Math ECG 2. 2023-2024

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Quinzaine de colle n°5

Période du 27/11 au 08/12

Semaine du 27/11 au 01/12

Programme

- **Chapitre 7**. Couples de V.A.D. Intégralité.
  Des probas discrètes, des probas discrètes et encore des probas discrètes (et de la simulation sous Python autant que possible).
- **Chapitre 8.** Intégration généralisée. Intégralité.
  On fera aussi de l'intégration tout court à base de changement de variables (donnés) et d'IPP. Tous les calculs et transformations doivent être réalisés sur des segments.

Questions de cours

- Loi conjointe de (X, Y). Loi conditionnelle de Y sachant $[X = i]$. Lois marginales. Formules des probabilités totales.

- Définition de la covariance. Propriétés de la covariance. Variance d'une somme de v.a. Liens entre indépendante et covariance.

- Soient X et Y deux v.a indépendantes de même loi géométriques $\mathcal{G}(p)$. Déterminer la loi de $Z = \min(X, Y)$. On commencera par calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X \geq k)$.

- Soient X et Y deux v.a. indépendantes suivant toutes deux des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. **Démontrer** que $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

- Énoncés des critères de comparaison pour la convergence d'intégrales. Critère de Riemann.

- Montrer rigoureusement la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

- On considère la suite d'intégrales (I_n) définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t$.
  Justifier par un argument de comparaison la convergence de toutes les intégrales.
  Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+1} = (n+1)I_n$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n = n!$.

Suggestion d'exercices

(1) Une urne contient 4 jetons numérotés de 1 à 4. On tire successivement et sans remise deux jetons de l'urne. On note X le plus petit numéro des 2 et Y le plus grand.
  (a) Compléter le tableau suivant donnant la loi conjointe du couple (X, Y).

$X\backslash Y$	1	2	3	4
1	0	1/6		
2				
3				
4				

(b) En déduire les loi marginales de X et Y, puis $E(X)$ et $E(Y)$.
(c) Calculer à partir du tableau de la loi conjointe $E(XY)$.
(d) En déduire $\mathrm{cov}(X,Y)$.
(e) On note S la variable aléatoire égale à la somme des numéros tirés. Déterminer $E(S)$ et $V(S)$ sans passer par la loi de S.

(2) Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$ deux v.a indépendantes.
Montrer que $X+Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m+n,p)$.
On commencera par montrer que

$$\sum_{j=0}^{k+\ell} \binom{n}{j}\binom{m}{k+\ell-j} = \binom{m+n}{k+\ell}.$$

(3) On considère des variables aléatoires $U=\min(X_1,\dots,X_n)$ et $V=\max(X_1,\dots,X_n)$ où $(X_1,\dots,X_n)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[\![1;N]\!]$.

(a) Montrer que, pour tout $k\in[\![1;N]\!]$,

$$P(V\le k)=\left(\frac{k}{N}\right)^n, \quad \text{puis que} \quad P(V=k)=\left(\frac{1}{N}\right)^n\left(k^n-(k-1)^n\right).$$

(b) **Dans toute la suite**, on se place dans le cas $n=2$.

(i) Déterminer $E(V)$. On **admet** ensuite que que $V(U)=V(V)=\dfrac{(N^2-1)(2N^2+1)}{36N^2}$.

(ii) Justifier que $U+V=X_1+X_2$. En déduire que

$$\mathrm{cov}(U,V)=V(X_1)-V(U).$$

(iii) Exprimer $\rho(U,V)$ en fonction de N.

(4) (*) Soit p un réel de $]0;1[$ et $q=1-p$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$, de même loi de Bernoulli telle que

$$\forall k\in\mathbb{N}^*, \qquad P(X_k=1)=p, \quad \text{et} \quad P(X_k=0)=q.$$

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on définit pour tout $k\in[\![1;n]\!]$, la variable aléatoire $Y_k=X_k+X_{k+1}$.

(5) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilité et telles que

$$\forall i\in\mathbb{N}^*, \qquad P(X=i)=P(Y=i)=\frac{1}{2^i}.$$

(a) Reconnaître les lois de X et Y.
(b) Déterminer la loi de $Z=X+Y$ ainsi que la loi de X conditionnellement à $[Z=k], k\ge 2$.
(c) Calculer $P(X=Y)$ et $P(X>Y)$.
(d) Calculer $P(X\ge 2Y)$ et $P_{[X>Y]}(X\ge 2Y)$.

(6) (**EDHEC 99**) Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et X,Y,Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi $\mathcal{U}([\![1;n]\!])$.

(a) (i) Donner la loi conjointe du couple (X,Y).
(ii) Montrer que, pour tout $k\in[\![2;n+1]\!]$,

$$P(X+Y=k)=\frac{k-1}{n^2}.$$

(iii) Montrer que, pour tout $k \in [\![n+2; 2n]\!]$,
$$P(X+Y=k) = \frac{2n-k+1}{n^2}.$$

(b) Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que
$$P(X+Y=Z) = \frac{n-1}{2n^2}$$

(c) On introduit la variable aléatoire $T = n+1-Z$.

(i) Que peut-on dire de $\mathrm{cov}(Z,T)$?
(ii) Montrer que T suit la loi uniforme $\mathcal{U}([\![1; n]\!])$.
(iii) Justifier que T est indépendante de Y et de X.
(iv) Déterminer la valeur de $P(X+Y+Z=n+1)$.

