Math ECG 2. 2023-2024

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Quinzaine de colle n°7

Période du 08/01 au 19/01

Semaine du 08/01 au 12/01

Programme

- **Chapitre 11.** Intégralité.
- Reprise du **DS n°3**.

Questions de cours

- Équations différentielles linéaires homogènes d'ordres 1 et 2 : méthode de résolution.
- Résoudre le problème de Cauchy : $\begin{cases} x'+y' &= -2y \\ 2y' &= -y \\ x(0) &= 3 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$.
- Méthode de résolution d'un système différentiel $X' = AX$ avec A diagonalisable. Forme des solutions.

Suggestion d'exercices

(1) On considère le système différentiel

$$(S) \qquad \begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = x - y \end{cases}$$

(a) Résoudre le système (S).
(b) Trouver les états d'équilibre du système (S).
(c) Existe-t-il des trajectoires convergentes ? Si oui, en donner une.
(d) Justifier que toutes les trajectoires ne sont pas convergentes.

(2) On considère le système différentiel

$$(S) \qquad \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -2x - 2y \end{cases}$$

(a) Montrer que toutes les trajectoires de (S) sont convergentes.
(b) Montrer qu'il existe une infinité d'états d'équilibre associés à (S) et les donner.
(c) Résoudre le système (S).
(d) Expliciter une trajectoire non constante qui converge vers l'état d'équilibre $(2, -2)$.

(3) On considère le système différentiel linéaire

$$(S) \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & x & + & 4y & - & 4z \\ y' & = & 3x & + & 2y & - & 4z \\ z' & = & 3x & - & 3y & + & z \end{array}\right.$$

On pose, pour tout réel t, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer qu'il existe une unique solution de (S) vérifiant : $X(0) = X_0$.
(b) Résoudre le système (S).
(c) (i) Déterminer la trajectoire associée à la solution évoquée en question 3a.
(ii) Cette trajectoire est-elle convergente ?

(4) (*Système avec matrice non diagonalisable*). On considère le système différentiel

$$(S) \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} x' & = & 3x & - & y \\ y' & = & x & + & y \end{array}\right.$$

(a) (i) Déterminer une matrice A telle que le système soit équivalent à $X'(t) = AX(t)$. Déterminer le spectre de A.
(ii) Montrer que A n'est pas diagonalisable.

(b) (i) On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
(ii) Prouver que $P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire T que l'on explicitera.

(c) On note $Y = P^{-1}X$.

(i) En notant $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ prouver que : $Y' = P^{-1}X'$.
(ii) En déduire que : $X' = AX \iff Y' = TY$.

(d) (i) Résoudre l'équation différentielle $v' = 2v$.
(ii) En déduire les solutions du système $Y' = TY$.
(iii) Conclure.

(5) (*Équation non linéaire : équation logistique.*) Soit $(a,b) \in]0,+\infty[^2$. On considère l'équation différentielle logistique (non linéaire)

$$\text{(E)} \qquad y' = ay - aby^2$$

(a) Déterminer les équilibres de l'équation logistique.
(b) Soit f une solution de (E) sur $[0,+\infty[$ qui ne s'annule pas (on admet qu'une telle solution existe).
(i) On pose $z = \dfrac{1}{f}$.
Montrer que z satisfait une équation différentielle linéaire puis montrer que, pour tout $t \geq 0$,

$$z(t) = b + (z(0) - b)e^{-at}.$$

(ii) En déduire que, pour tout $t \geq 0$,

$$f(t) = \frac{f(0)}{bf(0) + (1 - bf(0))e^{-at}}.$$

(c) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$. Que remarque-t-on ?

Semaine du 15/01 au 19/01

Programme

- **Chapitre 11.** Intégralité.
- **Chapitre 12.** Intégralité.
- Préparation du DS n°4.

