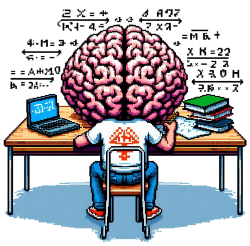
Mathématiques PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Devoir maison n°1

Solution

Exercice 1

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}.$$

1. Étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}_+$. Donner un équivalent de $f_n(x)$ en $+\infty$ et y préciser la limite de $f_n(x)$.

Solution. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de fonctions polynomiales dérivables sur ce même intervalle, dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour $x \geq 0$, on a
$$f_n'(x) = \frac{1+nx^2 - x(2nx)}{(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2},$$
quantité dont on obtient facilement le signe (donné par celui du numérateur), ce qui permet de dresser le tableau de variations de f_n. Avant cela, on peut observer que
$$f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{nx^2} = \frac{1}{nx} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
De plus,
$$f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$
Ainsi,

x	0		$1/\sqrt{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2\sqrt{n}}$	$\searrow$	0

$\square$

2. On introduit la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = 1/3$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par la relation de récurrence
$$u_{n+1} = f_n(u_n).$$

3. La suite (u_n) correspond-elle au type de suite dont le schéma d'étude est présenté en fin de **Chapitre 0** ?

Solution. Hélas non. La fonction f_n qui donne la relation de récurrence entre deux termes consécutifs dépend de n, on fera donc très attention quand on passe à la limite en n par exemple (pas d'équation de point fixe par exemple). On peut quand même utiliser les résultats classiques sur les suites (convergence monotone, etc...) $\square$

4. Calculer u_2 et u_3.

Solution. Par définition

$$\begin{aligned} u_2 &= f_1(u_1) = \frac{u_1}{1+u_1^2} \\ &= \frac{1/3}{1+(1/3)^2} \\ &= \frac{3}{10} \\ u_3 &= f_2(u_2) = \frac{u_2}{1+2u_2^2} \\ &= \frac{3/10}{1+2(3/10)^2} \\ &= \frac{15}{59} \end{aligned}$$

□

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. En déduire la monotonie de (u_n).

Solution. On procède par récurrence.

✗ initialisation. $u_1 = 1/3 > 0$, ce qui nous permet de voir que c'est vrai au rang $n = 1$.

✗ hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. Alors d'après l'étude précédente de la fonction f_n, $u_{n+1} = f_n(u_n) > 0$, ce qui termine la récurrence.

Mais alors,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1+nu_n^2} - u_n = \frac{u_n - u_n - nu_n^3}{1+nu_n^2} = -\frac{nu_n^3}{1+nu_n^2} < 0,$$

ce qui permet d'affirmer que la suite (u_n) est décroissante. □

6. Montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ que l'on déterminera à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.

Solution. La suite (u_n) est minorée (par 0) et décroissante; le théorème de convergence monotone nous permet alors de conclure à la convergence de celle-ci vers une limite ℓ qui vérifie, par passage à la limite dans les inégalités, $\ell \geq 0$.

C'est maintenant qu'il faut faire attention et ne pas se laisser tenter de passer brutalement à la limite dans la relation $u_{n+1} = f_n(u_n)$ car il y a également de la dépendance en n dans la fonction! En effet, on a

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+nu_n^2}.$$

À gauche, la quantité tend vers ℓ. À droite en revanche, cela dépend du dénominateur (le numérateur tend vers ℓ). Celui-ci peut tendre vers $+\infty$, si $\ell \neq 0$ et sinon c'est indéterminé. Supposons alors que $\ell > 0$. Alors,

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{1+nu_n^2} = 0$$

ce qui est absurde. Ainsi, $\ell = 0$. □

7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n \leq \frac{1}{n}.$$

Solution. On procède (encore) par récurrence.

