Quinzaine de colle n°6

Période du 11/12 au 22/12

Semaine du 11/12 au 15/12

Programme

- **Chapitres 8, 9.** Intégralité.
- **Chapitre 10.** Notion de v.a à densité. Espérance. Théorème de transfert.
  Des questions faisant intervenir les lois usuelles pourront être posées à partir de Jeudi 14/12.

Questions de cours

- Considérant un couple statistique (X, Y), quel paramètre calcule-t-on pour estimer la pertinence d'une *régression linéaire* ? Comment interprète-t-on la valeur de ce paramètre ? Quelles conséquences graphiques sur la représentation graphique du couple statistique ?
  Quelle est l'équation de la droite de régression ?

- Caractérisation d'une densité de probabilité.

- Dessiner une fonction f telle que
  - $f(3) = 2$;
  - f est affine par morceaux mais f continue partout sur $\mathbb{R}$
  - f densité de probabilité

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1$ si $x \in [0; 1]$ et 0 sinon.
  Vérifier que f peut être considérée comme une densité de probabilité. Considérant X une v.a ayant f pour densité, expliciter la fonction de répartition F_X de X puis celle de $Y = -\ln(1-X)$. Justifier que Y est encore une v.a à densité.

Suggestion d'exercices

(1) (Jurassic Park) Une équipe d'archéologues travaille sur des ossements d'un même spécimen de dinosaure, retrouvés sur différents sites, au quatre coins du monde. Afin de mieux comprendre l'anatomie de ce sympathique animal, ils procèdent aux mesures de la longueur (en cm) de leur humérus et de leur fémur. Les données collectées sont enregistrées dans un fichier nommé dino.csv.

(a) Donner des commandes Python permettant d'importer le fichier de données sous forme d'un tableau noté `data`.

(b) On écrit les commandes suivantes dont l' exécution est reproduite ci-après. Commenter.

```
data.shape
data.columns
```

Affichage Python

```
> > >
(8, 2)
Index(['Humérus (cm)', 'Fémur (cm)'],
dtype='object')
```

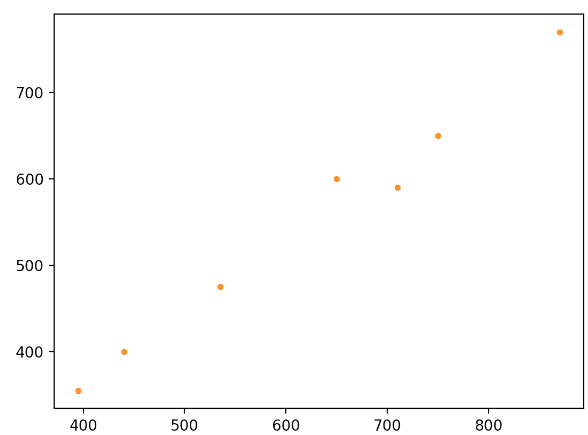
(c) On ajoute les commandes qui affiche la figure ci-après.

```
import matplotlib.pyplot as plt

X=data['Huméros (cm)']
Y=date['Fémur (cm)']

plt.grid()
plt.plot(X,Y, '.')
plt.show()
```

Affichage Python



(i) Que représente cette figure ?

(ii) Expliquer pourquoi la figure ci-dessus permet de conjecturer qu'il existe deux réels a, b tels que $ax + b$, où x est la longueur de l'humérus (en cm), est une approximation raisonnable de la longueur du fémur (en cm).

(iii) Quelle quantité pourrait-on calculer pour conforter cette approximation? Quel devrait être le résultat du calcul ? Donner une suite d'instruction en Python permettant de la calculer.

(iv) On retrouve en plein Mexique, juste à côté d'un moustique fossilisé dans de l'ambre, un fémur de ce même dinosaure de longueur 515 cm. L'humérus est manquant. Quelle devrait être sa longueur, selon ce modèle ?

(2) (**EML 2015**) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

(a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction f_n est une densité de probabilité.
On note T_n une variable aléatoire admettant f_n pour densité.

(b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} x^3 f_n(x)$.

(c) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire T_n admet une espérance.

(d) Déterminer l'espérance $E(T_1)$ de T_1.

(e) (i) Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\frac{1}{n+1} f'_{n+1}(x).$$

(ii) Montrer ensuite, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{+\infty} x(f_{n+1}(x) - f_n(x))\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\mathrm{d}x.$$

(iii) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre $E(T_{n+1})$ et $E(T_n)$, puis une expression de $E(T_n)$ sous forme d'une somme.

(3) Vérifier que la fonction f suivante est une densité de probabilité. En notant X une variable aléatoire ayant f pour densité, expliciter la fonction de répartition F_X de X. La variable X admet-elle une espérance ?

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{x+1}{3}, & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \dfrac{5}{6(x+1)^2}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(4) On considère la fonction φ définie, pour $x > 0$, par $\varphi(x) = \ln(x+1) - \ln(x) - \dfrac{1}{x}$.

(a) (i) Étudier la fonction φ. On représentera le tableau de variations incluant les limites au bord de l'ensemble de définition.

(ii) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 1$ admet une unique solution α et que $1/3 < \alpha < 1/2$.

(b) On introduit maintenant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < \alpha \\ \dfrac{1}{x^2(x+1)}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

(i) Déterminer trois réels a, b, c tels que, pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}.$$

(ii) Montrer que f est une densité de probabilité. On note X une v.a ayant f pour densité. Montrer que X admet une espérance. Qu'en est-il de la variance?

