si l'ascenseur s'arrête à l'étage $i$ et 0 sinon et on note $E_k$ la variable aléatoire qui prend la valeur de l'étage où descend la $k-$ième personne.

(1) Pour tout $k \in [\![1; N]\!]$, déterminer la loi de $E_k$.
(2) En utilisant les variables aléatoires $E_k$, déterminer $P(X_i = 0)$. En déduire la loi de $X_i$.
(3) Calculer $E(X)$.
(4) Déterminer pour $i$ différent de $j$ : $P(X_i = 0 \cap X_j = 0)$.
En déduire $P(X_iX_j = 0)$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $X_iX_j$?
(5) (`khûbes seulement`) Déterminer alors $\text{cov}(X_i, X_j)$.

**Exercice 3.** Soient $X, Y$ deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Montrer que

$$\min(X, Y) \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - (1 - p)^2).$$

(On commencera par montrer que $P(X \geq k) = (1 - p)^{k-1}$.)

**Exercice 4.** On met $n$ jetons numérotées au hasard dans $n$ boites numérotées (un seul jeton dans chaque boite).
Soit $X_k$ la variable valant 1 si le $k$-ième jeton est dans la $k$-ième boite et 0 sinon.
Soit $X$ le nombre de coïncidences entre les numéros des jetons et des boites.

(1) Déterminer la loi de $X_k$.
(2) Pour $i$ différent de $j$, déterminer la loi de $X_iX_j$
(3) (`khûbes seulement`) Exprimer alors $\text{Cov}(X_i, X_j)$.

**Exercice 5.** On considère un paramètre entier $m \geq 2$ et une variable aléatoire $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ (où $p \in [0; 1]$).

(1) Rappeler les valeurs de l'espérance et de la variance de $Y$, puis à l'aide de la formule de Huygens-Kœnig, montrer que

$$E(Y(Y - 1)) = m(m - 1)p^2.$$

Soit $n \geq 2$ un entier. On découpe alors l'intervalle $[0, 1[$ selon la subdivision suivante. On note, pour $k \geq [\![0, n]\!]$, $x_k = k/n$ de sorte que

$$[x_0, x_1[\cup[x_1, x_2[\cup .. \cup [x_{n-1}, x_n[= \bigcup_{k=0}^{n-1} \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[ = [0, 1[.$$

On considère alors une première suite de variables aléatoires $(U_n)$ telle que, $U_n$ suit loi uniforme sur $\{x_0, .., x_{n-1}\}$, c'est à dire que, pour tout $\ell \in [\![0; n - 1]\!]$,

$$P(U_n = x_\ell) = \frac{1}{n}.$$

Puis, on introduit une suite de variables aléatoires $(X_n)$ définie conditionnellement à l'évènement $[U_n = x_\ell]$. Plus précisément, sachant que $[U_n = x_\ell]$,

$$X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m, \frac{\ell}{n}\right).$$

(2) Déterminer l'expression de la loi conditionnelle de $X_n$ sachant $[U_n = x_\ell]$ puis donner l'expression de la loi marginale de $X_n$.

(3) Utiliser la première question pour donner, sans calcul supplémentaire, la valeur de la somme

$$\sum_{i=0}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{\ell}{n}\right)^i\left(1-\frac{\ell}{n}\right)^{m-i}.$$

(4) En déduire alors que

$$E(X_n) = \frac{m(n-1)}{2n}.$$

(5) En utilisant à nouveau la première question, donner sans calcul la valeur de la somme

$$\sum_{i=0}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{\ell}{n}\right)^i\left(1-\frac{\ell}{n}\right)^{m-i}.$$

(6) En déduire que

$$E(X_n(X_n-1)) = \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

puis que

$$V(X_n) = \frac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2}.$$

# Semaine du 20/11 au 24/11

### Programme

- **Chapitre 7**. Couples de V.A.D. Intégralité.
  Des probas discrètes, des probas discrètes et encore des probas discrètes (et de la simulation sous Python autant que possible).

### Questions de cours

- Loi conjointe de $(X, Y)$. Loi conditionnelle de $Y$ sachant $[X = i]$. Lois marginales. Formules des probabilités totales.