✗ initialisation. Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1/3 \leq 1$ et c'est vérifié.
✗ hérédité. Supposons alors que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $u_n \leq 1/n$. Comme $1/n \leq 1/\sqrt{n}$, et que f_n est croissante sur $[0; 1/\sqrt{n}]$, on a

$$u_{n+1} = f_n(u_n) \leq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1/n}{1+n(1/n)^2} = \frac{1}{n+1},$$

ce qui est bien qu'on voulait et qui termine donc la récurrence.

□

8. En déduite que la suite (nu_n) est croissante, puis qu'elle converge vers un réell $\ell' \in]0; 1]$.

Solution. L'inégalité précédente donne (nu_n) majorée (par 1). On a donc envie, afin d'appliquer le théorème de convergence, de montrer que la suite (nu_n) est croissante. Allons-y.

$$\begin{aligned}(n+1)u_{n+1} - nu_n &= \frac{(n+1)u_n}{1+nu_n^2} - \frac{nu_n + n^2u_n^3}{1+nu_n^2}\\ &= \frac{u_n(1-n^2u_n^2)}{1+nu_n^2}\\ &\geq 0\end{aligned}$$

car $u_n \leq 1/n$ donne $u_n^2 \leq 1/n^2$. Ainsi la suite (nu_n) est croissante et converge vers un réel ℓ' avec $\ell' \leq 1$ et $\ell' \geq 1 \cdot u_1 = u_1 > 0$ donc $\ell' \in]0;1]$.

□

9. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \leq 1.$$

Solution. On essaie de manipuler la quantité considérée

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1+nu_n^2}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{nu_n^2}{u_n} = nu_n \leq 1.$$

□

10. Conclure quant à la valeur de ℓ'. En déduire un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$.

Solution. La différence précédente fait naturellement penser à une somme télescopique. On essaie donc de calculer la somme, pour voir ce qu'on obtient comme information. Par télescopage donc,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_1}.$$

Mais, en utilisant l'inégalité précédente, on a donc

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_1} = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} 1 = n-1,$$

ou encore

$$\frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{u_1} + n - 1$$

ce qui donne aussi

$$u_n \geq \frac{1}{n-1+\frac{1}{u_1}}.$$

Mais, alors, en multipliant par n, on obtient l'encadrement

$$\frac{n}{n-1+\frac{1}{u_1}} \leq nu_n \leq 1$$

et le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\ell' = 1$. Ceci se réécrit aussi comme

$$u_n \sim \frac{1}{n},\ n \to +\infty.$$

□

Exercice 2

1. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ admettant une racine complexe z dont l'ordre de multiplicité est supérieur ou égal à 2.

a. Vérifier que le conjugué $\bar{z}$ de z est aussi une racine de P.

Solution. Comme les coefficients de P sont réels, $P(\bar{z})$ est nul puisque c'est le conjugué de $P(z)$, lui-même nul. □

b. Démontrer que, si z n'est pas un nombre réel, alors il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P = \left(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(z)X + |z|^2\right)^2 Q.$$

Solution. Comme z est une racine multiple de P, il existe un polynôme $M \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X-z)^2 M$. En effectuant dans $\mathbb{C}[X]$ la division euclidienne de M par $(X-\bar{z})^2$, on peut écrire

$$P = (X-z)^2\left((X-\bar{z})^2 Q + R\right)$$

où le degré du polynôme R est au plus égal à 1.
Le reste R est en fait nécessairement nul puisque on a aussi la factorisation (dans $\mathbb{C}[X]$)

$$\overline{P} = P = (X-\bar{z})^2 \overline{M}$$

ce qui prouve que R est divisible par $(X-\bar{z})^2$. Il en résulte que

$$P = (X-z)^2(X-\bar{z})^2 Q = \left(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(z)X + |z|^2\right)^2 Q$$

avec donc nécessairement $Q \in \mathbb{R}[X]$. □

c. En déduire que z est racine du polynôme dérivé P' de P.