(iii) Montrer que, pour tout $x > \alpha$,

$$xf(x) = \varphi'(x) + \frac{1}{x^2}.$$

(iv) En déduire, en fonction de α, la valeur de $E(X)$.

(5) Soit Y une variable aléatoire de densité f vérifiant $f(t) = 0$ pour tout $t < 0$ et admettant une espérance.

(a) Montrer que, pour tout $A > 0$, on a

$$\int_0^A tf(t)\mathrm{d}t = -AP(Y > A) + \int_0^A P(Y > t)\mathrm{d}t$$

(b) Montrer que $AP(Y > A)$ tend vers 0 lorsque $A \to +\infty$ (on commencera par écrire cette quantité à l'aide d'une intégrale, que l'on encadrera à l'aide d'une autre intégrale).

(c) Conclure que

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} P(Y > t)\mathrm{d}t$$

Semaine du 18/12 au 22/12

Programme

- **Chapitre 10.** Intégralité

Questions de cours

- Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$. Montrer que $V = -\ln(1-U) \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. En déduire un programme Python permettant de simuler la loi $\mathcal{E}(1)$ à l'aide de la commande `rd.random()`.

- Lois usuelles : donner l'expression des fonctions de densité et de répartition puis la valeur de l'espérance et de la variance des lois uniformes sur $[a,b]$, exponentielles de paramètre λ et normale de paramètre m et σ^2.

- Dessiner une courbe gaussienne. Expliquer les propriétés de symétrie et retrouver les valeurs de $P(X \geq a)$, $P(|X| \leq a)$ en fonction de $\Phi(a)$, où $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

- Soient $X_1, ...X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi uniforme sur $[0;1]$. Déterminer la fonction de répartition de $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$. Justifier que M_n est une variable à densité, exhiber une densité. Montrer que M_n admet une espérance et la calculer.

Suggestions d'exercices

(1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$. On dit qu'une variable aléatoire réelle à densité suit une loi de Laplace de paramètre (α, β), notée $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$, si elle admet comme densité la fonction f donnée par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|t-\alpha|}{\beta}\right)$$

   (a) Vérifier que f est bien une densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle.
   (b) Déterminer la fonction de répartition, notée Ψ, de la loi $\mathcal{L}(0,1)$.
   (c) On suppose que X suit la loi $\mathcal{L}(0,1)$.
      (i) Montrer que $\beta X + \alpha$ suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.
      (ii) En déduire la fonction de répartition de la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

   (d) Espérance et variance.
      (i) On suppose que X suit la loi $\mathcal{L}(0,1)$. Montrer que $E(X)$ et $V(X)$ existent et valent respectivement 0 et 2.
      (ii) En déduire l'existence et les valeurs de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire réelle qui suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

   (e) Simulation à partir d'une loi exponentielle. Soit U une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1 et V une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et indépendante de U.
      (i) En utilisant le système complet naturellement associé à V, montrer que $X = (2V-1)U$ suit la loi $\mathcal{L}(0,1)$.
      (ii) Compléter la définition Python ci-dessous pour que la fonction ainsi définie réalise la simulation d'une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$:

```
def Laplace(alpha, beta):
    if ......... <= 1/2:
        V = 1
    else :
        V = 0
    return ................
```

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)(1-x)^n, & \text{si } x \in [0;1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Vérifier que f_n est une densité de probabilité. On note X_n une variable aléatoire ayant f_n pour densité. Exprimer la fonction de répartition F_n de X_n.

(b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = nX_n$.
Calculer la fonction de répartition G_n de la variable Y_n.

(3) On considère deux variables X et Y indépendantes telles que

$$P(Y=1) = P(Y=-1) = \frac{1}{2}$$

et $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$.
Quelle est la loi de $Z = XY$?

(4) On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

(a) Montrer, à l'aide du changement de variable $u = 1 + e^{-x}$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et préciser sa valeur.

(b) En déduire que f peut être considérée comme une densité de probabilité. Dans la suite de cette section, on note X une variable aléatoire ayant f pour densité.

(c) Donner l'expression de la fonction de répartition F_X de X.

(d) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = 1 - F_X(-x)$. Quelle loi usuelle du cours admet une fonction de répartition vérifiant la même propriété?

(e) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

(i) Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et dresser ton tableau de variations, limites comprises.
(ii) Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble J à préciser et déterminer l'expression de sa bijection réciproque φ^{-1}.
(iii) On définit la variable aléatoire Y par $Y = \varphi(X)$. Montrer que $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([-1;1])$.
(iv) Montrer que si $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$, alors $2U - 1 \hookrightarrow \mathcal{U}([-1;1])$.
(v) En déduire l'écriture d'une fonction Python d'en-tête `def simul_X( ):` qui renvoie une simulation de la variable aléatoire X.

(f) (i) Montrer que f est paire.
(ii) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k f(t)\mathrm{d}t$ converge.
(iii) Déduire des questions précédentes que X admet une espérance et préciser sa valeur.
(iv) On suppose écrite avec succès la fonction Python de la Question (4(e)v). Que devrait afficher l'exécution des commandes ci-dessus? Justifier la réponse.

```
ech=[simul_X( ) for k in range(1000)]
print(np.mean(ech))
```