Questions de cours

- Équations différentielles linéaires homogènes d'ordres 1 et 2 : méthode de résolution.
- Résoudre le problème de Cauchy : $\left\{\begin{array}{rcl} x'+y' & = & -2y \\ 2y' & = & -y \\ x(0) & = & 3 \\ y(0) & = & 1 \end{array}\right.$.
- Méthode de résolution d'un système différentiel $X' = AX$ avec A diagonalisable.
  Forme des solutions.
- Après avoir déterminer le domaine de définition U (et l'avoir représenté graphiquement) de la fonction $f : (x,y) \longmapsto \ln((1-x)(1-y)) + yx^2 - 2x$, justifier qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.
- Déterminer les éventuels *extrema* locaux de la fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto e^{-x^2-y^2}$. Sont-ils globaux ?

Suggestion d'exercices

(1) Systèmes diff. de la semaine précédente.

(2) On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) \qquad\qquad y''' - y'' - y' + y = 0.$$

(a) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X' = AX$, où $X = \begin{pmatrix} y'' \\ y' \\ y \end{pmatrix}$.
(b) Déterminer une base (w) de $\mathrm{Ker}(A+I)$.
(c) Déterminer une base (u) de $\ker(A-I)$. Vérifier que $u \in \ker((A-I)^2)$.
(d) Déterminer un vecteur v de sorte que (u,v) forme une base de $\mathrm{Ker}\,((A-I)^2)$.
(e) Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On note P la matrice de passage dans cette base. Vérifier que $P^{-1}AP = T$ où T est triangulaire à préciser.
(f) On pose $Z = P^{-1}X$. Montrer que X est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si Z est solution d'un système différentiel (Σ) que l'on précisera.
(g) Résoudre (Σ) puis, résoudre $(\mathcal{E})$.

(3) Un agriculteur souhaite améliorer le rendement de son exploitation en utilisant de l'engrais. Une étude a montré que le rendement, en tonnes par hectare, pour la variété de blé cultivée est donnée par

$$f(B,N) = 120B - 8B^2 + 4BN - 2N^2$$

B désigne la quantité de semences de blé utilisée, N la quantité d'engrais utilisée.
(a) Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
(b) Montrer que f ne peut présenter un extremum qu'en un seul point de $\mathbb{R}^2$. Former la matrice hessienne de f en ce point.

(c) On admet ici[1] que si

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est une matrice diagonalisable de valeurs propres λ_1 et λ_2, alors

$$\begin{cases} \lambda_1\lambda_2 & = & ad - bc \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = & a + d \end{cases}$$

En utilisant cette remarque, montrer que f présente bien un extremum local au point précédent. préciser sa nature et sa valeur.

(d) Développer

$$-2(y-x)^2 - 6(x-10)^2.$$

Que peut-on en conclure à propos de l'extremum précédent?

(e) Si on suppose de plus qu'une contrainte de budget impose $B + 2N = 23$, déterminer l'optimum de rendement.

(f) Démontrer, par identification de polynômes, le résultat admis à la Question 3c.

(4) Montrer que les fonctions suivantes sont $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et former leur matrice hessienne en un point quelconque (x, y).

$$(i)\ (x,y) \mapsto x^4y^2 + 3x^2y - 2x + 1, \qquad (ii)\ (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2+1},$$

$$(iii)\ (x,y) \mapsto \ln(x)e^y, \qquad (iv)\ (x,y) \mapsto \frac{x+y}{e^y+1}$$

$$(v)\ (x,y) \mapsto x^3 + 2xy + 3xy^2 + y^4 - 1, \qquad (vi)\ (x,y) \mapsto \frac{x-y}{x^2+y^2+1}$$

(5) Déterminer le **domaine de définition** et le représenter graphiquement pour chaque fonction suivante

$$(i)\ f_1 :\ (x,y) \mapsto \frac{xe^y}{y} + \ln(x), \qquad (ii)\ f_2\ :\ (x,y) \mapsto \sqrt{2-x-y} + \sqrt{xy}$$

(6) (a) On considére la fonction g définie pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \ln(x) + 2x + 1$.

(i) Étudier les variations de g et donner les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.
(ii) En déduire qu'il existe un unique réel α, élément de $]0, 1/e[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

(b) On considére la fonction de deux variables réelles f définie par:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = x(\ln(x) + x + y^2).$$

(i) Déterminer le seul point critique de f.
(ii) Vérifier que f présente un minimum local, noté m, en ce point.
(iii) Montrer que $m = -\alpha(\alpha + 1)$

[1]Mais dans la plupart des exercices il faut le redémontrer