Solution. De sorte à utiliser la question précédente, on distingue deux cas :

- ✗ Si $z \notin \mathbb{R}$. On dérive la relation ci-dessus

$$P' = 2\left(2X - 2\mathrm{Re}(z)\right)\left(X^2 - 2\mathrm{Re}(z)X + |z|^2\right)Q + \left(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(z)X + |z|^2\right)^2 Q'$$

et bien entendu, comme $X^2 - 2\mathrm{Re}(z)X + |z|^2 = (X-z)(X-\bar{z})$ s'annule en z donc $P'(z) = 0$.

- ✗ Si $z \in \mathbb{R}$, on peut toujours factoriser, il existe $T \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P = (X-z)^2 T \quad \text{ et donc } P' = 2(X-z)T + (X-z)^2 T'$$

et donc on a encore $P'(z) = 0$.

□

2. Pour tout entier $n \geq 2$, on note P_n le polynôme $X^{2n} - 2nX + 1$ de $\mathbb{R}[X]$.

a. Déterminer les racines complexes du polynôme dérivé P_n'.

Solution. Le polynôme dérivé de P_n est $P_n' = 2nX^{2n-1} - 2n$.

Par conséquent:

$$P_n'(z) = 0 \Longleftrightarrow z^{2n-1} = 1$$

Les racines complexes du polynôme P_n sont donc les racines ($2n-1$)-ièmes de l'unité, c'est-à-dire les $2n-1$ nombres complexes

$$z_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n-1}\right) \quad \text{ où } k \in [\![0, 2n-2]\!]$$

□

b. Combien le polynôme P_n admet-il de racines complexes?

Solution. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, le nombre de racines complexe distinctes de P_n est compris entre 1 et $2n$.
Si P_n admettait une racine complexe multiple z, celle-ci annulerait simultanément, comme vu ci-avant, P_n et son polynôme dérivé

$$P_n' = 2n\left(X^{2n-1} - 1\right).$$

On aurait donc $z^{2n-1} = 1$ et par conséquent

$$P_n(z) = z^{2n} - 2nz + 1 = (1-2n)z + 1 = 0$$

ce qui est impossible puisque $\frac{1}{2n-1}$ n'est pas une racine ($2n-1$)-ième de l'unité (puisque $n \geq 2$).
Le polynôme P_n admet donc $2n$ racines complexes (distinctes). □

Pour tout entier $n \geq 2$, on note f_n la fonction réelle définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^{2n} - 2nx + 1.$$

3. Combien l'équation $f_n(x) = 0$ admet-elle de solutions réelles?

Solution. Une étude de la fonction f_n montre que celle-ci est strictement décroissante sur $]-\infty,1[$ puis strictement croissante sur $]1,+\infty[$ avec $f_n(1)=2(1-n)<0$.
On applique alors le théorème de bijection à la restriction de f_n sur chacun de ces deux intervalles (la fonction y est continue - car polynomiale - et strictement monotone).
Les deux intervalles images étant tous deux égaux à $]2(1-n);+\infty[$ qui contient 0, celui-ci va admettre un unique antécédent par f_n dans chacun des deux intervalles.
L'équation $f_n(x)=0$ admet donc deux solutions, l'une strictement inférieure à 1 et l'autre strictement supérieure à 1.
Plus précisément, comme $f_n(0)=1>0, f_n(1)=2(1-n)<0$ et $f_n(2)=4^n-4n+1>0$, la plus petite des deux solutions de l'équation est comprise entre 0 et 1 , et la plus grande entre 1 et 2 :

$$\forall n \geq 2, \quad 1<u_n<2.$$

□

4. On note u_n la plus grande des solutions réelles de l'équation précédente.

a. Soit $\varepsilon>0$. Que peut-on dire du signe de $f_n(1+\varepsilon)$? En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ converge vers 1.