(7) Étudier la nature et, si possible, calculer les intégrales ci-dessous
$$(i)\ \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x^2/5}}{5}\mathrm{d}x, \qquad (ii)\ \int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}, \qquad (iii)\ \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t-1}}.$$

(8) Après avoir justifié la convergence et calculé l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2},$$
justifier la convergence et calculer
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2(1+|x|)^2}.$$

(9) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $v_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t$.

(a) Justifier la convergence de l'intégrale définissant v_n.
(b) Montrer que : $\forall n \geq 2,\ 0 \leq v_n \leq \dfrac{1}{n-1}$. En déduire la limite de v_n lorsque $n \to +\infty$.

(10) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite d'intégrales
$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n(x+1)}.$$

(a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, I_n est une intégrale convergente.

(b) (i) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$,
$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

(ii) En déduire la valeur de I_1.

(c) (i) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}.$$

(ii) En déduire la limite de la suite (I_n).

(d) (i) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n + I_{n+1}$.
(ii) Montrer que (I_n) est décroissante.
(iii) À l'aide des deux questions précédentes, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2I_n \geq \dfrac{1}{n}$.
(iv) Donner alors un encadrement de I_n puis un équivalent, en $+\infty$.
(v) Enfin, déterminer la nature de la série $\sum I_n$.

Semaine du 04/12 au 08/12

Programme

- **Chapitres 7, 8, 9.** Intégralité.

Questions de cours

- Énoncés des critères de comparaison pour la convergence d'intégrales. Critère de Riemann.
- Montrer rigoureusement la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.
- On considère la suite d'intégrales (I_n) définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t$.
  Justifier par un argument de comparaison la convergence de toutes les intégrales.
  Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+1} = (n+1)I_n$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n = n!$.
- Considérant un couple statistique (X, Y), quel paramètre calcule-t-on pour estimer la pertinence d'une *régression linéaire* ? Comment interprète-t-on la valeur de ce paramètre ? Quelles conséquences graphiques sur la représentation graphique du couple statistique ?
  Quelle est l'équation de la droite de régression ?

Suggestion d'exercices

(1) Exercices semaine précédente.

(2) En **admettant** que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$, calculer, à l'aide d'un changement de variable affine,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t.$$

En déduire, à l'aide d'une IPP, la convergence et la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

(3) Soit g une fonction continue, positive (non identiquement nulle) sur $\mathbb{R}+$ telle que $g(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$.

On considère la fonction H définie sur $\mathbb{R}_+$ par $H(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$.

(a) Justifier que H est bien définie.

(b) Montrer que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et expliciter, pour $x \geq 0$, $H'(x)$ en fonction de $g(x)$.

(c) Dresser le tableau de variation de H.

(d) Montrer que l'équation $H(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}+$.

(e) Montrer que $xH(x) \to 0,\ x \to +\infty$.

(f) Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tg(t)\mathrm{d}t$.

(g) Montrer, à l'aide d'une IPP et des deux dernières questions que $\displaystyle\int_0^{+\infty} H(t)\mathrm{d}t$ converge.

(4) (Jurassic Park) Une équipe d'archéologues travaille sur des ossements d'un même spécimen de dinosaure, retrouvés sur différents sites, au quatre coins du monde. Afin de mieux comprendre l'anatomie de ce sympathique animal, ils procèdent aux mesures de la longueur (en cm) de leur humérus et de leur fémur. Les données collectées sont enregistrées dans un fichier nommé `dino.csv`.

(a) Donner des commandes Python permettant d'importer le fichier de données sous forme d'un tableau noté `data`.

(b) On écrit les commandes suivantes dont l' exécution est reproduite ci-après. Commenter.

```
data.shape
data.columns
```

Affichage Python

```
>>>
(8,2)
Index(['Humérus (cm)', 'Fémur (cm)'],
dtype='object')
```

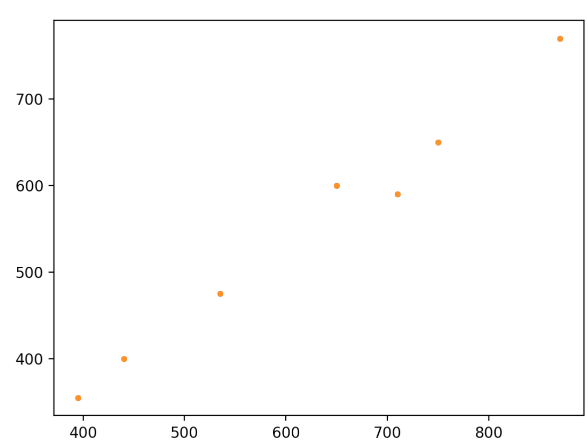
(c) On ajoute les commandes qui affiche la figure ci-après.

```
import matplotlib.pyplot as plt

X=data['Huméros (cm)']
Y=date['Fémur (cm)']

plt.grid()
plt.plot(X,Y, '.')
plt.show()
```

Affichage Python



(i) Que représente cette figure ?

(ii) Expliquer pourquoi la figure ci-dessus permet de conjecturer qu'il existe deux réels a, b tels que $ax + b$, où x est la longueur de l'humérus (en cm), est une approximation raisonnable de la longueur du fémur (en cm).

(iii) Quelle quantité pourrait-on calculer pour conforter cette approximation? Quel devrait être le résultat du calcul ? Donner une suite d'instruction en Python permettant de la calculer.

(iv) On retrouve en plein Mexique, juste à côté d'un moustique fossilisé dans de l'ambre, un fémur de ce même dinosaure de longueur 515 cm. L'humérus est manquant. Quelle devrait être sa longueur, selon ce modèle ?