Math ECG 2. 2023-2024

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Quinzaine de colle n°8

Période du 22/01 au 02/02

Semaine du 22/01 au 26/01

Programme

- **Chapitre 12.** Intégralité.
- **Chapitre 13.** Intégralité.
- Reprise du **DS n°4**. **Sauf Lundi car le DS a lieu Mardi 23/01.**

Questions de cours

- Après avoir déterminer le domaine de définition U (et l'avoir représenté graphiquement) de la fonction $f: (x,y) \longmapsto \ln((1-x)(1-y)) + yx^2 - 2x$, justifier qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

- Déterminer les éventuels *extrema* locaux de la fonction $f: (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto e^{-x^2-y^2}$. Sont-ils globaux ?

- Énoncer les inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev, en en précisant les conditions d'application. Énoncer la loi faible des grands nombres et la démontrer.

- Définition de la convergence en loi. Cas particulier d'une suite de v.a discrètes qui converge en loi vers une v.a. discrète. Énoncé du théorème central limite.

Suggestion d'exercices

(1) Un agriculteur souhaite améliorer le rendement de son exploitation en utilisant de l'engrais. Une étude a montré que le rendement, en tonnes par hectare, pour la variété de blé cultivée est donnée par
$$f(B,N) = 120B - 8B^2 + 4BN - 2N^2$$
B désigne la quantité de semences de blé utilisée, N la quantité d'engrais utilisée.

(a) Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrer que f ne peut présenter un extremum qu'en un seul point de $\mathbb{R}^2$. Former la matrice hessienne de f en ce point.

(c) On admet ici que si
$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
est une matrice diagonalisable de valeurs propres λ_1 et λ_2, alors
$$\begin{cases} \lambda_1\lambda_2 &= ad - bc \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= a + d \end{cases}$$
En utilisant cette remarque, montrer que f présente bien un extremum local au point précédent. préciser sa nature et sa valeur.

(d) Développer $-2(y-x)^2-6(x-10)^2$.
Que peut-on en conclure à propos de l'extremum précédent?

(e) Si on suppose de plus qu'une contrainte de budget impose $B+2N=23$, déterminer l'optimum de rendement.

(f) Démontrer, par identification de polynômes, le résultat admis à la Question 1c.

(2) Montrer que les fonctions suivantes sont $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et former leur matrice hessienne en un point quelconque (x,y).

$$(i)\ (x,y)\mapsto x^4y^2+3x^2y-2x+1, \qquad (ii)\ (x,y)\mapsto \sqrt{x^2+y^2+1},$$
$$(iii)\ (x,y)\mapsto \ln(x)e^y, \qquad (iv)\ (x,y)\mapsto \frac{x+y}{e^y+1}$$
$$(v)\ (x,y)\mapsto x^3+2xy+3xy^2+y^4-1, \qquad (vi)\ (x,y)\mapsto \frac{x-y}{x^2+y^2+1}$$

(3) Déterminer le **domaine de définition** et le représenter graphiquement pour chaque fonction suivante

$$(i)\ f_1:\ (x,y)\mapsto \frac{xe^y}{y}+\ln(x), \qquad (ii)\ f_2\ :\ (x,y)\mapsto \sqrt{2-x-y}+\sqrt{xy}$$

(4) (a) On considére la fonction g définie pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x)=\ln(x)+2x+1$.

(i) Étudier les variations de g et donner les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.
(ii) En déduire qu'il existe un unique réel α, élément de $]0,1/e[$ tel que $g(\alpha)=0$.

(b) On considére la fonction de deux variables réelles f définie par:

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}, \qquad f(x,y)=x(\ln(x)+x+y^2).$$

(i) Déterminer le seul point critique de f.
(ii) Vérifier que f présente un minimum local, noté m, en ce point.
(iii) Montrer que $m=-\alpha(\alpha+1)$

(5) Soit (X_n) une suite de v.a. telle que $X_n\hookrightarrow\mathcal{B}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)$. Montrer que X_n converge en loi vers Z, où $Z\hookrightarrow\mathcal{B}(e^{-1})$.