Solution. Soit $\varepsilon>0$, on a

$$f_n(1+\varepsilon)=(1+\varepsilon)^{2n}-2n(1+\varepsilon)+1 \sim (1+\varepsilon)^{2n}$$

quand n tend vers l'infini, ce qui entraine que $f_n(1+\varepsilon)>0$ pour n assez grand.
Il en résulte que, pour tout $\varepsilon>0, u_n$ est compris entre 1 et $1+\varepsilon$ pour tout n suffisamment grand, ou encore $0<u_n-1<\varepsilon$.
Par conséquent: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$. □

b. $(*)$ Justifier le développement asymptotique

$$u_n=1+\frac{\ln(n)}{2n}+o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Solution. On écrit $u_n=1+\varepsilon_n$ puis on exprime la relation $f_n\left(u_n\right)=0$. Il vient après un DL de $\ln(1+x)$ en 0 :

$$e^{2n\varepsilon_n+o(n\varepsilon_n)}=2n-1+2n\varepsilon_n$$

puis

$$2n\varepsilon_n+o\left(n\varepsilon_n\right)=\ln(2n)+\ln\left(1-\frac{1}{2n}+\varepsilon_n\right)=\ln(n)+O(1)$$

ce qui implique en prenant les équivalents à gauche et à droite $2n\varepsilon_n \sim \ln n$ et

$$u_n=1+\frac{\ln n}{2n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

□

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin x}{x} \end{array}$$

1. Montrer que f est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, que l'on notera encore f, et préciser les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

Solution. f est $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de deux fonctions usuelles $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle dont le dénominateur ne s'annule pas.

Le développement limité de $\sin x$ donne $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}\underset{0}{=}\dfrac{x-\dfrac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)}{x}\underset{0}{=}1-\dfrac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)$. On en déduit $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.
Pour $x\neq 0$ on a $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$. D'où en utilisant les développements limités de $\cos x$ et $\sin x$:

$$\begin{aligned} f'(x) & \underset{0}{=} \frac{1}{x^2}\left(x\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)\right) \\ & \underset{0}{=} \frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right) \underset{0}{=}-\frac{x}{3}+o(x), \end{aligned}$$

ce qui montre que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$ donc que f' est continue en 0.
Le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ implique alors que f se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^1$ en 0 telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.
D'où le résultat : f se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ □

2. Étudier la parité de f, ainsi que la nature des branches infinies de f.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a clairement $f(-x) = x$, donc f est paire.
Pour $x > 0$ on a

$$-\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

Le théorème des gendarmes donne $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Ainsi, la courbe admet en $+\infty$ l'axe des abscisses comme asymptote. La parité permet d'affirmer qu'il en est de même en $-\infty$. □

3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant 1$.

Solution. Pour $x = 0$ le résultat découle de la Question **1.**
Pour $x > 0$, le sin est dérivable (donc continue) sur $[0, x]$, et $\forall t \in [0, x]$ on a $|\cos t| \leqslant 1$, d'où par l'inégalité des accroissements finis

$$\left|\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0}\right| = |f(x)| \leqslant 1.$$

On fait pareil pour $x < 0$ (attention à l'ordre des bornes dans ce cas $[x, 0]$).
D'où le résultat :$\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant 1$.

Remarque. L'inégalité $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x)| \leq |x|$ est au programme et peut donc être utilisée sans démonstration. □

4. a. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Solution. On l'a déjà dit : f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle. □

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + Q_n(x)\sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{x^{n+1}}.$$

Préciser de plus les expressions de P_0, Q_0, P_1 et Q_1, ainsi que les expressions de P_{n+1} et Q_{n+1} en fonction de P_n et Q_n.

Solution. Raisonnons par récurrence sur n.

✗ <u>initialisation</u>. Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{\sin x}{x} = \frac{1\sin\left(x + 0\cdot\frac{\pi}{2}\right) + 0\sin\left(x + 1\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{x^{0+1}}$$

donc la formule est vraie au rang $n = 0$ avec $P_0(X) = 1$ et $Q_0(X) = 0$ (on a donc des polynômes constants dans le cas $n = 0$). Il est facile (mais pas utile ici) de vérifier que le résultat est vrai également pour $n = 1$: on a $f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$, or $\cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ et $-\sin x = \sin\left(x + 2.\dfrac{\pi}{2}\right)$, donc $P_1(X) = X$ et $Q_1(X) = 1$ conviennent.

