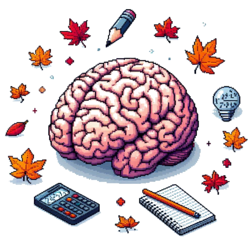
Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Devoir maison n°2

À rendre le 15/10

Dans tout ce problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.

On note $\mathbb{0}$ l'endomorphisme nul de E et Id l'endomorphisme identité.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et f endomorphisme de E, on définit par récurrence l'endomorphisme f^n par : $f^0 = \mathrm{Id}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1} = f \circ f^n$.

Un endomorphisme f de E est dit *nilpotent* si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = \mathbb{0}$. Notons qu'alors, pour tout entier $p \geqslant n$, on a $f^p = \mathbb{0}$.

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés des endomorphismes nilpotents.

Partie I : Deux exemples

1. Dans cette question (et celle là seulement), on prend $E = \mathbb{K}^3$ et pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ on pose

$$\varphi(u) = (-2x + y\,,\ -3x + y + z\,,\ -x + z)\,.$$

- **a.** Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}^3$.
- **b.** Justifier que $\varphi^2(u) = (x - y + z) \cdot v$, où $v = (1, 2, 1)$.
- **c.** En déduire que φ est nilpotent.

2. Dans cette question, et celle là seulement, on prend $E = \mathbb{K}_n[X]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, et on définit, pour tout $P \in E$,

$$\Delta(P(X)) = P(X+1) - P(X)\,.$$

- **a.** Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

On pose $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = \dfrac{X(X-1)}{2!}$, et plus généralement, $P_m = \dfrac{1}{m!}\displaystyle\prod_{k=0}^{m-1}(X-k)$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

- **b.** Justifier que $B_n = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
- **c.** Calculer $\Delta(P_k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
- **d.** En déduire le rang de Δ, puis déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta)$ et $\mathrm{Im}(\Delta)$.
- **e.** Établir que Δ est un endomorphisme nilpotent.

Partie II : Propriétés générales

3. Soit p un projecteur de E.

- **a.** Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que p soit nilpotent.
- **b.** Une symétrie de E peut-elle être nilpotente ?

4. Soient f et g deux endomorphismes de E.

- **a.** Montrer que si f est nilpotent et que f et g commutent alors $f \circ g$ est nilpotent.

b. Établir que si $f \circ g$ est nilpotent alors $g \circ f$ est nilpotent.

5. Soit f un endomorphisme nilpotent de E.

a. Montrer que l'endomorphisme $\mathrm{Id} - f$ est inversible.
b. Justifier l'existence d'un plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = \mathbb{0}$.
Cet entier est appelé l'indice de nilpotence de l'endomorphisme nilpotent f, et on le note $\nu(f)$.

6. Soit f un endomorphisme nilpotent de E, et $\nu(f)$ son indice de nilpotence. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $N_p = \mathrm{Ker}(f^p)$.

a. Déterminer $N_{\nu(f)}$.
b. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $N_p \subset N_{p+1}$.
c. Montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\dim(N_p) = \dim(N_{p+1})$, alors $N_p = N_{p+q}$ pour tout $q \in \mathbb{N}$.
d. En déduire que $\nu(f) \leqslant \dim E$.

Partie III : Commutant d'un endomorphisme nilpotent maximal

Dans cette partie, on note $n = \dim(E)$, et on considère un endomorphisme f nilpotent tel que $\nu(f) = n$ (il est alors dit *maximal*), et on note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E commutant avec f.

7. Montrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

8. Soit $g \in C(f)$.

a. Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$.
b. Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ constitue une base de E.
c. On note $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ les coordonnées du vecteur $g(x_0)$ dans la base $\mathcal{B}$.
Exprimer, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $g\left(f^k(x_0)\right)$ comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.
d. En déduire que $g = a_0 Id + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}$.

9. **a.** Déduire de ce qui précède que $C(f) = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$.
b. Déterminer la dimension de $C(f)$.

10. On considère de nouveau l'endomorphisme Δ de $\mathbb{K}_n[X]$ défini à la **Question 2.** de la **Partie I.**, et on note D l'opérateur de dérivation dans $\mathbb{K}_n[X]$, défini pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ par $D(P) = P'$.

a. Justifier que D est un endomorphisme nilpotent maximal de $\mathbb{K}_n[X]$.
b. Montrer que $\Delta \in C(D)$.
c. En déduire qu'il existe des scalaires $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que $\Delta = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k D^k$.
d. Donner les valeurs de $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.