- Définition de la covariance. Propriétés de la covariance. Variance d'une somme de v.a. Liens entre indépendante et covariance.

- Soient $X$ et $Y$ deux v.a indépendantes de même loi géométriques $\mathcal{G}(p)$. Déterminer la loi de $Z = \min(X, Y)$. On commencera par calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X \geq k)$.

- Soient $X$ et $Y$ deux v.a. indépendantes suivant toutes deux des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. **Démontrer** que $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

**Suggestion d'exercices**

(1) Une urne contient 4 jetons numérotés de 1 à 4. On tire successivement et sans remise deux jetons de l'urne. On note $X$ le plus petit numéro des 2 et $Y$ le plus grand.

(a) Compléter le tableau suivant donnant la loi conjointe du couple $(X, Y)$.

| $X \backslash Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1/6 | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |

(b) En déduire les loi marginales de $X$ et $Y$, puis $E(X)$ et $E(Y)$.

(c) Calculer à partir du tableau de la loi conjointe $E(XY)$.

(d) En déduire $\text{cov}(X, Y)$.

(e) On note $S$ la variable aléatoire égale à la somme des numéros tirés. Déterminer $E(S)$ et $V(S)$ sans passer par la loi de $S$.

(2) Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ deux v.a indépendantes.
Montrer que $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m + n, p)$.
On commencera par montrer que

$$\sum_{j=0}^{k+\ell} \binom{n}{j} \binom{m}{k+\ell-j} = \binom{m+n}{k+\ell}.$$

(3) On considère des variables aléatoires $U = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et $V = \max(X_1, \ldots, X_n)$ où $(X_1, \ldots, X_n)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[\![1; N]\!]$.

(a) Montrer que, pour tout $k \in [\![1; N]\!]$,

$$P(V \leq k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n, \quad \text{puis que} \quad P(V = k) = \left(\frac{1}{N}\right)^n (k^n - (k-1)^n).$$

(b) **Dans toute la suite**, on se place dans le cas $n = 2$.

(i) Déterminer $E(V)$. On **admet** ensuite que que $V(U) = V(V) = \dfrac{(N^2-1)(2N^2+1)}{36N^2}$.

(ii) Justifier que $U + V = X_1 + X_2$. En déduire que

$$\text{cov}(U, V) = V(X_1) - V(U).$$

(iii) Exprimer $\rho(U, V)$ en fonction de $N$.

(4) (*) Soit $p$ un réel de $]0; 1[$ et $q = 1 - p$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi de Bernoulli telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X_k = 1) = p, \quad \text{et} \quad P(X_k = 0) = q.$$

Pour $n$ entier de $\mathbb{N}^*$, on définit pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, la variable aléatoire $Y_k = X_k + X_{k+1}$.

(5) Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilité et telles que

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X = i) = P(Y = i) = \frac{1}{2^i}.$$

(a) Reconnaître les lois de $X$ et $Y$.

(b) Déterminer la loi de $Z = X + Y$ ainsi que la loi de $X$ conditionnellement à $[Z = k], k \geq 2$.

(c) Calculer $P(X = Y)$ et $P(X > Y)$.

(d) Calculer $P(X \geq 2Y)$ et $P_{[X>Y]}(X \geq 2Y)$.

(6) (**EDHEC 99**) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X, Y, Z$ trois variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi $\mathcal{U}([\![1;n]\!])$.

(a) (i) Donner la loi conjointe du couple $(X, Y)$.
(ii) Montrer que, pour tout $k \in [\![2; n+1]\!]$,
$$P(X+Y=k) = \frac{k-1}{n^2}.$$
(iii) Montrer que, pour tout $k \in [\![n+2; 2n]\!]$,
$$P(X+Y=k) = \frac{2n-k+1}{n^2}.$$

(b) Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que
$$P(X+Y=Z) = \frac{n-1}{2n^2}$$

(c) On introduit la variable aléatoire $T = n+1-Z$.

(i) Que peut-on dire de $\operatorname{cov}(Z, T)$?
(ii) Montrer que $T$ suit la loi uniforme $\mathcal{U}([\![1;n]\!])$.
(iii) Justifier que $T$ est indépendante de $Y$ et de $X$.
(iv) Déterminer la valeur de $P(X+Y+Z=n+1)$.