✗ <u>hérédité</u>. Considérons un entier n pour lequel existent deux polynômes P_n et Q_n tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + Q_n(x)\sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{x^{n+1}}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a d'une part

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right],$$

et d'autre part

$$\sin\left(x + (n+2)\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

donc il vient en dérivant

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)\sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) + Q_{n+1}(x)\sin\left(x + (n+2)\frac{\pi}{2}\right)}{x^{n+1}}$$

où on a posé

$$\begin{cases} P_{n+1}(x) = x\left[Q_n'(x) + P_n(x)\right] - (n+1)\,Q_n(x) \\ Q_{n+1}(x) = x\left[Q_n(x) - P_n'(x)\right] + (n+1)\,P_n(x) \end{cases}$$

P_{n+1} et Q_{n+1} ainsi définis sont bien des polynômes, en tant que produit, somme et dérivée de polynômes. Ce qui prouve la propriété au rang $n+1$, et termine la démonstration.

□

5. Soient U et V deux polynômes tels que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $U(x)\sin x + V(x)\cos x = 0$.
Montrer que les deux polynômes U et V sont constants nuls.

Solution. Si U et V sont deux polynômes tels que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $U(x)\sin x + V(x)\cos x = 0$, alors on a en particulier $V(k\pi) = 0$ et $U\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Les deux polynômes U et V ont donc chacun une infinité de racines : ils sont tous deux constants nuls. □

6. **a**. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'unicité du couple (P_n, Q_n).

Solution. Considérons, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, deux couples (P_n, Q_n) et (R_n, S_n) convenables. On a alors, pour tout réel $x > 0$:

$$\frac{P_n(x)\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + Q_n(x)\sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{x^{n+1}} = \frac{R_n(x)\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + S_n(x)\sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{x^{n+1}}$$

ce qui donne

$$\left(P_n(x) - R_n(x)\right)\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + \left(Q_n(x) - S_n(x)\right)\sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

On raisonne alors comme à la Question **5.**, en prenant des valeurs adéquates pour x. On obtient que $Q_n - S_n$ s'annule en $(2k-n)\frac{\pi}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, donc ce polynôme est nul. De même $P_n - R_n$ s'annule en $(2k-n+1)\frac{\pi}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, donc ce polynôme est nul. L'unicité du couple (P_n, Q_n) en découle. □

b. En remarquant que sur $\mathbb{R}_+^*$ on a $x\,f(x) = \sin x$, montrer à l'aide de la formule de Leibniz que :

$$\begin{cases} P_{n+1}(x) = x^{n+1} - (n+1)\,Q_n(x) \\ Q_{n+1}(x) = (n+1)\,P_n(x) \end{cases}$$

Solution. En appliquant la formule de Leibniz à la relation $x\,f(x) = \sin x$ il vient

$$\sin^{(n+1)} x = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{(k)} f^{(n+1-k)}(x),$$

où on a noté $x^{(k)} = \dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}$.
Ce qui donne (en remarquant que les termes de la somme sont nuls sauf pour $k=0$ et $k=1$) en utilisant la remarque faite à la Question **4.b** :

$$\sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) = x\,f^{(n+1)}(x) + (n+1)\,f^{(n)}(x).$$

En remplaçant dans la formule obtenue en **4.b.** on obtient, après réduction au même dénominateur et regroupement des termes :

$$\left(P_{n+1}(x) + (n+1)\,Q_n(x) - x^{n+1}\right)\sin\left(x + (n+1)\tfrac{\pi}{2}\right) - \left(Q_{n+1}(x) - (n+1)\,P_n(x)\right)\sin\left(x + n\tfrac{\pi}{2}\right) = 0,$$

ce qui en raisonnant comme à la Question **6.a.** (où on a adapté la preuve de la Question **5.**) donne

$$\begin{cases} P_{n+1}(x) = x^{n+1} - (n+1)\,Q_n(x) \\ Q_{n+1}(x) = (n+1)\,P_n(x) \end{cases}.$$

□

c. Montrer alors que $Q_n = P_n'$ et que P_n est solution de l'équation différentielle $y'' + y = x^n$.