(6) Un étudiant fait en moyenne une faute d'orthographe tous les 50 mots. Quelle est la probabilité qu'il ne fasse pas plus de 5 fautes dans un texte contenant 200 mots? 500 mots?

(7) Soit $X\hookrightarrow\mathcal{G}(1/n)$.

(a) Monter que $P(X\geq n^2)\leq \dfrac{1}{n}$.

(b) Montrer que $P(|X-n|\geq n)\leq 1-\dfrac{1}{n}$. En déduire que $P(X\geq 2n)\leq 1-\dfrac{1}{n}$.

(8) On considère une suite $(X_1,...,X_n)$ de v.a indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1. On pose

$$Z_n=\max(X_1,...,X_n)-\ln(n).$$

(a) Déterminer la fonction de répartition de Z_n.
(b) On pose $Z=-\ln(X)$ où $X\hookrightarrow\mathcal{E}(1)$.

(i) Déterminer la fonction de répartition de Z.
(ii) Montrer que (Z_n) converge en loi vers Z.

Semaine du 29/01 au 02/02

Programme

- **Chapitre 13.** Intégralité.
- Reprise du **DS n°4**.
- **Chapitre 14.** Intégralité. *On essaiera de proposer un exercice complet sur les chaînes de Markov (réduction de la matrice de transition à faire), avec si possible un programme Python à écrire/compléter et une convergence de la chaîne à visualiser.*

Questions de cours

- Énoncer les inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev, en en précisant les conditions d'application. Énoncer la loi faible des grands nombres et la démontrer.

- Définition de la convergence en loi. Cas particulier d'une suite de v.a discrètes qui converge en loi vers une v.a. discrète. Énoncé du théorème central limite.

- On considère un réel $p \in]0;1[$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}$.
  i. Dessiner un graphe probabiliste qui aurait A pour matrice de transition.
  ii. On considère la chaîne de Markov $(X_k)_{k\geq 0}$ associée à ce graphe et on suppose que X_0 suit la loi uniforme sur $[\![1,3]\!]$. Écrire un programme qui, pour un entier naturel k et un réel p pris en arguments, simule et renvoie la variable X_k.
  iii. Déterminer l'état stable de la chaîne.
  iv. Déterminer la loi de X_1.

Suggestion d'exercices

Exercice 1. Deux urnes A et B contiennent initialement chacune deux boules numérotées 0 et 1. Leur contenu évolue lors d'une expérience aléatoire et est simulé par une liste Python.
Ainsi la ligne de code `A = [0, 1]` permet de voir qu'initialement, l'urne A contient une boule numérotée 0 et une autre numérotée 1.

On considère la fonction Python suivante qui permet de simuler une variable aléatoire X.

```python
def simulX():
    A = [0, 1]
    B = [0;1]
    Y = rd.randint(0, 2, [4, 2])
    k = 0
    while np.sum(A) > 0 and k < 4:
        i = Y[k, 0]
        j = Y[k, 1]
        c = A[i]
        A[i] = B[j]
        B[j] = c
        k = k + 1
    return k
```

Expliquer le protocole ainsi simulé et donner la loi de X.

Exercice 2. Étudier la convergence en loi de (T_n) où T_n est la v.a qui peut être simulée par la fonction ci-dessous.

```
def simul_T(n) :
    U=[rd.random() for k in range(n)]
    N=np.sum[rd.binomial(1, p) for k in range(n)]
    if N==0 :
        return U[0]
    return(max([U[j] for j in range(N)]))
```

Exercice 3. Une urne contient 2 boules : une blanche et une rouge. On effectue dans cette urne une succession de tirages en respectant la règle suivante : si la boule tirée est blanche, on l'enlève du jeu et on ajoute une boule rouge dans l'urne. Si la boule tirée est rouge, on l'enlève du jeu et on ajoute une boule blanche dans l'urne.

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note N_i le nombre de boules blanches contenues dans l'urne après le tirage i.

Étudier la chaîne de Markov $(N_i)_{i\geq 0}$.