Solution. La confrontation des relations obtenues ci-dessus avec celles du **4.b.** donne immédiatement

$$Q_n = P_n'.$$

On en déduit $Q_n' = P_n''$ puis $P_n'' + P_n = x^n$ en comparant de nouveaux les relations obtenus en **4.b.** avec celles obtenues en **6.b.**
Ainsi, P_n est bien solution de $(\mathcal{E}) : y'' + y = x^n$. □

d. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré de chacun des polynômes P_n et Q_n.

Solution. On peut travailler par récurrence, mais ici il est plus simple d'utiliser l'équation différentielle : si $a_k x^k$ est le terme dominant de P_n, il est encore le terme dominant de $P_n'' + P_n$ et donc il vaut x^n car P_n est solution de $y'' + y = x^n$. Il en découle que P_n est de degré n et donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, que $Q_n = P_n'$ est de degré $n-1$. □

e. Déterminer l'expression de $f^{(2)}$ et de $f^{(3)}$, et montrer que f est de classe $\mathcal{C}^3$ en 0.

Solution. Pour $x \neq 0$ les diverses relations trouvées plus haut donnent, soit par récurrence (à l'aide de 4.2 ou de 6.2), soit directement en utilisant l'équation différentielle, soit même (pour les courageux...) en dérivant f' puis f'', les formules suivantes :

$$f^{(2)}(x) = \frac{-\left(x^2-2\right)\sin x - 2x\cos x}{x^3} \qquad \text{et} \qquad f^{(3)}(x) = \frac{-\left(x^3-6x\right)\cos x + \left(3x^2-6\right)\sin x}{x^4}.$$

Les développements limités de sinus et cosinus permettent alors d'écrire :

$$\begin{aligned} f^{(2)}(x) &\underset{0}{=} \frac{-\left(x^2-2\right)\left(x - \dfrac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) - 2x\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right)}{x^3} \\ &\underset{0}{=} \frac{-\dfrac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)}{x^3} \underset{0}{=} -\frac{1}{3} + o(1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &\underset{0}{=} \frac{-\left(x^3-6x\right)\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right) + \left(3x^2-6\right)\left(x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right)}{x^4} \\ &\underset{0}{=} \frac{\dfrac{1}{5}x^5 + o\left(x^5\right)}{x^4} \underset{0}{=} \frac{1}{5}x + o(x). \end{aligned}$$

Comme f' est $\mathcal{C}^0$ en 0 et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et que f'' a une limite finie en 0, on en déduit (par le théorème de la limite de la dérivée) que f' est $\mathcal{C}^1$ en 0 avec $f''(0) = -\dfrac{1}{3}$.
Le même raisonnement prouve que f'' est $\mathcal{C}^1$ en 0 avec $f^{(3)}(0) = 0$.
On a bien prouvé que f est de classe $\mathcal{C}^3$ en 0. □

7. $(*)$ Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 0.

Solution. Le développement en série entière du sinus donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

On a donc, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$. Cette série converge évidemment en 0 et vaut alors $1 = f(0)$: le développement en série entière est donc vraie sur $\mathbb{R}$ entier.
Ainsi f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ entier, elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Remarque. Notons que l'on retrouve les valeurs des dérivées successives en 0, puisque par unicité du développement en série entière on a

$$f^{(2n)}(0) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \qquad \text{et} \qquad f^{(2n+1)}(0) = 0.$$

□